كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل متجهات

المحاضرة : الأولى والثانية /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

المتجه: هو قطعة مستقيمة موجهة لها ثلاث عناصر:

1- المنحى: هو ظل الزاوية التي يصنعها المتجه مع الأفق

2- الجهة: لكل متجه بداية ونهاية والجهة تكون من البداية إلى النهاية

3- الطول: أو ما يسمى النظيم رمزه $|\vec{v}|$ أو $\|\vec{v}\|$ ويعبر عن طول القطعة المستقيمة

* متى يتساوى شعاعان؟

عندما تتساوى عناصر الشعاع الأول مع عناصر الشعاع الثاني.

* الارتباط الخطي والاستقلال الخطي:

بفرض $v_1, v_2, v_3, \dots\dots, v_n$

مجموعة من المتجهات في الفضاء $(\mathbb{R}^3)$

نقول أن جملة المتجهات مستقلة خطياً إذا تحقق

مهما تكن

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

تحقق:

$$\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \dots\dots + \lambda_n\vec{v_n} = 0$$

فإن:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots\dots = \lambda_n = 0$$

- إذا وجدنا $\lambda_i \neq 0 \Leftarrow$ أصبحت الجملة مرتبطة خطياً

الارتباط في $\mathbb{R}^2$:

من أجل شعاعين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ نقول أنهما مرتبطان اذا كان لهما نفس المنحى (متوازيان)

طريقة جبرية:

يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ تحقق:

$$\vec{v_2} = \lambda \vec{v_1}$$

عدم التوازي أو عدم وجود علاقة بينهما ⟸ الشعاعين مستقلان

عدم الارتباط = استقلال

الارتباط في $\mathbb{R}^3$:

نفرض $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ و $\vec{v_3}$ أشعة من $\mathbb{R}^3$

* ارتباط أي زوج من الأشعة يؤدي إلى ارتباط الجملة
* عدم ارتباط أي زوج لا يعني عدم ارتباط الجملة بالضرورة

فوجود $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ تحقق:

$$\vec{v_3} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}$$

هنا يؤدي لارتباط الأشعة

$$* \quad \lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \lambda_2 \cdot \vec{v_2} - \vec{v_3} = 0$$

أي أنه يوجد إمّا λ_1 أو λ_2 لا تساوي الصفر

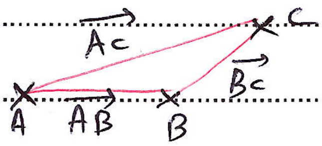
اذاً غير مستقلة فهي مرتبطة

العمليات:

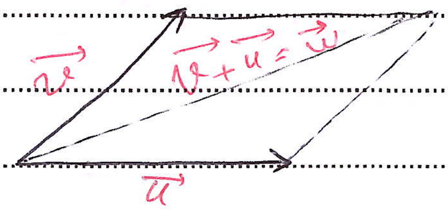
1) الجمع: هي عملية ثنائية داخلية تستقبل شعاعين $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ والناتج شعاع $\vec{v_1} + \vec{v_2}$

طرق الجمع:

1) مثال: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



② قطر متوازي الأضلاع :



$\vec{u}+\vec{v}=$ (عبارة عن قطر متوازي الأضلاع كما في الشكل) $\vec{w}$

2- الجداءات :

* الجداء السلمي (الداخلي) :

هو عبارة عن جداء بين شعاعين والناتج هو عدد حقيقي

أي هو عملية ثنائية منطلقها $V \times V$ حيث V فضاء شعاعي ومستقره $\mathbb{R}$

خواص الجداء السلمي :

1- الجداء السلمي توزيعي :

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

2- الجداء السلمي تبديلي :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

3- لحساب الجداء السلمي لدينا علاقات :

① $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta \qquad \theta(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

② $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|^2$

③ $\vec{u}\cdot\vec{v}=x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z'$

شعاع الواحدة :

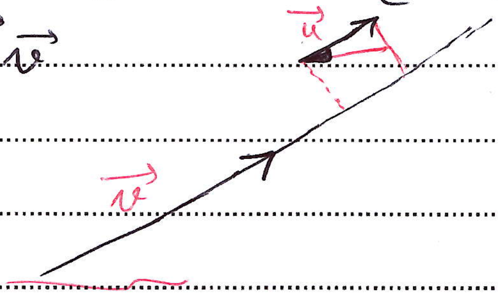
إن شعاع الواحدة لشعاع ما $\vec{v}$ هو شعاع يرتبط خطياً مع $\vec{v}$ ويعطى بالعلاقة :

$$\vec{e}_{\vec{v}}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

إيجاد مسقط شعاع $\vec{u}$ على $\vec{v}$:

إنَّ مسقط الشعاع $\vec{u}$ على $\vec{v}$ يعطى بالعبارة

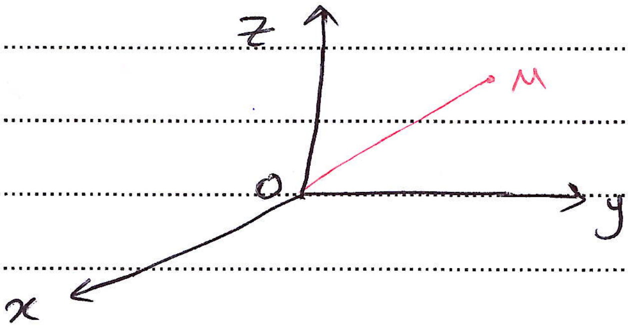
$$u \cdot \vec{e_v}$$



جيوب تمام التوجيه:

