كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي2

المحاضرة : الاولى/نظري/

التكامل غير المحدد :

تعريف : نقول عن $F(x)$ انها دالة أصلية للدالة $f(x)$ على $[a,b]$، اذا كان F اشتقاقي على $[a,b]$ وكان $F' = f$

مثال: $\sin x$ دالة أصلية لـ $\cos x$

لأن: $(\sin x)' = \cos x$

مثال: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ دالة أصلية لـ $2\sqrt{x}$

لأن: $(2\sqrt{x})' = 2 . \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

ملاحظة: اذا كانت F دالة أصلية للدالة $f(x)$ فإن كل دالة من الشكل $F(x) + c \; ; c \in R$ هي أيضاً دالة أصلية للتابع f

$(F(x) + c)' = f + 0 = f$

أمثلة: $\sin x + 3$ دالة أصلية للدالة $\cos x$

$\sin x - \frac{1}{2}$ دالة أصلية للدالة $\cos x$

$\sin x + 5\sqrt{3}$ دالة أصلية للدالة $\cos x$

تعريف: اذا كان $F(x)$ أحد الدوال الأصلية للدالة $f(x)$ فإننا نسمي $F(x) + c$ بالتكامل غير المحدد للدالة f، ونرمز له:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

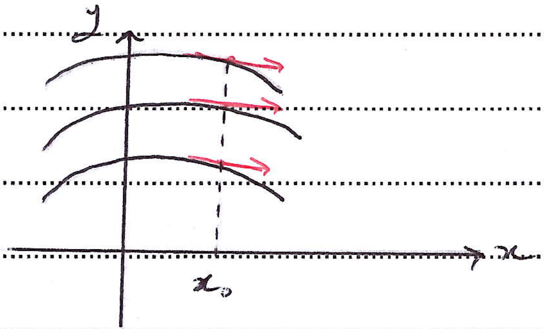
مبرهنة: اذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ عندئذ يمكن

إيجاد دالة أصلية لها على $[a,b]$

هندسياً: (تفسير التكامل غير المحدد):

* الخطوط البيانية للتوابع $F(x)+C$ تنتج من الخط البياني للتابع $F(x)$ بانسحاب شعاعه $c\vec{j}$

* كل المماسات للمنحنيات $F(x)+C$ في النقطة $x=x_0$ متوازية



* ملاحظة: يسمى الخط البياني للدالة الأصلية $F(x)$ بمنحني تكاملي

مثال: أوجد المنحني التكاملي المار بالنقطة $(-1,2)$ والذي ميل المماس له في النقطة (x,y) يساوي $3x^2$

الحل: $F(x)=?$

ميل المماس $F'(x)=f(x)=3x^2$

$$F(x)=x^3+C$$

$$F(-1)=2 \Rightarrow -1+C=2 \Rightarrow C=3$$

$$F(x)=x^3+3$$

الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد:

1) $\int \alpha f(x) = \alpha \int f(x)\, dx \quad ; \alpha \in R^*$

مثال: $\int 3\sin x\, dx = 3\int \sin x\, dx = -3\cos x + C$

2) $\int(\alpha f \pm \beta g) = \alpha \int f\, dx \pm \beta \int g\, dx$

3) $d[\int f(x)\, dx] = f(x)$

4) $\int d\,f(x) = f(x)$

جدول التكاملات الأساسية:

1) $\int a.dx = ax + C$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad ; n \neq -1$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad ; x \neq 0$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad ; a > 0, a \neq 1$

5) $\int e^x dx = e^x + C$

6) $\int \sin x.dx = -\cos x + C$

7) $\int \cos x.dx = \sin x + C$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

11) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

14) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

16) $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$

17) $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$

18) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

19) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left[x + \sqrt{x^2+a^2} \right]$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left[x + \sqrt{x^2-a^2} \right]$

ملاحظة: $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

مثال: $\int \cos(3x+5)\, dx = \frac{1}{3} \sin(3x+5) + C$

أمثلة: 1) $I = \int \left[e^{x+2} + 5 \operatorname{sh} x + \frac{3}{\operatorname{ch}^2 x} \right] dx$

$= e^{x+2} + 5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{th} x + C$

$I = \int (3 - x^2)^2 \, dx$ (2

$I = \int (9 - 6x^2 + x^4) \, dx$

$= 9x - 2x^3 + \frac{x^5}{5} + C$

$I = \int (1 + \sqrt{x})^3 \, dx$ (3

$I = \int (1 + 3\sqrt{x} + 3x + (\sqrt{x})^3) \, dx$

$I = \int (1 + 3x^{\frac{1}{2}} + 3x + x^{\frac{3}{2}}) \, dx$

$I = x + 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3 \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$

$= x + 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{2} x^2 + \frac{2}{5} \sqrt{x^5}$

$I = \int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} \, dx$ (4

$= \int \frac{x^3 - 3x + x^2 - 3}{3x^2} \, dx \Rightarrow \frac{1}{3} \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2} \right) dx$

$= \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{3}{x} + 1 - 3x^{-2} \right) dx$

$= \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} - 3 \ln|x| + x - \frac{3x^{-1}}{-1} \right] + C$

$I = \int \frac{(x - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} \, dx$ (5

$= \int \frac{x + x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x}{\sqrt[3]{x}} \, dx \Rightarrow \int \frac{x . x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} \, dx$

$= \int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx \Rightarrow \int (x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}).dx$

$= \int (x^{\frac{7}{6}} - x^{\frac{1}{6}}).dx \Rightarrow \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} - \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + c$

$= \frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^{7}} + c$

$I = \int \frac{x^2.dx}{x^2+1}$ (6

طريقة أولى : قسمة إقليدية :

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2+1 & x^2 \\ & \underline{x^2+1} \\ & -1 \end{array} \Rightarrow I = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right).dx$$

$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx \Rightarrow \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$ طريقة ثانية :

$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \Rightarrow x - \arctan x + c$

$\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}}\,.dx$ (7

$= \int \sqrt{x.x^{\frac{1}{3}}}\, dx \Rightarrow \int \sqrt{x^{\frac{4}{3}}}\, dx \Rightarrow \int (x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}.dx$

$\Rightarrow \int x^{\frac{2}{3}} dx \Rightarrow \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$

$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x . \cos^2 x}$ (8

$I = \int \frac{1}{\sin^2 x . \cos^2 x} .dx \Rightarrow \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x . \cos^2 x} dx$

$= \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right] dx$

$= \tan x - \cot x + C$

(٩ $I = \int 6 \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$

$\int 6 \, \frac{1 - \cos x}{2} \, dx$ $\Leftarrow \boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}$

$= \int (3 - 3 \cos x) \, dx \Rightarrow 3x - 3 \sin x + C$

(١٠ $\int \frac{(e^x - 1)(e^{2x} + 1)}{e^x} \, dx$

$= \int \frac{e^{3x} + e^x - e^{2x} - 1}{e^x} \, dx$

$= \int (e^{2x} + 1 - e^x - e^{-x}) \, dx$

$= \frac{1}{2} e^{2x} + x - e^x + e^{-x} + C$

(١١ $\int (2x + 5)^{12} \, dx$

$= \frac{1}{2} \frac{(2x + 5)^{13}}{13} + C$

$= \frac{1}{26} (2x + 5)^{13} + C$

انتهت المحاضرة