كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي2

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

الفضاء الشعاعي (المتجهي - الخطي)

بنية جبرية غير خالية مزودة بعمليتين وتحقق مجموعة من الشروط ولكل منها البنية الجبرية لها

تعريف:

الفضاء الشعاعي فوق حقل F

حقل F

جداء ⊙ و ⊕ جمع

زمرة ← $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ ...... $(F, +)$ شرط

جداء	جمع
	زمرة تبديلية
داخلية	داخلية
تجميعية	حيادية
تبديلية	تجميعية
حيادي الجداء 1	نظير
نظير ضربي	تبديلية
لكل $x \neq 0$	

الفضاء الشعاعي:

هو مجموعة V من المتجهات (الأشعة) مزودة بعمليتين هما
الجمع "+" والجداء "."
(الجمع الخاص بـ V) ← (جداء سلمي ضرب عدد بشعاع)

الفضاء المتجهي فوق الحقل

شرح

مجموعة المتجهات
V

مجموعة المقادير السلمية
F

بحيث تحقق الشروط التالية:

لأجل كل $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

ولكل $r, s \in F$

"عناصر F تدعى مقادير سلمية"

1- V مغلقة بالنسبة لجمع المتجهات $\vec{u}+\vec{v} \in V$

2- الجمع تبديلي $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$

3- الجمع تجميعي $(\vec{v}+\vec{w})+\vec{u} = \vec{v}+(\vec{w}+\vec{u})$

4- يوجد متجه صفري $\vec{0}$ يحقق ما يلي:

(حيادي الجمع) $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$

5- لكل $\vec{v} \in V$ يوجد نظير جمعي (معكوس)

$\vec{v}+(-\vec{v}) = (-\vec{v})+\vec{v} = \vec{0}$

6- المجموعة V مغلقة بالنسبة لعملية الضرب/الجداء بمقدار سلمي

$r.\vec{v} \in V$

7- الجداء بمقدار سلمي توزيعي بالنسبة لعملية جمع الأشعة (المتجهات)

$r.(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = r.\vec{v}_1 + r.\vec{v}_2$

8- $(r+s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$

9- $(r.s)\vec{v} = r(s.\vec{v})$

10- حيادي الجداء في F يحقق :
(1_F)

$$1_F \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

ملاحظة :

حيادي الجمع في F يحقق $0 \cdot \vec{v} = 0$

ملاحظات :

1- إن الشروط السابقة تحوي نوعين من الجمع ونوعين من الجداء يجب التفريق بينها ضمن السياق الوارد.

2- الشروط من 1 ← 5 تبين وتوضح $(V, +)$ زمرة تبديلية.

تمرين :

وضح أن

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| y = 3x \right\} \in \mathbb{R}^2$$

تشكل فضاء متجهي فوق $\mathbb{R}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والجداء بعدد رسلمي المعرفتين بالشكل :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}$$

1-

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in L$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

ولكن

$$y_1 + y_2 = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2)$$

إذاً

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in L$$

والجمع مغلق في L.

2- الجمع تبديلي وضوحاً.

3- الجمع تجميعي وضوحاً، لأنه جمع أعداد حقيقية.

4- يوجد في L متجه صفري $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ لأن $0 = 3(0) = 0$
يحقق

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5- يوجد لكل عنصر من L نظير جمعي (معكوس)

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L ; \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \in L$$

لأن إذا كان $y = 3x$ فإن $-y = -3x$

$$-y = 3(-x)$$

كما أن

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6-

$$\forall r \in \mathbb{R} , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L$$

$$r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}$$

إذن : $ry = 3(rx)$

لأنّ $y = 3x$ بالتالي $\begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix} \in L$ وبالتالي فإنّ

L مغلقة بالنسبة للجداء بعدد سلمي

-7-

$$\forall \overset{\in \mathbb{R}}{r}, \overset{\in V}{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}, \overset{\in V}{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}} \in L$$

$$r\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = r\left[\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} r(x_1 + x_2) \\ r(y_1 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx_1 + rx_2 \\ ry_1 + ry_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rx_2 \\ ry_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