نفرض لدينا نقطة $M(x, y, z)$

فإنَّ $\vec{OM}(x, y, z)$



نفرض α زاوية بين $\vec{OM}$ و xx' $\Leftarrow$

$$\vec{OM} \cdot \vec{i} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \cos\alpha$$

$$x = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{|\vec{OM}|}$$

وبنفس الأسلوب نجد:

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{OM}|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{OM}|}$$

* ملاحظة:

طويلة $\vec{OM}$

$$\vec{l_{OM}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

وهنا

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

مبرهنة

من أجل شعاعين $\vec{v}$ و $\vec{w}$ يتحقق الآتي:

1- $|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|$

2- $|\vec{v}+\vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$

3- $|\vec{v}-\vec{w}| \geq |\vec{v}| - |\vec{w}|$

البرهان برهان -1-

1- $\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\theta$

$$\Rightarrow |\vec{v}\cdot\vec{w}| = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot|\cos\theta|$$

$$\leq |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|$$

لأنَّ $|\cos\theta| \leq 1$

برهان -2-

2- $|\vec{v}+\vec{w}|^2 = (\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

$$= |\vec{v}|^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{w} + |\vec{w}|^2$$

$$\leq |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}| + |\vec{w}|^2$$

$$\leq (|\vec{v}|+|\vec{w}|)^2$$

وبجذر الطرفين

$$|\vec{v}+\vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$$

البرهان -3-

$$|\vec{v}| = |\vec{v} - \vec{w} + \vec{w}|$$

$$\leq |\vec{v} - \vec{w}| + |\vec{w}|$$

$$\Rightarrow |\vec{v} - \vec{w}| \geq |\vec{v}| - |\vec{w}|$$

* الجداء ~~[illegible]~~ الخارجي (المتجهي):

إنَّ الجداء الشعاعي (المتجهي) $\vec{u} \times \vec{v}$ أو يكتب $\vec{u} \wedge \vec{v}$

هو عبارة عن شعاع يعامد الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ويعطى بالعلاقة

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$= \left[|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta \right] \cdot \vec{e}_{w} \rightarrow \text{شعاع الواحدة}$$

* توجيه الشعاع $\vec{w}$ بشكل مباشر حسب الثلاثية $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

وقاعدة اليد اليمنى.

* خواص الجداء الشعاعي (الخارجي):

-1- الجداء الخارجي غير تبديلي

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

-2- الجداء الخارجي لشعاعين مرتبطين خطياً هو الشعاع الصفري

-3- عند تعامد $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\Leftarrow$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

-4- من أجل المعلم المتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

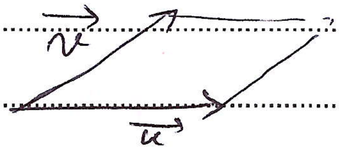
* $\vec{i} \wedge \vec{i} = 0$

* $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

* $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$

* المعنى الهندسي للجداء الخارجي:

إن طول الشعاع $\vec{u}\times\vec{v}$ ما هو إلا مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وهو ضعفي مساحة المثلث.



* الجداء المختلط:

هو جداء بين ثلاث أشعة $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ والناتج عدد حقيقي

يحوي نوعين من الجداءات الداخلي والخارجي

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$$

ملاحظة:

1. $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v})$

2. $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$

* مقارنة بين الجداء الخارجي والمختلط تحليليا:

نفرض $\vec{u}=(x,y,z)$ و $\vec{v}=(x',y',z')$

$\vec{w}(x'',y'',z'')$

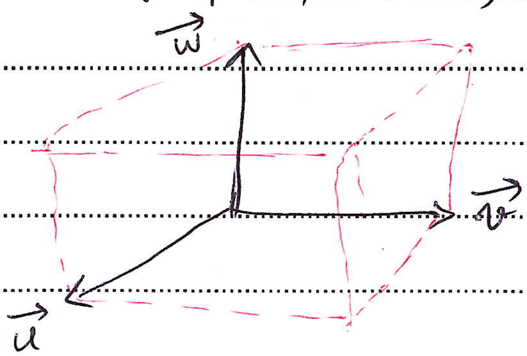
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

* المعنى الهندسي للجداء المختلط:

إنَّ القيمة المطلقة للجداء المختلط تعبّر عن حجم متوازي السطوح المنشأ على الأشعة

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$



ملاحظة

إنَّ ارتباط $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ يكافئ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

ملاحظة:

1) إنَّ انعدام الجداء المختلط يكافئ ارتباط $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

2) ...

* $(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
* $(\vec{u_1} + \vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u_1}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w})$

الجداء المضاعف: (المتجهي)

يعطى بالعلاقة:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

وهو ما يعرف بعلاقة جيبس

برهن صحة العلاقة:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \cdot \vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \cdot \vec{d}$$

الحل:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{b})$$

نفرض $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{u}$

$$= \vec{u} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{u} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{u} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{d}$$

تمرين:

$\vec{V}$ شعاع طويلته $2\sqrt{3}$ يصنع زوايا متساوية مع المحاور

أوجد $\vec{V}$

الحل:

بما أن الزوايا مع المحاور الإحداثية متساوية

$$\alpha = \beta = \gamma$$

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{y}{2\sqrt{3}} = \frac{z}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = y = z$$

$$|\vec{V}| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3x} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{V} = (2, 2, 2)$$