كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : فيزياء احصائية

المحاضرة:الاولى/نظري/ +الملحق د.علي اسد

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

المبادئ الأساسية في الاحتمالات والإحصاء

مفهوم الاحتمال: Probability

ليكن x متحول عشوائي و Ω فضاء العينة المعطى بالشكل: $\Omega=\{x_1,x_2,.........x_{n-1},x_n\}$

نفرض $n(x)$ عدد مرات ظهور الحدث x عند إجراء تجربة ما عدد محدود من المرات قدره N مرة.

ندعو المقدار $\dfrac{n(x)}{N}$ بتواتر ظهور الحدث x.

يتحول التواتر إلى احتمال عند إجراء التجربة عدد لانهائي من المرات. ونصوغ ذلك بالعبارة:

$$\boxed{p(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{n(x)}{N}\qquad ;\ 0\le p(x)\le 1}$$

قاعدة 1: احتمال اجتماع مجموعة أحداث يساوي مجموعة احتمالات الحدوث

$$p(\cup x_i)=\sum_i p(x_i)$$

قاعدة 2: احتمال تقاطع مجموعة أحداث يساوي مجموع جداء احتمالات الحدوث

$$p(\cap x_i)=\prod_i p(x_i)$$

قاعدة الـ ($n\,.\,m$): ليكن A و B حدثين مستقلين وكان $p(A)=n$ و $p(B)=m$ عندئذٍ نكتب

$$\boxed{p(A\cap B)=p(A).p(B)=n.m}$$

مثال: عند رمي حجر نرد ثلاث مرات متتالية، أو عند رمي ثلاث حجارة مرة واحدة. نلاحظ أن الأحداث مستقلة (لايؤثر ظهور رقم على أحدها في ظهور بقية الأرقام على الأخرى). فما هو احتمال ظهور مجموعة الأرقام التالية (1,1,1)

$$p(A\cap B\cap C)=p(A).p(B).p(C)=\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$

مثال: لدينا ثلاث مدن (A,B,C)، ويوجد ثلاث طرق للوصول من A إلى B ، وأربع طرق للوصول من B إلى C .

فيكون عدد طرق الوصول من A إلى C هو $N=n.m=3.4=12$

تابعي التوزع والكثافة:

1- حالة التوزع المنفصل: نفرض x متحول عشوائي يأخذ قيم منفصلة، وليكن $W(x)$ تابع التوزع المفروض.

فإذا أمكننا كتابة $W(x)$ بالشكل التالي: $W(x)=\sum_x \omega(x)$ عندئذٍ ندعو $\omega(x)$ تابع كثافة توزع الحالة المنفصلة.

2- حالة التوزع المستمر: نفرض x متحول عشوائي يأخذ قيم متصلة، وليكن $F(x)$ تابع التوزع المفروض.

فإذا أمكننا كتابة $F(x)$ بالشكل التالي: $F(x)=\int_x f(x)\,dx$ عندئذٍ ندعو $f(x)$ تابع كثافة توزع الحالة المستمرة.

تابعي التوزع والكثافة الاحتماليين:

يُدعى تابع توزع الحالتين (المنفصلة والمستمرة)، تابع توزع احتمال إذا حقق الشرط الواحدي. ويُدعى حينئذٍ تابع كثافته بتابع الكثافة الاحتمالي. كما يلي:

$$\boxed{F(x)=\int_x f(x)\,dx=1}\qquad\qquad \boxed{W(x)=\sum_x \omega(x)=1}$$

الشروط الرياضية لتابع كثافة الاحتمال:

1- أن يكون مستمر ومعين وقابل للاشتقاق في كل نقطة من مجال التعريف. وإذا وجد عدد محدود من نقاط عدم التعيين، فيعامل عندئذٍ معاملة التابع المستمر.

2- أن يكون موجب (متزايد).

3- أن يحق الشرط الواحدي.

قاعدة التراتيب: Permutations

لإيجاد عدد طرق ترتيب (تباديل مرتبة) لـ n عنصر مأخوذاً منهم r عنصر في كل مرة نستخدم العلاقة التالية:

$$\boxed{P_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2).........(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}=n(n-1)(n-2).........(n-r+1)}$$

مثال: أوجد (مع التمثيل) عدد طرق تنضيد الحروف (A,B,C) مأخوذاً حرفاً حرفاً في المرة الأولى، وحرفين حرفين في الثانية وثلاثة حروف في الثالثة.

من أجل حرف حرف
$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1^3=\frac{3!}{(3-1)!}=3 \quad \Leftrightarrow \quad \{A,B,C\}$$

من أجل حرفين حرفين
$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_2^3=\frac{3!}{(3-2)!}=6 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} AB, AC, BC \\ BA, CA, CB \end{array}\right\}$$

من أجل ثلاثة حروف
$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=3 \end{array}\right\} \Rightarrow P_3^3=\frac{3!}{(3-3)!}=6 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} ABC, BCA, CAB \\ CBA, ACB, BAC \end{array}\right\}$$

يلاحظ هنا أن الترتيب مهم، حيث نحصل على مجموعة جديدة عند أي تبديل بين عنصرين من مكوناتها.

مثال: أوجد عدد الكلمات المكونة من ثلاثة أحرف، التي يمكن تشكيلها من الحروف (م، ل، ح).
$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=3 \end{array}\right\} \Rightarrow P_3^3=\frac{3!}{(3-3)!}=3!=6 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} \text{ملح} & \text{حمل}, & \text{محل}, \\ \text{حلم} & \text{لحم}, & \text{لمح}, \end{array}\right\}$$

قاعدة التوافيق: Combinations

لإيجاد عدد طرق تباديل n عنصر متمايز مأخوذاً منهم r عنصر في كل مرة نستخدم العلاقة التالية:
$$\boxed{C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{P_r^n}{r!}}$$
نلاحظ هنا أنه ليس لترتيب العناصر أهمية ضمن المجموعة الواحدة

مثال: أوجد (مع التمثيل) عدد طرق انتخاب وفد من بين ثلاثة أعضاء مرشحين (A,B,C) في الحالات التالية: الوفد مكون من عضو واحد ، الوفد مكون من عضوين، الوفد مكون من ثلاثة أعضاء.