-8-

$$\forall s \in \mathbb{R} ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L$$

$$(r+s)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r+s)x \\ (r+s)y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} rx + sx \\ ry + sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

-9-

$$\forall\ r, s \in \mathbb{R} ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L$$

$$(r \cdot s)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r \cdot s)x \\ (r \cdot s)y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r \cdot (sx) \\ r \cdot (sy) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix} = r\left[s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

-10-

$$1_{\mathbb{R}} , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L$$

$$1_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{R}}\,x \\ 1_{\mathbb{R}}\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

تعريف:

الفضاء المتجهي الجزئي:

هو مجموعة جزئية من فضاء متجه تشكل بحد ذاتها فضاءً متجهاً تحت نفس العمليات الموروثة من الفضاء الكلي

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x + y + z = 0 \right\}$$

إنَّ P فضاء متجهي جزئي من $\mathbb{R}^3$

TEL:0931497960

مبرهنة:

ليكن $\mathcal{X}$ فضاءً متجهاً فوق الحقل F و $S \subseteq \mathcal{X}$ مجموعة جزئية
نزوّد عمليتي الجمع المتجهي والجداء بمقدار سلمي
عندئذٍ إن الشروط التالية متكافئة

-1- S فضاء جزئي من $\mathcal{X}$

-2- $\forall \vec{S_1}, \vec{S_2} \in S$ و
$r_1, r_2 \in F$

فإن:

$$r_1\vec{S_1} + r_2\vec{S_2} \in S$$

-3-

$\forall \vec{s_1}, \vec{s_2}, \dots\dots, \vec{s_n} \in S$ و
$r_1, r_2, \dots\dots, r_n \in F$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\vec{s_i} \in S$$

مبرهنة:

$(1) \Leftarrow (2) \Leftarrow (3) \Leftarrow (1)$

نستنتج المعيار التالي أنّ أي مجموعة جزئية S من فضاء متجهي فوق F تشكل فضاءً متجهاً جزئياً إذا وفقط إذا تحقق:

$\forall r_1, r_2 \in F$ و $\vec{S_1}, \vec{S_2} \in S$
$\Rightarrow$
$$r_1 \cdot \vec{S_1} + r_2 \cdot \vec{S_2} \in S$$

مثال:

برهن أن S تشكل فضاءً جزئياً

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x - 2y + z = 0 \right\}$$

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S ; \; x - 2y + z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2y - z}$$

يمكن كتابة عناصر S بالشكل

$$\begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

إذاً عناصر S ما هي إلا تراكيب خطية منتهية بالمتجهين $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

التركيب الخطي (Linear combination)

هو مجموع منته لمقادير سلمية مضروبة بمتجهات

* إذاً تصبح المجموعة الجزئية S فضاءً متجهاً جزئياً عندما تكون عبارة عن تراكيب خطية بمتجهات من S

((عندما نكتب عناصرها بشكل تراكيب خطية لمتجهات من S))

مثال:

$$P: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + y + z = 0 \right\}$$

برهن أن P فضاء جزئي

الحل:

$$\forall \vec{S_1}, \vec{S_2} \in S, \ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

$$r_1 \vec{S_1} + r_2 \cdot \vec{S_2} =$$

$$= r_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} r_1 x_1 \\ r_1 y_1 \\ r_1 z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 x_2 \\ r_2 y_2 \\ r_2 z_2 \end{pmatrix} \right]$$

لنتحقق الآن:

$$(r_1 x_1 + r_2 x_2) + (r_1 y_1 + r_2 y_2) + (r_1 z_1 + r_2 z_2)$$

$$= (r_1 x_1 + r_1 y_1 + r_1 z_1) + (r_2 x_2 + r_2 y_2 + r_2 z_2)$$

$$= r_1 (x_1 + y_1 + z_1) + r_2 (x_2 + y_2 + z_2) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 \vec{S_1} + r_2 \vec{S_2} \in P$$

فإن P فضاء متجه جزئي.

الفضاء الممتد (Span):

أو ما يعرف بالإغلاق الخطي لمجموعة جزئية غير خالية S من فضاء متجه ويعرف بأنه مجموعة كل التراكيب الخطية المنتهية لعناصر S.

