



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي 2

المحاضرة : الاولى / نظري /

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960



المحاضرة الأولى (نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- ❖ التوابع المثلثية الشهيرة.
- ❖ التوابع العكسية للتوابع المثلثية الشهيرة.
- ❖ التوابع القطعية الشهيرة.
- ❖ التوابع العكسية للتوابع القطعية الشهيرة.
- ❖ تذكره ببعض مشتقات التوابع.

1. التوابع المثلثية الشهيرة

$$\sin x: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1] \leftarrow \text{تابع فردي}$$

$$\cos x: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1] \leftarrow \text{تابع زوجي}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \leftarrow \text{تابع فردي}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}: \mathbb{R} \setminus \{ \pi k; k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R} \leftarrow \text{تابع فردي}$$

نذكر ببعض العلاقات الشهيرة:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

2. التوابع العكسية للتوابع المثلثية الشهيرة

■ التابع $\sin x$ وحيد التعيين على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ فله دالة عكسية هي $\arcsin(x)$

$$\arcsin(x): [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \leftarrow \text{تابع فردي}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

■ التابع $\cos x$ وحيد التعيين على المجال $[0, \pi]$ فله دالة عكسية هي $\arccos(x)$

$$\arccos(x): [-1,1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

■ التابع $\tan x$ وحيد التعيين على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ فله دالة عكسية هي $\arctan(x)$

$$\arctan(x): \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

■ التابع $\cot x$ وحيد التعيين على المجال $]0, \pi[$ فله دالة عكسية هي $\operatorname{arccot}(x)$

$$\operatorname{arccot}(x): \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arccot}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$$

3. التوابع القطعية الشهيرة

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \leftarrow \text{تابع فردي}$$

$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[\leftarrow \text{تابع زوجي}$$

$$\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\leftarrow \text{تابع فردي}$$

$$\operatorname{cth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\leftarrow \text{تابع فردي}$$

نذكر ببعض العلاقات الشهيرة:

$$\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$$

$$\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = e^x, \quad \operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x = e^{-x}$$

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}x$$

$$\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x, \quad \operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2x + \operatorname{sh}^2x = 2\operatorname{ch}^2x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2x$$

$$\operatorname{sh}^2x = \frac{\operatorname{ch}2x - 1}{2}, \quad \operatorname{ch}^2x = \frac{\operatorname{ch}2x + 1}{2}$$

$$1 - \operatorname{th}^2x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$$

$$1 - \operatorname{cth}^2x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$$

4. التوابع العكسية للتوابع القطعية الشهيرة

■ التابع $\operatorname{sh}x$ له دالة عكسية هي $\operatorname{argsh}(x)$

$$\operatorname{argsh}(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \leftarrow \text{تابع فردي}$$

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

■ التابع $\operatorname{ch}x$ له دالة عكسية هي $\operatorname{argch}(x)$

$$\operatorname{argch}(x): [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

$$\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

■ التابع $\operatorname{th}x$ له دالة عكسية هي $\operatorname{argth}(x)$

$$\operatorname{argth}(x):]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

■ التابع cthx له دالة عكسية هي $\operatorname{argcthx}(x)$

$$\operatorname{argcthx}(x):]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{argcthx}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

نذكر الآن ببعض قواعد الاشتقاق لتوابع شهيرة:

المجموعة الأولى

التابع y	مشتق التابع $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$
$y = ax + b ; a, b \in \mathbb{R}$	$\dot{y} = a$
$y = x^n$	$\dot{y} = nx^{n-1}$
$y = (g(x))^n$	$\dot{y} = n(g(x))^{n-1} \times \dot{g}(x)$
$y = a^{g(x)} ; a > 0$	$\dot{y} = \dot{g}(x) \times \ln(a) \times a^{g(x)}$
$y = \ln(g(x))$	$\dot{y} = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)}$
$y = e^{g(x)}$	$\dot{y} = \dot{g}(x)e^{g(x)}$

مثال:

$$y = 3x + x^7 + 3^{x^2} \Rightarrow \dot{y} = 3 + 7x^6 + 2x \ln(3) \times 3^{x^2}$$

مثال:

$$y = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + e^{2x} \Rightarrow \dot{y} = -\frac{1}{x(x+1)} + 2e^{2x}$$

المجموعة الثانية

التابع y	مشتق التابع $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$
$y = \sin(g(x))$	$\dot{y} = \dot{g}(x) \cos(g(x))$
$y = \cos(g(x))$	$\dot{y} = -\dot{g}(x) \sin(g(x))$
$y = \tan(g(x))$	$\dot{y} = \frac{\dot{g}(x)}{\cos^2(g(x))}$
$y = \cot(g(x))$	$\dot{y} = \frac{-\dot{g}(x)}{\sin^2(g(x))}$

مثال:

$$y = \tan\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \dot{y} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{x^2 \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

مثال:

$$y = \sin(x^2 + x) \Rightarrow \dot{y} = (2x + 1) \cos(x^2 + x)$$

المجموعة الثالثة

التابع y	مشتق التابع $y' = \frac{dy}{dx}$
$y = \arcsin(g(x))$	$y' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - (g(x))^2}}$
$y = \arccos(g(x))$	$y' = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1 - (g(x))^2}}$
$y = \arctan(g(x))$	$y' = \frac{g'(x)}{1 + (g(x))^2}$
$y = \operatorname{arccot}(g(x))$	$y' = \frac{-g'(x)}{1 + (g(x))^2}$

مثال:

$$y = \arctan(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow y' = \frac{2x + 2}{1 + (x + 1)^4}$$

المجموعة الرابعة

التابع y	مشتق التابع $y' = \frac{dy}{dx}$
$y = \operatorname{sh}(g(x))$	$y' = g'(x) \operatorname{ch}(g(x))$
$y = \operatorname{ch}(g(x))$	$y' = g'(x) \operatorname{sh}(g(x))$
$y = \operatorname{th}(g(x))$	$y' = \frac{g'(x)}{\operatorname{ch}^2(g(x))}$
$y = \operatorname{cth}(g(x))$	$y' = \frac{-g'(x)}{\operatorname{sh}^2(g(x))}$

مثال:

$$y = \operatorname{cth}(e^x + 5x) \Rightarrow y' = \frac{-(e^x + 5)}{\operatorname{sh}^2(e^x + 5x)}$$

المجموعة الخامسة

التابع y	مشتق التابع $y' = \frac{dy}{dx}$
$y = \operatorname{argsh}(g(x))$	$y' = \frac{g'(x)}{\sqrt{(g(x))^2 + 1}}$
$y = \operatorname{argch}(g(x))$	$y' = \frac{g'(x)}{\sqrt{(g(x))^2 - 1}}$
$y = \operatorname{argth}(g(x))$	$y' = \frac{g'(x)}{1 - (g(x))^2}; g(x) \in]-1, 1[$
$y = \operatorname{argcth}(g(x))$	$y' = \frac{g'(x)}{1 - (g(x))^2}; g(x) \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

مثال:

$$y = e^{\operatorname{argsh}(x)} \Rightarrow y' = \frac{e^{\operatorname{argsh}(x)}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$