من أجل عضو واحد
$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=1 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1^3=\frac{3!}{1!(3-1)!}=3 \quad \Leftrightarrow \quad \{A,B,C\}$$

من أجل عضوين
$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=2 \end{array}\right\} \Rightarrow C_2^3=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3 \quad \Leftrightarrow \quad \{AB, AC, BC\}$$

من أجل ثلاثة أعضاء
$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=3 \end{array}\right\} \Rightarrow C_3^3=\frac{3!}{3!(3-3)!}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \{ABC\}$$

مثال: يُراد تشكيل لجنة مكونة من 5 أشخاص من بين 8 رجال و 6 سيدات. والمطلوب:
1- أوجد عدد طرق التشكيل بغض النظر عن الاسم والجنس.
2- أوجد عدد طرق التشكيل إذا اقتضت الضرورة وجود 3 رجال وسيدتين في اللجنة بغض النظر عن الاسم.

الحل: 1- نطبق عبارة التوافيق بحيث نختار 5 أشخاص من 14 شخص
$$\binom{14}{5}=\frac{14!}{5!(14-5)!}=\frac{14!}{5!\,9!}=2002$$

2- عدد طرق اختيار 3 رجال من 8 رجال
$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8!}{3!\,5!}=56$$

عدد طرق اختيار سيدتين من 6 سيدات
$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{6!}{2!\,4!}=15$$

فيكون عدد طرق تشكيل اللجنة $N=56\times15=840$

قاعدة التباديل ذات التوزع المسبق: لإيجاد عدد طرق تباديل N عنصر موزعة مسبقاً على m مجموعة بالشكل
$$N=\sum_{i=1}^{m} n_i=n_1+n_2+\dots\dots\dots+n_{m-1}+n_m$$

نستخدم العلاقة التالية:

$$\boxed{w = C^{N}_{n_1,n_2,....n_m} = \binom{N}{n_1!n_2!.......n_m!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{m} n_i!} = \frac{N!}{n_1!n_2!.......n_m!}}$$

البرهان: نطبق قاعدة التوافيق (التباديل غير المرتبة).

عدد طرق اختيار المجموعة الأولى (المكونة من n_1 عنصر) من أصل m مجموعة:

$$w_1 = C^{N}_{n_1} = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}$$

عدد طرق اختيار المجموعة الثانية (المكونة من n_2 عنصر) من أصل الباقي $(m-1)$ مجموعة:

$$w_2 = C^{N-n_1}_{n_2} = \binom{N-n_1}{n_2} = \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!}$$

عدد طرق اختيار المجموعة الثالثة (المكونة من n_3 عنصر) من أصل الباقي $(m-2)$ مجموعة:

$$w_3 = C^{(N-n_1-n_2)}_{n_3} = \binom{N-n_1-n_2}{n_3} = \frac{(N-n_1-n_2)!}{n_3!(N-n_1-n_2-n_3)!}$$

وهكذا ... عدد طرق اختيار المجموعة المتبقية الأخيرة رقم m (المكونة من n_m عنصر):

$$w_m = C^{(N-n_1-n_2....-n_{m-1})}_{n_m} = \binom{N-n_1-n_2....-n_{m-1}}{n_m} = \frac{(N-n_1-n_2....-n_{m-1})!}{n_m!(N-n_1-n_2....-n_{m-1}-n_m)!} = \frac{n_m!}{n_m!\,0!} = 1$$

وبما أن طرق الاختيار منفصلة (مستقلة) يكون عدد طرق الاختيار الإجمالي:

$$w = w_1 w_2 w_3 ... w_m = \frac{N!}{n_1!\cancel{(N-n_1)!}} \frac{\cancel{(N-n_1)!}}{n_2!\cancel{(N-n_1-n_2)!}} \frac{\cancel{(N-n_1-n_2)!}}{n_3!\cancel{(N-n_1-n_2-n_3)!}} ..... \frac{\cancel{n_m!}}{n_m!\,0!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{m} n_i!}$$

مثال: أوجد عدد طرق توزع 4 كتب مختلفة A,B,C,D على 3 طلاب بحيث يأخذ الأول كتابان، والثاني كتاب واحد، والثالث كتاب واحد.

$$P^{4}_{2,1,1} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (AB,C,D),(AC,B,D),(AD,B,C),(BC,A,D),(BD,A,C),(CD,A,B), \\ (AB,D,C),(AC,D,B),(AD,C,B),(BC,D,A),(BD,C,A),(CD,B,A), \end{Bmatrix}$$

مثال: أوجد عدد طرق توزع 10 كتب مختلفة على 3 طلاب بحيث يأخذ الأول 4 كتب، والثاني كتاب واحد، والثالث 5 كتب.

$$P^{10}_{4,1,5} = \frac{10!}{4!\,1!\,5!} = 1260$$

مثال: أوجد عدد طرق توزع 10 طلاب على 4 قاعات إذا علمت أن القدرة الاستيعابية للقاعة الأولى طالب واحد فقط والقاعة الثانية طالبان اثنان فقط والثالثة ثلاث طلاب والرابعة أربع طلاب.

$$P^{10}_{1,2,3,4} = \frac{10!}{1!\,2!\,3!\,4!} = 12600$$

مثال: أوجد عدد طرق التباديل الممكنة لحروف كلمة إحصاء في اللاتينية Statistiques

الحل: عدد حروف الكلمة $n=12$. وبما أنها موزعة مسبقاً على مجموعات من الأحرف المتماثلة بالشكل:

$$(S=3,\ t=3,\ a=1,\ i=2,\ q=1,\ u=1,\ e=1)$$

$$P^{12}_{3,3,1,2,1,1,1} = \frac{12!}{3!\,3!\,1!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 6652800$$

