كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية2

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

الزمرة: المجموعة G غير خالية ومزودة بعملية $*$ بالشكل $(G,*)$

$*: G\times G \to G$ و $*(a,b)=a*b$

تسمى زمرة إذا تحققت الشروط الآتية:

1) G مغلقة بالنسبة للعملية $*$ إذا تحقق الشرط
$\forall a,b\in G: a*b\in G$

2) $*$ تجميعية على عناصر G إذا تحقق الشرط:
$\forall a,b,c\in G: (a*b)*c=a*(b*c)$

3) يوجد في G عنصر حيادي بالنسبة للعملية $*$ (e)
$\forall a\in G: a*e=e*a=a$

4) لكل عنصر من G معكوس (مقلوب) (نظير) بالنسبة للعملية $*$ هو العنصر النظير بحيث يتحقق الشرط:
$\forall a\in G\ \exists a'\in G: a*a'=a'*a=e$

ونكتب عندئذٍ a' معكوس a و a معكوس a'.

ملاحظة:

لتكن $(G,*)$ زمرة يقال بأنَّ G زمرة تبديلية إذا تحقق الشرط: $\forall a,b\in G: a*b=b*a$

مثال:

$\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة و $(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبديلية

والعنصر الحيادي فيها هو العدد صفر حيث (+) عملية الجمع العادية.

- $(\mathbb{Z}, \times)$ أو $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ليست زمرة لأنه ليس لكل عنصر من $\mathbb{Z}$ معكوس (مقلوب) بالنسبة لعملية الضرب العادية على مجموعة الأعداد الصحيحة

ملاحظة:

لتكن $(G, *)$ زمرة

1) العنصر الحيادي في الزمرة $(G, *)$ وحيد.

2) معكوس أي عنصر من الزمرة $(G, *)$ وحيد.

3) معكوس معكوس العنصر x في G يساوي x أي

في الزمرة $(G, \cdot)$ $(x^{-1})^{-1} = x$

في الزمرة $(G, +)$ $-(-x) = x$

4) $(G, *)$ زمرة عندئذٍ:

$\forall x, y \in G : (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

5) خاصية الاختزال من اليسار في الزمرة $(G, *)$

$\forall a, b, c \in G : a * b = a * c \Rightarrow b = c$

6) خاصية الاختزال من اليمين في الزمرة $(G, *)$

$\forall a, b, c \in G : b * a = c * a \Rightarrow b = c$

7) قوة عنصر في زمرة ولتكن $(G, *)$ زمرة والحيادي فيها هو (e) وليكن x عنصراً ما في G نعرف قوة عنصر x في الزمرة G كما يلي

$$x^n = \begin{cases} \overbrace{x * x * \cdots * x}^{n \text{ مرة}} & \text{if } n > 0 \\ e & \text{if } n = 0 \\ \underbrace{x^{-1} * x^{-1} * \cdots * x^{-1}}_{m = -n \text{ مرة}} & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

* في حال كانت $(G,+)$ زمرة جمعية وليكن $x \in G$

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x+x+\cdots+x}_{n \text{ مرة}} & \text{if } n>0 \\ 0 & \text{if } n=0 \\ \underbrace{(-x)+(-x)+\cdots+(-x)}_{m=-n \text{ مرة}} & \text{if } n<0 \end{cases}$$

* في حال كانت $(G,\cdot)$ زمرة ضربية والحيادي فيها هو 1

$$x^n = \begin{cases} x\cdot x\cdot \cdots \cdot x & \text{if } n>0 \\ 1 & \text{if } n=0 \\ (x^{-1})\cdot(x^{-1})\cdots(x^{-1}) & \text{if } n<0 \end{cases}$$

خواص قوة عنصر في الزمرة $(G,*)$:

لتكن $(G,*)$ زمرة وليكن $x \in G$ عندئذٍ

$$x^n * x^m = x^{n+m}$$
$$(x^n)^{-1} = x^{-n}$$
$$(x^m)^m = x^{nm}$$

أمثلة:

مثال1: لتكن G مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة تماماً ولنعرّف على G العملية $(*)$ بالشكل التالي

$$* : G \times G \longrightarrow G$$
$$* : (a,b) = a*b = \frac{a.b}{2}$$

حيث $(.)$ هي عملية الضرب العادية على مجموعة الأعداد الكسرية عندئذٍ $(G,*)$ زمرة تبديلية.

الحل:

1) G مغلقة بالنسبة للعملية $*$

$$\forall a,b \in G: \ a*b = \frac{a.b}{2} \in G$$

2) * تجميعي على عناصر G:

$\forall a,b,c\in G: (a*b)*c = a*(b*c)$

$\ell_1 = (a*b)*c = \left(\frac{a.b}{2}\right)*c = \frac{\left(\frac{a.b}{2}\right).c}{4}$

$= \frac{\left(a.\frac{b}{2}\right).c}{2} = \frac{a.\left(\frac{b}{2}.c\right)}{2} = a*\left(\frac{b.c}{2}\right) = a*(b*c)$
$= \ell_2$.

ومنه * تجميعي على عناصر G

3) يوجد في G عنصر حيادي هو $e=2$

$\forall a\in G: a*e = a$

$\frac{a.e}{2} = a \Longrightarrow \boxed{e=2}$

$\forall a\in G \Rightarrow a*2 = a \Rightarrow \frac{2a}{2} = a \Rightarrow \boxed{a=a}$ محققة

$\Rightarrow 2*a = a \Rightarrow \frac{2a}{2} = a \Rightarrow \boxed{a=a}$ محققة

$\Longrightarrow a*2 = 2*a = a \ \forall a\in G$.

