



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي 2

المحاضرة : الثانية / نظري /

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

2026

4



المحاضرة الثانية (نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- ❖ مفهوم الدالة الأصلية.
- ❖ مفهوم التكامل غير المحدد وبعض الخواص الذي يتمتع بها.
- ❖ قواعد لحساب بعض التكاملات غير المحددة لدوال شهيرة.

التكامل غير المحدد**تعريف: الدالة الأصلية**يُقال عن الدالة $F(x)$ بأنها دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال I إذا تحقق ما يلي:

1. $F(x)$ دالة اشتقاقية على المجال I .

2. $F'(x) = f(x)$

مثال: الدالة $F(x) = \arcsin(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ على المجال $I =]-1,1[$

لأن:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1,1[$$

مثال: $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ هي دالة أصلية للتابع $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ على المجال $I =]-1,1[$ **مثال:** $F(x) = -\cos 2x$ هي دالة أصلية للتابع $f(x) = 2\sin 2x$ على $I = \mathbb{R}$ **ملاحظة:** إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال I عندئذ

$$(F(x) + c)$$
 دالة أصلية لـ $f(x)$ على المجال I حيث $c \in \mathbb{R}$

تعريف: (التكامل غير المحدد)تُسمى مجموعة جميع الدوال الأصلية $(F(x) + c)$ للدالة $f(x)$ على المجال I بالتكامل غير المحدد ويرمز له بالرمز

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

حيث c ثابت اختياري، ندعو:❖ x متغير المكاملة، c ثابت التكامل.❖ $f(x)dx$ العباره المكاملة.❖ $f(x)$ الدالة المكاملة.

- تعني كلمة غير محدد أنّ الشكل العام للدالة الأصلية يحوي ثابتاً اختيارياً.
- التكامل غير المحدد هو دالة مشتقتها مساوٍ للدالة المكاملة وتفاضلها مساوٍ للعباره المكاملة.

مثال:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد:

1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ أي تفاضل التكامل غير المحدد هو العباره المكاملة.
2. مشتق التكامل غير المحدد هو الدالة المكاملة.
3. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\int (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$
5. $\int f(x)dx = \int f(t)dt$ أي لا يتغير التكامل غير المحدد لدالة إذا غيرنا رمز متحول المكاملة.

ندرس الآن قواعد لحساب بعض التكاملات غير المحددة لدوال شهيرة المجموعة الأولى

التابع $f(x)$	تكامل التابع $f(x)$ ($\int f(x)dx$)
$f(x) = a ; a \in \mathbb{R}$	$ax + c$
$f(x) = x^n ; n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$f(x) = \frac{1}{ax+b} ; a \neq 0$	$\frac{1}{a} \ln ax + b + c$
$f(x) = e^{ax} ; a \neq 0$	$\frac{1}{a} e^{ax} + c$
$f(x) = a^x ; a > 0 \text{ \& } a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$

مثال:

$$\int \left(x^3 + \frac{1}{x} + e^{\frac{1}{2}x} + 3 \right) dx = \frac{x^4}{4} + \ln|x| + 2e^{\frac{1}{2}x} + 3x + c$$

مثال:

$$\int \left(5^x + 2^{2x} + \frac{1}{2x+1} + e \right) dx = \frac{5^x}{\ln(5)} + \frac{4^x}{\ln(4)} + \frac{1}{2} \ln|2x+1| + ex + c$$

مثال:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

المجموعة الثانية

من أجل α عدد حقيقي غير معدوم

التابع $f(x)$	تكامل التابع $f(x)$ ($\int f(x)dx$)
$f(x) = \sin x$	$-\cos x + c$
$f(x) = \sin \alpha x$	$-\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + c$
$f(x) = \cos x$	$\sin x + c$
$f(x) = \cos \alpha x$	$\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + c$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 \alpha x}$	$\frac{1}{\alpha} \tan \alpha x + c$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + c$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 \alpha x}$	$-\frac{1}{\alpha} \cot \alpha x + c$

مثال:

$$\int \left(\sin 7x + \cos \left(\frac{1}{2}x \right) \right) dx = -\frac{1}{7} \cos 7x + 2 \sin \left(\frac{1}{2}x \right) + c$$