القيمة الوسطى (التوقع الرياضي):

1- حالة التوزع المنفصل:

تحسب القيمة الوسطى لمتحول عشوائي منفصل $\bar{x}$ تابع كثافته $\omega(x)$ بالعلاقة $\bar{x}=\dfrac{\sum_{x} x\,\omega(x)}{\sum_{x}\omega(x)}$ وإذا كان $\omega(x)$ تابع كثافة احتمال، أي يحقق الشرط الواحدي $\sum_{x}\omega(x)=1$، فتحسب قيمة $\bar{x}$ بالشكل التالي: $\boxed{\bar{x}=\sum_{x} x\,\omega(x)}$

2- حالة التوزع المستمر:

تحسب القيمة الوسطى لمتحول عشوائي مستمر $\bar{x}$ تابع كثافته $f(x)$ بالعلاقة $\bar{x}=\dfrac{\int_{x} x\; f(x)\,dx}{\int_{x} f(x)\,dx}$ وإذا كان $f(x)$ تابع كثافة احتمال، أي يحقق الشرط الواحدي $\int_{x} f(x)\,dx=1$، فتحسب قيمة $\bar{x}$ بالشكل التالي: $\boxed{\bar{x}=\int_{x} x\; f(x)\,dx}$

خواص القيمة الوسطى:

1- القيمة الوسطى لعدد ثابت هي مقدار ثابت. $\bar{A}=A=cte$

2- القيمة الوسطى لمتحول عشوائي هي مقدار ثابت. $\bar{\bar{x}}=cte$

3- القيمة الوسطى لمجموع متحولات عشوائية يساوي مجموع قيمها الوسطى. $\overline{x+y+z}=\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$

4- القيمة الوسطى لجداء متحولات عشوائية يساوي جداء قيمها الوسطى. $\overline{x.y.z}=\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$

الانحراف عن القيمة الوسطى: ويمثل بُعد المتحول العشوائي بالقيمة المطلقة عن القيمة الوسطى ويعطى بالعلاقة:

في حالة التوزع المنفصل $\Delta x_i=|x_i-\bar{x}_i|$ ، وفي حالة التوزع المستمر $\Delta x=|x-\bar{x}|$

وسطى الانحراف عن القيمة الوسطى: يُحسب من تعريف القيمة الوسطى:

1- في حالة التوزع المنفصل: $\overline{\Delta x}=\dfrac{\sum_{x}\Delta x\;\omega(x)}{\sum_{x}\omega(x)}$ وإذا كان $\omega(x)$ تابع كثافة احتمال، يصبح الوسطي بالشكل:

$$\overline{\Delta x}=\sum_{x}\Delta x\;\omega(x)=\sum_{x}(x_i-\bar{x})\;\omega(x)=\underbrace{\sum_{x} x_i\;\omega(x)}_{\bar{x}}-\bar{x}\underbrace{\sum_{x}\omega(x)}_{1}=\bar{x}-\bar{x}=0$$

1- في حالة التوزع المستمر: $\overline{\Delta x}=\dfrac{\int_{x}\Delta x\;f(x)\,dx}{\int_{x} f(x)\,dx}$ وإذا كان $f(x)$ تابع كثافة احتمال، يصبح الوسطي بالشكل:

$$\overline{\Delta x}=\int_{x}\Delta x\;f(x)\,dx=\int_{x}(x-\bar{x})\;f(x)\,dx=\underbrace{\int_{x} x\;f(x)\,dx}_{\bar{x}}-\bar{x}\underbrace{\int_{x} f(x)\,dx}_{1}=\bar{x}-\bar{x}=0$$

نستنتج مما سبق أن البارامتر الإحصائي (وسطي الانحراف عن القيمة الوسطى $\overline{\Delta x}$) لايعطي أي قيمة مضافة للتوزع. لذا لابد من تعريف بارامتر جديد يفيد في معرفة الخواص الإحصائية للجملة المدروسة.

التشتت (وسطى القيمة التربيعية للانحراف): $\overline{\Delta x^2}$

يعطى التشتت بدلالة الفرق بين وسطي القيمة التربيعية للمتحول $\overline{x^2}$ (الانحراف المعياري) ومربع القيمة الوسطى $\bar{x}^2$ بالشكل التالي:

$$\overline{\Delta x^2}=\overline{(x-\bar{x})^2}=\overline{(x^2-2\,x\,\bar{x}+\bar{x}^2)}=\overline{x^2}-\overline{2\,x\,\bar{x}}+\overline{\bar{x}^2}=\overline{x^2}-2\,\bar{x}^2+\bar{x}^2\;\Rightarrow\;\boxed{\overline{\Delta x^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2}$$

يُحسب وسطي القيمة التربيعية (الانحراف المعياري) بطريقة القيمة الوسطى من أجل توزع منفصل أو مستمر لتابع توزع احتمال بالشكل:

$\overline{x^2}=\sum_{x} x^2\;\omega(x)$ للمنفصل . و $\overline{x^2}=\int_{x} x^2\;f(x)\,dx$ للمستمر.

مثال: أوجد قيمة الثابت C ليكون $f(x)$ تابع كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة المقادير التالية: $\bar{x}$ و $\overline{x^2}$ و $\overline{\Delta x^2}$.

