كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي2

المحاضرة : الاولى/**عملي**/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المحاضرة الأولى (عملي)

السؤال الأول: أوجد مايلي

1) $t = arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

2) $m = arctan(-\sqrt{3}) + arccot(-\sqrt{3})$

3) $n = argsh(0) + argth(\frac{1}{2})$

الحلّ:

1) نعلم بأنّ $arcsinx$ دالة فردية بالتالي $arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

نعلم بأنّ $arccosx$ دالة ليست زوجيه ولنوجد $arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

نضع $y = arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ بالتالي $cosy = -\frac{1}{2}$ بالتالي $cosy = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ عندئذٍ

$$cosy = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

بالتالي $y = \frac{2\pi}{3}$

مما سبق نجد

$$t = arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

2)

نعلم بأنّ $arctanx$ دالة فردية بالتالي $arctan(-\sqrt{3}) = -arctan(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

نعلم بأنّ $arccotx$ دالة ليست زوجية ولنوجد $arccot(-\sqrt{3})$

نضع $y = arccot(-\sqrt{3})$ بالتالي $coty = -\sqrt{3}$ بالتالي $\frac{1}{tany} = -\sqrt{3}$ عندئذٍ

$$tany = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$tany = tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

بالتالي $y = \frac{5\pi}{6}$

مما سبق نجد

$$m=-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

3) $n=argsh(0)+argth(\frac{1}{2})$

نعلم أنّ

$$argshx=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$argthx=\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$n=argsh(0)+argth\left(\frac{1}{2}\right)=ln(1)+\frac{1}{2}ln(3)=\frac{1}{2}ln(3)$$

السؤال الثاني: أوجد مشتقات الدوال التالية:

1. $f(x)=ln(\sqrt{x^2+1})+4^x$
2. $g(x)=e^{arctan(x^2+4)}+sin\left(\frac{x+1}{2x}\right)$
3. $h(x)=(argsh(x^2+x))^3$
4. $R(x)=arccos(\sqrt[3]{x})$

الحل:

1)

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}+4^x\ln(4)=\frac{x}{x^2+1}+4^x\ln(4)$$

2)

$$\acute{g}(x)=\frac{2x}{1+(x^2+4)^2}e^{arctan(x^2+4)}-\frac{1}{2x^2}cos\left(\frac{x+1}{2x}\right)$$

3)

$$\acute{h}(x)=3(argsh(x^2+x))^2\times\frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+x)^2+1}}$$

4)

$$R(x)=-\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}}$$

السؤال الثالث: هل $F(x) = x\,arctanx - \frac{1}{2}ln(x^2+1)$ دالة أصلية للتابع $f(x) = arctanx$ على $I = \mathbb{R}$

الحلّ: $\acute{F}(x) = arctanx + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2} = arctanx = f(x)$

بالتالي الدالة $F(x)$ اشتقاقية على $\mathbb{R}$ و $\acute{F}(x) = f(x)$ بالتالي $F(x)$ دالة أصلية للتابع $f(x) = arctanx$ على $I = \mathbb{R}$

السؤال الرابع: أوجد دالة أصلية للتابع $f(x) = \pi + arctanx$ تنعدم عند العدد 1

الحل: مجموعة الدوال الأصلية للتابع $f(x)$ هي

$$F_C(x) = \pi x + x\,arctanx - \frac{1}{2}ln(x^2+1) + c$$

بما أنّ $F_c(1) = 0$ بالتالي $\pi + arctan(1) - \frac{1}{2}ln(2) + c = 0$ بالتالي

$$c = -\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}ln(2)$$

الدالة الأصلية المطلوبة هي

$$g(x) = \pi x + x\,arctanx - \frac{1}{2}ln(x^2+1) - \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}ln(2)$$

السؤال الخامس: أنجز التكاملات التالية

$$I_1 = \int x(x+1)(x-2)dx, \qquad I_2 = \int \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\right)dx, \qquad I_3 = \int \left(\frac{2}{3\sqrt{x}} + e^{3x} + (11)^x\right)dx$$

$$I_4 = \int \left(sin2x + \frac{1}{cos^2 3x} + \frac{3}{1+x^2}\right)dx, \qquad I_5 = \int \frac{dx}{chx - shx}, \qquad I_6 = \int \frac{-x-1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