مثال:

$$\int \left(\frac{1}{\sin^2 3x} + \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{2}x \right)} + \pi^e + 4 \right) dx = -\frac{1}{3} \cot 3x + 2 \tan \left(\frac{1}{2}x \right) + (\pi^e + 4)x + c$$

مثال:

$$\begin{aligned} \int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx &= \int (\sin^2 2x + \cos^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x) dx = \int (1 - \sin 4x) dx \\ &= x + \frac{1}{4} \cos 4x + c \end{aligned}$$

مثال:

$$\int \sin^2 2x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin 4x + c$$

المجموعة الثالثة

من أجل α عدد حقيقي غير معدوم

التابع $f(x)$	تكامل التابع $f(x)$ ($\int f(x) dx$)
$f(x) = shx$	$chx + c$
$f(x) = shax$	$\frac{1}{\alpha} chax + c$
$f(x) = chx$	$shx + c$
$f(x) = chax$	$\frac{1}{\alpha} shax + c$
$f(x) = \frac{1}{ch^2 x}$	$thx + c$
$f(x) = \frac{1}{ch^2 \alpha x}$	$\frac{1}{\alpha} thax + c$
$f(x) = \frac{1}{sh^2 x}$	$-cth x + c$
$f(x) = \frac{1}{sh^2 \alpha x}$	$-\frac{1}{\alpha} cthax + c$

مثال:

$$\int \left(sh 2x + \frac{3}{sh^2 5x} + e^{\pi x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} ch 2x - \frac{3}{5} cth 5x + \frac{1}{\pi} e^{\pi x} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + c$$

مثال:

$$\int \left(\frac{1}{ch^2 2x} + 3^x + x^7 \right) dx = \frac{1}{2} th 2x + \frac{3^x}{\ln(3)} + \frac{x^8}{8} + c$$

مثال:

$$\int (chx + shx)^2 dx = \int (ch^2x + sh^2x + 2shxchx) dx = \int (ch2x + sh2x) dx = \frac{1}{2} sh2x + \frac{1}{2} ch2x + c$$

مثال:

$$\int sh^2x dx = \int \left(\frac{ch2x - 1}{2} \right) dx = \int \left(\frac{1}{2} ch2x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{4} sh2x - \frac{1}{2} x + c$$

المجموعة الرابعة

التابع $f(x)$	تكامل التابع $f(x)$ ($\int f(x)dx$)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$ or $-\arccos(x) + c$ حيث $x \in]-1,1[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} + c$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$

مثال:

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = 2 \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + \frac{1}{3} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \arctan(x) + c$$

مثال:

$$\int \left(\frac{4}{2-2x^2} + \frac{1}{sh^2 4x} + x \right) dx = 2 \times \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{4} cth 4x + \frac{x^2}{2} + c$$

تمرين:

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + c$$

تمرين:

$$\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x} dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + c$$

تمرين:

$$\int \left(3^x e^x + \cos 2x + \frac{4}{\sqrt{2x^2+2}} \right) dx = \frac{(3e)^x}{1 + \ln(3)} + \frac{1}{2} \sin 2x + 2\sqrt{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$$

قواعد هامة جداً:

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c$
$\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c ; \quad n \neq -1$
$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$

مثال:

$$\int \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln|1+x^3| + c$$

مثال:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + c$$

طريقه ثانيه:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \sqrt{x^2+1} + c$$

مثال:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

مثال:

$$\int \sin x e^{\cos x} dx = - \int (-\sin x) e^{\cos x} dx = -e^{\cos x} + c$$

مثال:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = 2\sqrt{e^x+1} + c$$

مثال:

$$\int \sin x \cos^3 x dx = - \int (-\sin x) \cos^3 x dx + c = -\frac{\cos^4 x}{4} + c$$

مثال:

$$\int \operatorname{sh} x \sqrt{1+chx} dx = \int \operatorname{sh} x (1+chx)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} (1+chx)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(1+chx)^3} + c$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{e^{-x}+1} = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln|e^x+1| + c = \ln(e^x+1) + c$$

مثال:

$$\int e^{2chx} \operatorname{sh} x dx = \frac{1}{2} \int 2\operatorname{sh} x e^{2chx} dx = \frac{1}{2} e^{2chx} + c$$



مكتبة

A to Z

phon

تواصي المحاضرات

Group