علماً أن $f(x)=C\,e^{-x}\;\;;\;x\geq 0$

الحل: لكي يكون $f(x)$ تابع كثافة احتمال يجب أن يحقق الشرط الواحدي

$$\int_0^\infty C e^{-x} dx = 1 \Rightarrow -C\left[e^{-x}\right]_0^\infty = 1 \Rightarrow -C(0-1) = 1 \Rightarrow C = 1$$

القيمة الوسطى $\bar{x} = \int_0^\infty x e^{-x} dx = \Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1$ ، والانحراف المعياري $\overline{x^2} = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1.\Gamma(1) = 2$

فيكون التشتت $\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 2 - 1 = 1$

دراسة بعض التوزعات الخاصة:

توزع برنولي:

يُعطى تابع توزع برنولي بالاعتماد على قاعدة منشور ثنائي الحد لنيوتن

$$\boxed{(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}} \qquad ; \binom{N}{n} = C_n^N == \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{P_n^N}{n!}$$

يمكن منها استنتاج المتطابقات الشهيرة (مربع مجموع حدين) و (مكعب مجموع حدين) و ....

مثال: أوجد منشور ثنائي حد نيوتن من أجل $N = 5$.

$$(p+q)^5 = \binom{5}{0} p^0 q^5 + \binom{5}{1} p^1 q^4 + \binom{5}{2} p^2 q^3 + \binom{5}{3} p^3 q^2 + \binom{5}{4} p^4 q^1 + \binom{5}{5} p^5 q^0$$
$$= q^5 + 5p\, q^4 + 10 p^2 q^3 + 10 p^3 q^2 + 5 p^4 q + p^5$$

يُعطى تابع كثافة توزع برنولي بالعلاقة:

$$\boxed{\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \qquad ; n \le N}$$

حيث $p \le 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q \le 1$ لأن $q = 1 - p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N-n)$ مرة من أصل N مرة.

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد لـ نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{N} \omega(n) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = (p+1-p)^N = 1$$

- إيجاد $\bar{n}$:

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N} n \underbrace{\binom{N}{n} p^n q^{N-n}}_{\omega(n)} = \bar{n} \Rightarrow \boxed{\bar{n} = Np}$$

- إيجاد $\overline{n^2}$:

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\bar{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^{N} n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np + N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2 \underbrace{\binom{N}{n} p^n q^{N-n}}_{\omega(n)} = \overline{n^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^2} = Np + N^2 p^2 - Np^2}$$

- إيجاد $\overline{\Delta n^2}$: نعوض في العبارة

$$\boxed{\overline{\Delta n^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = Np + N^2 p^2 - Np^2 - N^2 p^2 = Np(1-p) = Npq = \bar{n}\, q}$$

مثال: تلقى قطعة نقدية معدنية أربع مرات متتالية، أو تلقى أربع قطع نقدية معدنية متمايزة معاً.

المطلوب: 1- احسب أعداد كافة الأحداث الممكنة.

2- احسب احتمالات وقوع كافة الأحداث الممكنة.

الحل: نرتب النتائج الممكنة بالشكل التالي (n_H, n_T) حيث يشير n_H لعدد مرات ظهور الصورة و n_T لعدد مرات ظهور الكتابة. فنحصل على فضاء العينة التالي: $\{(4_H,0_T),(0_H,4_T),(3_H,1_T),(1_H,3_T),(2_H,2_T)\}$.

و هو يعبر عن العدد الجهري لحالات التوزع الممكنة (عدد حالات التوزع الماكروية الممكنة).

نحسب عدد الحالات الميكروية الموافقة لكل حالة توزع ماكروية ممكنة على حدة باستخدام قاعدة التراتيب مسبقة التوزع. ونمثلها بالمساقط المعبرة عن الصورة H أو الكتابة T الظاهرة على كل قطعة نقدية كما يلي:

$$P^4_{4H,0T} = \frac{4\,!}{4!\,0!} = 1 \Leftrightarrow \{(H,H,H,H)\}$$

$$P^4_{0H,4T} = \frac{4\,!}{0!\,4!} = 1 \Leftrightarrow \{(T,T,T,T)\}$$

$$P^4_{3H,1T} = \frac{4\,!}{3!\,1!} = 4 \Leftrightarrow \{(H,H,H,T),(H,H,T,H),(H,T,H,H),(T,H,H,H)\}$$

$$P^4_{1H,3T} = \frac{4\,!}{1!\,3!} = 4 \Leftrightarrow \{(T,T,T,H),(T,T,H,T),(T,H,T,T),(H,T,T,T)\}$$

$$P^4_{2H,2T} = \frac{4\,!}{2!\,2!} = 6 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}(T,T,H,H),(T,H,T,H),(H,T,H,T)\\(H,H,T,T),(T,H,H,T),(H,T,T,H)\end{Bmatrix}$$

نلاحظ أن العدد الإجمالي للحالات الميكروية (المجهرية) هو 16 حالة. كما هو موضح على فضاء العينة:

$$\left\{\underbrace{(4_H,0_T)}_{1},\underbrace{(0_H,4_T)}_{1},\underbrace{(3_H,1_T)}_{4},\underbrace{(1_H,3_T)}_{4},\underbrace{(2_H,2_T)}_{6}\right\}$$

2- لحساب احتمالات وقوع كافة الأحداث الممكنة:

نفرض $P(n)$ احتمال حدث ظهور الصورة H عدد $n = 0,1,2,3,4$ من المرات

فيكون $q(n)$ احتمال حدث ظهور الكتابة T عدد $n = 0,1,2,3,4$ من المرات

ونظراً لتناظر أوجه القطع النقدية المتمايزة فتكون الاحتمالات متساوية $P(n) = q(n) = 1/2$.