4) لكل عنصر a من G معكوس هو $a' = \frac{4}{a}\in G$

$a*a' = \frac{a.a'}{2} = \frac{a.\frac{4}{a}}{2} = 2 = e$.

$a'*a = \frac{a'.a}{2} = \frac{\frac{4}{a}.a}{2} = 2 = e$.

5) $\forall a,b\in G: a*b = \frac{a.b}{2} = \frac{b.a}{2}$.

نستنتج مما سبق أن $(G,*)$ زمرة تبديلية.

مثال: لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن G مجموعة كل المصفوفات المعطاة بالشكل

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

عندئذٍ G زمرة بالنسبة لعملية جداء المصفوفات المعروفة

الحل:

① G مغلقة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات

$$\forall A_x, B_\beta \overset{?}{\Longrightarrow} A_x B_\beta \in G$$

$$A_x = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} , \quad B_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$A_x B_\beta = \begin{bmatrix} \cos x\cos\beta - \sin x\sin\beta & -(\cos x\sin\beta + \sin x\cos\beta) \\ \sin x\cos\beta + \cos x\sin\beta & \cos x\cos\beta - \sin x\sin\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(x+\beta) & -\sin(x+\beta) \\ \sin(x+\beta) & \cos(x+\beta) \end{bmatrix} = A_{x+\beta} \in G$$

② عملية جداء المصفوفات بشكل عام تجميعي بالتالي عملية جداء المصفوفات تجميعي على عناصر G

③ الحيادي G هو

$$e = A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\forall A_x \in G : A_x . A_0 =$

$A_{x+0} = A_x$

$A_0 . A_x = A_{0+x} = A_x$

$\Longleftarrow A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هو الحيادي في G

④ المعكوس :

لكل عنصر A_x من G معكوس في G بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات هو

$$A_{-x} = \begin{bmatrix} \cos(-x) & -\sin(-x) \\ \sin(-x) & \cos(-x) \end{bmatrix}$$

$A_x . A_{-x} = A_0 = e.$

$A_x . A_{-x} = A_{x+(-x)} = A_0 = e.$

$A_{-x} . A_x = A_{-x+x} = A_0 = e.$

نستنتج مما سبق أن G زمرة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات

مرتبة زمرة : تعرف مرتبة الزمرة G على أنها عدد العناصر المختلفة الموجودة في هذه الزمرة ونرمز لرتبة زمرة $o(G)$ و $|G|$ إذا كانت $o(G) < \infty$ (عدد محدد) عندئذٍ نقول أن الزمرة G منتهية وخلاف ذلك تكون G زمرة غير منتهية

مثال :

ليكن $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ الجذر التكعيبي التخيلي للعدد 1 وليكن $G = \{1, w, w^2\}$ والمطلوب اثبت أن G مع عملية الضرب $(G, .)$ زمرة تبديلية حيث العملية (.) هي عملية الجداء

المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية

الحل: بما أنّه G مجموعة منتهية عندئذٍ نشكل جدول كاملي بالنسبة لـ (.)

(.)	1	w	w^2
1	1	w	w^2
w	w	w^2	1
w^2	w^2	1	w

① نلاحظ

$\forall a,b \in G : a.b \in G$

G ← مغلقة بالنسبة لـ (.)

② بما أنّه عملية جداء الأعداد العقدية تجميعية عندئذٍ (.) تجميعي على عناصر G

③ نلاحظ من الجدول
$$\begin{cases} 1.1=1 \\ 1.w=w.1=w \\ 1.w^2=w^2.1=w^2 \end{cases}$$
بالتالي G فيه الحيادي هو 1

④ لكل عنصر $a\in G$ معكوس في G بالنسبة للعملية (.)

العنصر	1	w	w^2
المعكوس	1	w^2	w

نلاحظ بأنّه العناصر حول القطر الرئيسي متناظرة بالتالي العملية (.) تبديلية

نستنتج مما سبقه أنّه ~~(G,+)~~ (G,.) زمرة منتهية

حيث $O(G)=3$

تعريف زمرة الأعداد الصحيحة قياس n (زمرة بواقي القسمة على عدد n)

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ولتكن $\mathbb{Z}_n=\{0,1,2,\dots,n-1\}$

نعرّف على $\mathbb{Z}_n$ عملية ثنائية $\oplus_n$ بالشكل التالي:

$\forall x,y \in \mathbb{Z}_n : x \oplus_n y = \overline{x+y} = r$

حيث r باقي قسمة $(x+y)$ على العدد n عندئذٍ $(\mathbb{Z}_n,\oplus_n)$ زمرة تبديلية منتهية بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس n والحيادي فيها هو العدد 0 ومعكوس العنصر $a\in\mathbb{Z}_n$ حيث $0<a<n$ هو العدد $(n-a)$ بالنسبة للمقاس n.

مثال: اوجد جدول كايلي للزمرة $(\mathbb{Z}_6,\oplus_6)$

$\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$

$\oplus_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

العنصر	0	1	2	3	4	5
المعكوس	0	5	4	3	2	1

انتهت المحاضرة