الحل:

$$I_1 = \int x(x+1)(x-2)dx = \int (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + c$$

$$I_2 = \int \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

$$I_3 = \int \left(\frac{2}{3\sqrt{x}} + e^{3x} + (11)^x\right)dx = \int \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}} + e^{3x} + (11)^x\right)dx$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{(11)^x}{ln(11)} + c$$

$$I_4 = \int \left(sin2x + \frac{1}{cos^2 3x} + \frac{3}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{3}tan3x + 3arctan(x) + c$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{chx - shx} = \int \frac{chx + shx}{ch^2x - sh^2x}dx = \int (chx + shx)dx = shx + chx + c$$

$$I_6=\int\frac{-x-1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int(2x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$$

$$=-\sqrt{1+x^2}-ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$$

السؤال السادس: أنجز التكاملات التالية

$$I_1=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx,\qquad I_2=\int\frac{arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\qquad I_3=\int\frac{dx}{(1+x^2)\left(arctan(x)\right)^3}$$

$$I_4=\int\left(cotx+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx,\qquad I_5=\int\frac{dx}{sinx}$$

الحلّ:

$$I_1=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\frac{1}{2}\int(2x+2)(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\times\frac{(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=\sqrt{x^2+2x+3}+c$$

$$I_2=\int\frac{arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}arcsin(x)\,dx=\frac{\left(arcsin(x)\right)^2}{2}+c$$

$$I_3=\int\frac{dx}{(1+x^2)\left(arctan\,(x)\right)^3}=\int\frac{(arctan\,x)^{-3}}{(1+x^2)}dx=\frac{\left(arctan(x)\right)^{-2}}{-2}+c$$

$$=-\frac{1}{2\left(arctan(x)\right)^2}+c$$

$$I_4=\int\left(cotx+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\int\left(\frac{cosx}{sinx}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx=ln|sinx|+ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$$

$$I_5=\int\frac{dx}{sinx}=\int\frac{dx}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\int\left(\frac{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2cos\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)dx=-\int\frac{-\frac{1}{2}sin\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx+\int\frac{\frac{1}{2}cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx$$

$$=-ln\left|cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+ln\left|sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c=ln\left|\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+c=ln\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

السؤال السابع: أنجز التكاملات التالية

$$I_1=\int\frac{dx}{1-cosx},\qquad I_2=\int x\sqrt{1-x}\,dx,\qquad I_3=\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\ dx$$

$$I_4=\int\frac{7}{1+x^2}e^{\arctan x}\,dx,\quad I_5=\int\frac{dx}{e^{2x}+1},\qquad I_6=\int\frac{dx}{e^{-x}+\pi},$$

$$I_7=\int\frac{sh4x}{3+ch4x}dx$$

$$I_8=\int\frac{dx}{1-chx}$$

الحلّ:

$$I_1=\int\frac{dx}{1-cosx}=\int\frac{(1+cosx)dx}{1-cos^2x}=\int\frac{(1+cosx)}{sin^2x}dx=\int\left(\frac{1}{sin^2x}+\frac{cosx}{sin^2x}\right)dx$$
$$=-cotx-\frac{1}{sinx}+c$$

$$I_2=\int x\sqrt{1-x}\,dx=-\int -x\sqrt{1-x}\,dx=-\int(1-x-1)\sqrt{1-x}\,dx$$
$$=-\int(1-x)\sqrt{1-x}\,dx+\int\sqrt{1-x}\,dx=-\int(1-x)^{\frac{3}{2}}dx+\int(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{(1-x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}+c$$

$$I_3=\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\ dx=\int\sqrt{xx^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}}\ dx=\int\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}\ dx=\int x^{\frac{7}{8}}\ dx=\frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1}+c$$
$$=\frac{8}{15}x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}+c$$

$$I_4=\int\frac{7}{1+x^2}e^{\arctan x}\,dx=7\int\frac{1}{1+x^2}e^{\arctan x}\,dx=7e^{\arctan x}+c$$

$$I_5=\int\frac{dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+1}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x}+1}dx=-\frac{1}{2}ln|e^{-2x}+1|+c$$
$$=-\frac{1}{2}ln(e^{-2x}+1)+c$$

$$I_6=\int\frac{dx}{e^{-x}+\pi}=\int\frac{e^x}{\pi e^x+1}dx=\frac{1}{\pi}\int\frac{\pi e^x}{\pi e^x+1}dx=\frac{1}{\pi}ln|\pi e^x+1|+c$$
$$=\frac{1}{\pi}ln(\pi e^x+1)+c$$

$$I_7=\int\frac{sh4x}{3+ch4x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4sh4x}{3+ch4x}dx=\frac{1}{4}ln|3+ch4x|+c=\frac{1}{4}ln(3+ch4x)+c$$

$$I_8=\int\frac{dx}{1-chx}=\int\frac{1+chx}{1-ch^2x}dx=\int\frac{1+chx}{1-ch^2x}dx=-\int\frac{1+chx}{sh^2x}dx$$
$$=\int\left(-\frac{1}{sh^2x}-chx(shx)^{-2}\right)dx=cthx-\frac{(shx)^{-2+1}}{-2+1}+c=cthx+\frac{1}{shx}+c$$