وحيث أن الأحداث مستقلة (لاتؤثر نتيجة إلقاء إحداها على نتائج إلقاء البقية) نعتبر عدد مرات الإلقاء $N = 4$ وبتطبيق تابع كثافة برنولي التالي نجد أن:

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n\, q^{N-n} \qquad ; (n = 0,1,2,3,4) \le N = 4 \qquad \wp \qquad P = q = \frac{1}{2}$$

احتمال ظهور الصورة صفر مرة يساوي احتمال ظهورها أربع مرات. والعكس صحيح بالنسبة للكتابة.

$$\omega(0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{4!}{0!(4-0)!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = \omega(4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{4-4}$$

احتمال ظهور الصورة مرة واحدة يساوي احتمال ظهورها ثلاث مرات. والعكس صحيح بالنسبة للكتابة.

$$\omega(1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{4!}{1!(4-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \omega(3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}$$

احتمال ظهور الصورة مرتين يساوي احتمال ظهور الكتابة مرتين

$$\omega(2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = \omega(2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}$$

فنجد مجموع احتمالات الظهور لكلٍ من الصورة والكتابة على حدة

$$\sum_{n=0}^{4}\omega(n) = 2\frac{1}{16} + 2\frac{4}{16} + \frac{6}{16} = 1$$

تابع توزع بواسون:

يُعطى تابع توزع بواسون بالعلاقة: $W(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{x!}e^{-a} \quad ; 0\le x<\infty \quad \wp \quad a=cte$

نعرف تابع كثافة توزع بواسون بالعلاقة:

$$\omega(x)=\frac{a^x}{x!}e^{-a} \quad ; 0\le x<\infty$$

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي:

$$\sum_{x=0}^{\infty}\omega(x)=e^{-a}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{x!}=e^{-a}\,e^{+a}=1 \qquad ;\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{x!}=1+a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+.......+\frac{a^x}{x!}+.....=e^{+a}$$

- إيجاد $\bar{X}$:

$$\bar{x}=\sum_{x=0}^{\infty}x\,\omega(x)=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{a^x}{x!}e^{-a}=0+e^{-a}\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{a^x}{x!}=e^{-a}\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{a\,a^{x-1}}{x(x-1)!}=a\,e^{-a}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{a^{x-1}}{(x-1)!}=a\,e^{-a}\,e^{+a}=a$$

- إيجاد $\overline{x^2}$:

$$\overline{x^2}=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\,\omega(x)=0+\sum_{x=1}^{\infty}x^2\frac{a^x}{x(x-1)!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{a^x}{(x-1)!}$$

$$=e^{-a}\left[\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{a^x}{(x-1)!}-\sum_{x=1}^{\infty}\frac{a^x}{(x-1)!}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{a^x}{(x-1)!}\right]=e^{-a}\left[\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)\frac{a^x}{(x-1)!}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{a^x}{(x-1)!}\right]$$

$$=e^{-a}\left[0+\sum_{x=2}^{\infty}(x-1)\frac{a^x}{(x-1)!}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{a^x}{(x-1)!}\right]=e^{-a}\left[\sum_{x=2}^{\infty}\frac{a^2\,a^{x-2}}{(x-2)!}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{a\,a^{x-1}}{(x-1)!}\right]$$

$$=e^{-a}\left[a^2\sum_{x=2}^{\infty}\frac{a^{x-2}}{(x-2)!}+a\sum_{x=1}^{\infty}\frac{a^{x-1}}{(x-1)!}\right]=e^{-a}\left[a^2\,e^{+a}+a\,e^{+a}\right]=e^{-a}\,e^{+a}\left[a^2+a\right]=a^2+a$$

- إيجاد $\overline{\Delta x^2}$: نعوض في العبارة

$$\overline{\Delta x^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2=a^2+a-a^2=a$$

تابع توزع غوص الطبيعي:

يُعطى تابع توزع غوص بالعلاقة: $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha x^2}dx \quad ; -\infty<x<+\infty$

فيكون تابع كثافة توزع غوص: $; -\infty<x<+\infty \quad f(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha x^2}$ وتمثيله كما بالشكل ( )

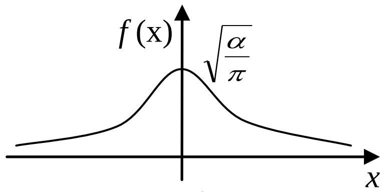
وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\,dx=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;2\int_{0}^{+\infty}x^0\,e^{-\alpha x^2}\,dx=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=1$$

- إيجاد $\bar{X}$: $\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{-\alpha x^2}\,dx=0$

- إيجاد $\overline{x^2}$: $\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;2\int_{0}^{+\infty}x^2\,e^{-\alpha x^2}\,dx=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;2\,\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}=\frac{1}{2\alpha}$

- إيجاد $\overline{\Delta x^2}$: نعوض في العبارة $\boxed{\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 1/2\alpha}$



شكل ( )

العلاقة بين التوزعات:

- **استنتج من برنولي (باستخدام التقريبات المناسبة) تابع كثافة بواسون.**

لإيجاد تابع كثافة توزع بواسون من كثافة برنولي نفرض التقريب التالي: $n << N$ الموافق لـ $p << 1$
نوجد القيمة التقريبية للتوافيق

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)(N-2).......(N-n+1)(N-n)!}{n!(N-n)!} \approx \frac{N.N.N.......N}{n!} = \frac{N^n}{n!}$$

كما نوجد قيمة المقدار q^{N-n}

$$Ln q^{N-n} = (N-n)\,Ln(1-p) \approx -N\,p \quad ;\; p << 1 \quad \Rightarrow \quad q^{N-n} \approx e^{-Np}$$

بالتعويض في كثافة برنولي نجد:

$$\omega(n) \approx \frac{N^n}{n!}\,p^n\,e^{-Np} = \frac{(Np)^n}{n!}\;e^{-Np}$$

وهذا يطابق تابع كثافة توزع بواسون (بفرض أن $a = Np$) المعطى بالصيغة

$$\omega(n) \approx \frac{a^n}{n!}\;e^{-a} \qquad ; 0 \le n < \infty$$

- **استنتج من بواسون (باستخدام التقريبات المناسبة) تابع كثافة غوص الطبيعي.**

لإيجاد تابع كثافة توزع غوص الطبيعي ننشر لغارتم تابع كثافة توزع بواسون باستخدام منشور تايلور بجوار القيمة الوسطى $\bar{x} = a$. ونكتفي بالحدود الثلاثة الأولى من المنشور فقط.