$S = \{\vec{S_1}, \dots, \vec{S_n}\}$

$[S] = \{c_1\vec{S_1} + c_2\vec{S_2} + \dots + c_n\vec{S_n}\};$ $c_1, \dots, c_n \in F$ ، $S_1, \dots, S_n \in S$

نتيجة:

إن الفضاء الممتد لأي مجموعة جزئية S هو فضاء متجه جزئي.

مثال: أثبت أن الفضاء الممتد للمجموعة $S = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ هو نفسه $\mathbb{R}^2$

الحل:

$[S] = \left\{c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\};$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ، $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \in S$

$[S] \subseteq \mathbb{R}^2$

ونبرهن الآن الاحتواء العكسي

$\mathbb{R}^2 \overset{?}{\subseteq} [S]$

$\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

من أجل c_1 و c_2 ما من $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد

$$x = c_1 + c_2 \quad (1)$$
$$y = c_1 - c_2 \quad (2)$$

نحاول أن نجد

$$2c_1 = x + y \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{x+y}{2}}$$

$$2c_2 = x - y \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{x-y}{2}}$$

إن جملة المعادلات (1) و (2) قابلة للحل وبشكل وحيد بدلالة x, y

وبالتالي

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [S] \quad \text{اذاً} \quad \mathbb{R}^2 \subseteq [S]$$

ومنه $\mathbb{R}^2 = [S]$

مثلاً:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \frac{8}{2} = 4 \quad , \quad c_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

الإستقلال الخطي: ((Linear Independence))

في فضاء متجه V فوق حقل F

نقول عن مجموعة من المتجهات أنها مستقلة خطياً إذا لم نتمكن من كتابة أحد عناصرها كتركيب خطي لباقي العناصر وخلاف ذلك يقال أن $[S]$ مرتبطة خطياً

$$S = \{\vec{S_1}, \vec{S_2}, \dots, \vec{S_n}\}$$

$(\Longleftrightarrow)$

مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا

$$\vec{S_i} = c_1\vec{S_1} + c_2\vec{S_2} + c_3\vec{S_3} + \dots + c_{i-1}\vec{S_{i-1}} + c_{i+1}\vec{S_{i+1}} + \dots + c_n\vec{S_n}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}$$

مبرهنة:

لتكن المجموعة الجزئية S من الفضاء المتجه V فوق الحقل F، إن مجموعة S مجموعة مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان بالإمكان كتابة المتجه الصفري $\vec{0}$ بشكل وحيد كتركيب خطي بعناصر S وبمعاملات جميعها أصفار

$$S = \{S_1, \dots, S_n\}$$

$$\vec{0} = c_1\vec{S_1} + c_2\vec{S_2} + \dots + c_n\vec{S_n}$$

$(\Longleftrightarrow)$

$$c_1 = 0, c_2 = 0, c_n = 0$$

حيث $((\vec{S_i} \neq \vec{S_j}$ عندما $i \neq j))$

الإثبات:

إذا كانت S مرتبطة خطياً عندئذ $\Longleftrightarrow$ و

$\vec{S_i} = c_1\vec{S_1} + \dots + c_{i-1}\vec{S_{i-1}} + c_{i+1}\vec{S_{i+1}} + \dots$

$\dots + c_n\vec{S_n}$

$\Longleftrightarrow$

عند طرح $\vec{S_i}$ من الجهتين ينتج ما يلي

$\vec{0} = c_1 S_1 + c_{i-1}\vec{S_{i-1}} + (-\vec{S_i}) + c_{i+1}\vec{S_{i+1}} + c_n\vec{S_n}$

$\Longleftrightarrow$

يوجد $c_i = -1$ على الأقل لا يساوي الصفر

مثال:

ليكن S_2 فضاء كثيرات الحدود التربيعية بمعاملات من $\mathbb{R}$ فوق عناصر الحقل $\mathbb{R}$

برهن أنه $S = \{1+x, 1-x\}$ مجموعة مستقلة خطياً

$0 + 0x + 0x^2 = c_1(1+x) + c_2(1-x)$

$= (c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)x + 0x^2$

$\left.\begin{matrix} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$

وبالتالي مستقلة خطياً