$$Ln\,\omega(x) = Ln\,\omega(x)\big|_{x=a} + \frac{(x-a)}{1!}\frac{d\,Ln\,\omega(x)}{dx}\bigg|_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2\,Ln\,\omega(x)}{d\,x^2}\bigg|_{x=a} + ... \qquad (a)$$

نوجد قيمة $Ln\omega(x)$ ومشتقاته، ثم نعوض في حدود المنشور

$$\omega(x) = \frac{a^x}{x!}e^{-a} \Rightarrow Ln\omega(x) = x\,Ln a - a - Ln\,x!$$

وباستخدام تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$

$$Ln\omega(x) \approx x\,Lna - a - x\,Lnx + x$$

$$\frac{d\,Ln\,\omega(x)}{dx}\bigg|_{x=a} = \frac{d}{dx}\left[x\,Ln\,a - a - x\,Ln\,x + x\right]_{x=a} = \left[Ln\,a - Ln\,x - 1 + 1\right]_{x=a} = 0$$

$$\frac{d^2 Ln\,\omega(x)}{d\,x^2}\bigg|_{x=a} = \frac{d}{dx}\left[Ln\,a - Ln\,x\right]_{x=a} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=a} = -\frac{1}{a}$$

بتعويض كلٍ بقيمته في (a) نجد:

$$Ln\,\omega(x) \approx Ln\,\omega(a) + 0 + \frac{(x-a)^2}{2!}(-\frac{1}{a}) \Rightarrow Ln\frac{\omega(x)}{\omega(a)} \approx -\frac{\Delta X^2}{2a} \qquad ; \quad \Delta X^2 = (x-a)^2$$

$$\Rightarrow \; \omega(x) \approx \omega(a)\,e^{-\frac{\Delta X^2}{2a}}$$

وهذا يطابق تابع كثافة توزع غوص الطبيعي المعطى بالصيغة $f(x) = A e^{-\alpha x^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$

الملحق

تكاملات بواسون:

$$I_n' = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 0 & ; n\ (\text{فردي})\ \text{و}\ n \geq 0 \\ 2I_n & ; n\ (\text{زوجي}) \end{cases}$$

حيث يأخذ الحد I_n قيمة التكامل التالي:

$$I_n = \int_{0}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\,2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n\ (\text{زوجي})\ \text{و}\ n \geq 0 \\ \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n\ (\text{فردي})\ \text{و}\ n = 2m+1\ \text{و}\ m \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: أوجد قيمة التكاملات التالية:

-1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0 \quad ; n = 1\ (\text{فردي})$

-2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = 2\left(\frac{2!}{1!\,2^3}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \quad ; n = 2\ (\text{زوجي})$

-3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2\left(\frac{0!}{0!\,2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad ; n = 0\ (\text{زوجي})$

-4 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{0!}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \quad ; n = 1\ (\text{فردي}) \Rightarrow n = 2m+1 = 1 \Rightarrow m = 0$

-5 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1!}{2\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \quad ; n = 3\ (\text{فردي}) \Rightarrow n = 2m+1 = 3 \Rightarrow m = 1$

تابع غاما (Γ): (Gamma function)

نعلم أن: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{\infty} = -(0-1) = 1$

وأن: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-qx} dx = -\frac{1}{q}\left[e^{-qx}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{q}(0-1) = \frac{1}{q} = q^{-1} \qquad ; q > 0$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة للثابت q مرة، ومرتين، وثلاث مرات، و .... وn مرة، فنحصل على:

$$\int_0^{\infty} x e^{-qx} dx = 1!\,q^{-2} \quad \text{و} \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-qx} dx = 2!\,q^{-3} \quad \text{و} \quad \int_0^{\infty} x^3 e^{-qx} dx = 3!\,q^{-4} \quad \text{و} \ \ldots\ldots\ldots\ \text{و} \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-qx} dx = n!\,q^{-(n+1)}$$

نفرض قيمة الثابت $q = 1$ فنحصل على الصيغة التكاملية المعروفة للتابع غاما المعرف بأحد الشكلين التاليين:

$$\boxed{\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)! \qquad \text{و} \qquad \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!}$$

نوجد العلاقة بينهما بالشكل التالي:

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)}$$

ملاحظات:

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ لأن $\Gamma(1) = 0! = \Gamma(2) = 1! = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{\infty} = -(0-1) = 1$$

من أجل قيم n حيث $0 < n < 1$

$$\boxed{\Gamma(n).\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{Sin(n\pi)}}$$

<u>مثال:</u> عندما $n=1/2$ نجد:

$$\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{Sin(\frac{\pi}{2})}=\pi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}}$$

حالة خاصة: عندما يكون $n+\frac{1}{2}$ عدد كسري حيث $n=0,1,2,3,......$ نجد:

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{1}{2})&=(n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})=(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2})=(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})(n-\frac{5}{2})\,.......\frac{3}{2}\,.\,\frac{1}{2}.\Gamma(\frac{1}{2})\\&=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\,.........3.1.\sqrt{\pi}}{2^n}=\frac{(2n-1)\,!!.\sqrt{\pi}}{2^n}\end{aligned}}$$

تدل إشارة العاملي المضاعف !! على أن العاملي مأخوذ فقط من أجل القيم الفردية لما داخل القوسين.

<u>مثال:</u> أوجد قيمة مايلي:

$$\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(1+\frac{1}{2})=(1-\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

أو بالشكل:

$$\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(\frac{5}{2})=\Gamma(3-\frac{1}{2})=\Gamma(2+\frac{1}{2})=(2-\frac{1}{2})(2-\frac{3}{2})\Gamma(2-\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

أو بالشكل:

$$\Gamma(\frac{5}{2})=\Gamma(\frac{3}{2}+1)=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

<u>علاقات رياضية هامة:</u>

<u>تابع زيتا (Zeta Function):</u> يعرف بالشكل التالي:

$$\zeta(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$$

ويأخذ القيم التالية:

q	1	2	3	4	3/2	5/2	7/2	9/2
$\zeta(q)$	∞	$\pi^2/6=1{,}645$	1,202	$\pi^4/90=1{,}082$	2,612	1,341	1,127	1,055

<u>التكامل ذو النتيجته المرتبطة بتابعي غاما وزيتا:</u>

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{q-1}}{e^x-1}dx=\Gamma(q)\zeta(q) \qquad ;\ q>1$$

<u>تقريب ستيرلنغ:</u>

ليكن

$$\begin{aligned}N!&=N(N-1)(N-2).........3.2.1\\&=1.2.3..........K........(N-2)(N-1)N\end{aligned}$$

$$LnN!=Ln1+Ln2+Ln3+...........+LnK+........+Ln(N-2)+Ln(N-1)+LnN=\sum_{K=1}^{N}LnK$$

فإذا فرضنا أن N كبيرة جداً والفواصل مقادير صغيرة يمكن اعتبارها مستمرة. لذا نستبدل المجموع $\sum$ بـ $\int$ فنجد:

$$LnN!=\int_{x=1}^{N}Ln\,x\,dx=\left[x\,Ln\,x-x\right]_1^N=N\,LnN-N-0+1$$

وبما أن $N>>1$ لذا يهمل الواحد ونحصل على صيغة التقريب الأول

$$\boxed{Ln N! \approx N\, Ln N - N}$$

وهذا يعني إمكانية كتابة $N!$ بالشكل التالي:

$$\boxed{N! \approx N^N e^{-N}}$$

وإذا كان $N >>> 1$ لدرجة يمكننا فيها اعتبار $Ln N >> 1$ نحصل على صيغة التقريب الثاني (تقريب التقريب)

$$\boxed{Ln N! \approx N(Ln N - 1) \approx N\, Ln N}$$

التقريب بجوار الواحد:

$$\boxed{Ln(1 \pm \varepsilon) \approx \pm\varepsilon}$$

منشور التابع الأسي:

$$\boxed{e^a = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \qquad ; a < 1}$$

ومن أجل قيم لـ $a << 1$ نكتفي بالحدين الأول والثاني من المنشور، ويصبح بالشكل

$$\boxed{e^a \approx 1 + a}$$

منشور تايلور:

يستخدم لمعرفة قيمة التابع $f(x)$ بجوار إحدى نقاط مجال التعريف (x_0) مثلاً بالشكل التالي:

$$\boxed{f(x) = f(x_o) + \frac{x - x_o}{1!} \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_o} + \frac{(x - x_o)^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_o} + \ldots\ldots\ldots}$$

مجموع السلسلة الهندسية: (Sum of a Geometric Series)

لتكن السلسلة الهندسية:

$$S_n = c + c\,f + c\,f^2 + \ldots\ldots\ldots + c\,f^n \qquad (*)$$

بضرب طرفي $(*)$ بـ f نحصل على سلسلة هندسية أساسها f:

$$f\,S_n = c\,f + c\,f^2 + c\,f^3 + \ldots\ldots\ldots + c\,f^n + c\,f^{n+1} \qquad (**)$$

بطرح $(**)$ من $(*)$

$$S_n(1 - f) = c(1 - f^{n+1}) \quad \Rightarrow \quad S_n = c\,\frac{(1 - f^{n+1})}{(1 - f)}$$

ومن أجل $|f| < 1$ (f متقاربة) فإن $\lim_{n\to\infty} f^{n+1} = 0$ ونحصل على عبارة مجموع السلسلة الهندسية

$$\boxed{S = \frac{c}{1 - f}}$$

أي أن مجموع السلسلة الهندسية يساوي الحد الأول مقسوماً على واحد ناقص الأساس.

مثال: مجموع السلسلة الهندسية التي أساسها $x << 1$ بالشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots\ldots + x^n \qquad \Rightarrow S = \frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1}$$

مضاريب لاغرانج:

رياضياً:

لإيجاد النهاية الحدية العظمى للتابع $f = f(x, y)$ ذو المتحولين المستقلين (x, y) نفاضل التابع ونساوي تفاضله بالصفر. (أو نشتق التابع ونعدم المشتق) كما يلي:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 0$$

وإذا كان المتحولان مرتبطان بقيد أو شرط على النحو التالي: $\varphi(x, y) = cte$ بحيث نكتب تفاضله بالشكل

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_x dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_x = 0$$

وهذا يعني أن النسب التالية متساوية وتساوي لقيمة ثابتة نفرضها $-\alpha$ كما يلي:

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_y}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_x}=-\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y+\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_y=0\\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x+\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_x=0\end{cases} \qquad (*)$$

تدعى المعادلتين (*) معادلتي لاغرانج المحققة للنهاية الحدية العظمى للتابع f المشروطة بالقيد $\varphi = cte$
ويمكن التعبير عن كل منهما بالعلاقة:

$$\boxed{d\,f + \alpha\, d\varphi = 0}$$

وكما هو ملاحظ فقد أضافت هذه الطريقة مجهول جديد إضافةً للمتحولين المستقلين (x, y) هو α يدعى مضروب لاغرانج. ويمكن الحصول على المجاهيل الثلاثة بالحل المشترك للمعادلتين (*) والشرط $\varphi(x, y) = cte$.
يمكن تطبيق هذه الطريقة على تابع في عدد n من المتحولات

$$f = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

وبفرض الشرط أو القيد

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = cte$$

وباستخدام شرط النهاية النهاية الحدية العظمى للتابعين $d\,f = 0$ و $d\,\varphi = 0$ نحصل على n معادلة من الشكل

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}=0 \qquad ;\ i = 1,2,3,.......n \qquad (**)$$

تدعى المعادلات (**) معادلات لاغرانج المحققة للنهاية الحدية العظمى للتابع f المشروطة بالقيد $\varphi = cte$
ويمكن التعبير عن كل منهما بالعلاقة:

$$\boxed{d\,f + \alpha\, d\varphi = 0}$$

وكما هو ملاحظ لدينا n متحول $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ والمضروب α أي لدينا $n+1$ مجهول. نستطيع إيجادها بالحل المشترك للمعادلات (**) والشرط $\varphi(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = cte$.
فإذا فرضنا وجود شرطين (قيدين) على جملة متحولات التابع $f = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ هما

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = cte \quad \text{و} \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = cte$$

وباستخدام شرط النهاية النهاية الحدية العظمى للتوابع $d\,f = 0$ و $d\,\varphi_1 = 0$ و $d\,\varphi_2 = 0$
نحصل على n معادلة من الشكل

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\alpha\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}+\beta\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}=0 \qquad ;\ i = 1,2,3,.......n \qquad (***)$$

تدعى المعادلات (***) معادلات لاغرانج المحققة للنهاية الحدية العظمى للتابع f المشروطة بالقيدين $\varphi_1 = cte$ و $\varphi_2 = cte$.
ويمكن التعبير عن كل منهما بالعلاقة:

$$\boxed{d\,f + \alpha\, d\varphi_1 + \beta\, d\varphi_2 = 0}$$

وكما هو ملاحظ لدينا n متحول $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ والمضروبين α و β أي لدينا $n+2$ مجهول.
نستطيع إيجادها بالحل المشترك للمعادلات (***) والشرطين $\varphi_1 = cte$ و $\varphi_2 = cte$.

<u>فيزيائياً:</u>

بالإسقاط على مقرر الفيزياء الإحصائية (الميكانيك الإحصائي، أو الترموديناميك الإحصائي) الذي بين يدينا:

- **التابع f :**

نأخذ التابع f مطابقاً للأنتروبية S باعتبارها تمثل تابع الحالة الترموديناميكية الأمثل للأسباب التالية:
- تربط الأنتروبية المتحولات الجهرية المستقلة للجملة الترموديناميكية بتابع من الشكل $S(P,V,T)$ يدعى معادلة الحالة.
- الأنتروبية هي التابع المشترك الوحيد بين الترموديناميك الكلاسيكي والترموديناميك الإحصائي
- شرط الجملة الواقعة في حالة توازن ترموديناميكي هو أن تكون أنتروبيتها أعظمية، أي S_{max}. وهذا منسجم مع النهاية الحدية العظمى للتابع $S = S_{max} \iff dS(P,V,T) = 0$، وهي توافق الحالة الماكروية للجملة الترموديناميكية ذات

الوزن الإحصائي الأعظمي W_{max}

- وجود قانون بولتزمان بالصيغة $S = K\ln W$ ، الذي يربط بين الأنتروبية S كمتحول مشترك والوزن الإحصائي للجملة W كمتحول إحصائي. أو بالصيغة $S = -K\ln\omega$ ، حيث يمثل ω احتمال وجود الجملة في إحدى حالاتها الميكروية.
- خصوصية قانون بولتزمان المتجلية بتطابقه مع المبدأين الثاني والثالث في الترموديناميك كما يلي:

$S(T \to T_{max}) \to S_{max}$ للثاني و $S(T \to 0K^o) \to 0$ للثالث

بناءاً على ما سبق يؤخذ التابع الرياضي f مطابقاً لقانون بولتزمان الفيزيائي $f \equiv S = K\ln W$

- **تابعي الشرطين (القيدين) $\varphi_1 = cte$ و $\varphi_2 = cte$:**

نأخذ تابعي الشرطين (القيدين) مطابقين لشرطي الجملة المعزولة المتمثلين بانحفاظ عدد جسيماتها وطاقتها الداخلية.

- شرط انحفاظ عدد جسيمات الجملة المعزولة: $\varphi_1 \equiv N = \sum_i N_i = cte$
- شرط انحفاظ طاقة الجملة المعزولة: $\varphi_2 \equiv U = \sum_i N_i \varepsilon_i = cte$

- **معادلة لاغرانج:**

نكتب معادلة لاغرانج المحققة للنهاية الحدية العظمى للأنتروبية S_{max} المشروطة بالقيدين $\varphi_1 = cte$ و $\varphi_2 = cte$ بالشكل التالي:

$$d\,f + \alpha_1\,d\,\varphi_1 + \beta_1\,d\,\varphi_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad dS_{max} + \alpha_1\,dN + \beta_1\,dU = 0$$

وبالتعويض عن الأنتروبية dS بقيمتها من قانون بولتزمان $dS_{max} = K\,dLnW_{max} \quad \Rightarrow \quad S_{max} = K\ln W_{max}$ ،
وبالتعويض نجد:

$$K\,dLnW_{max} + \alpha_1\,dN + \beta_1\,dU = 0$$

بقسمة طرفي معادلة لاغرانج على ثابتة بولتزمان K واعتبار مضروبي لاغرانج $\beta = \frac{\beta_1}{K}$ و $\alpha = \frac{\alpha_1}{K}$ نجد:

$$\boxed{dLnW_{max} + \alpha\,dN + \beta\,dU = 0}$$

وهي تعبر عن شرط الحالة المتوازنة للجملة الترموديناميكية المعزولة بشرط انحفاظ عدد جسيماتها وطاقتها الداخلية.
وباعتبار

$$dN = \sum_i dN_i = 0 \quad \text{و} \quad dU = \sum_i d(N_i\varepsilon_i) = \sum_i \varepsilon_i dN_i + N_i \underbrace{d\varepsilon_i}_{0} = \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

نجد:

$$\boxed{dLnW_{max} + \alpha\sum_i dN_i + \beta\sum_i \varepsilon_i dN_i = 0}$$