ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية **العلوم**

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الأولى**

## أسئلة دورات محلولة

# رياضيات عامة ٤

جامعة طرطوس　　　　امتحان رياضيات 4　　　　اسم الطالب:

كلية العلوم　　　　الدورة الثانية 2024-2025　　　　المدة: ساعتان

للسنة الأولى (كيمياء)　　　　　　　　الدرجة:

**<u>السؤال الأول ( 20 درجة):</u>**

A) ادرس تقارب المتتالية $U_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

B) ادرس تقارب السلسلة $\sum_1^\infty \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

**<u>السؤال الثاني ( 40 درجة) :</u>**

C) أوجد مجموع السلسلة الآتية $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+n}$

D) أوجد مجموع السلسلة الآتية $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}$

**<u>السؤال الثالث (30 درجة):</u>**

ادرس إطراد المتتاليات

$$U_n = n + \cos(n)\,,\ V_n = e^{-n}\,,\ U_n = (-2)^n$$

**<u>القسم العملي (10 درجات):</u> فقط للطالب الذي ليس لديه علامة عملي**

اوجد مجال تقارب سلسلة القوى الآتية　　$\sum_0^\infty \frac{e^n}{n!} x^n$

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح　　　　مدرس المقرر: د. محمد معلا

سلم تصحيح مقرر رياضيات كافة ٤ سنة أولى كيمياء
دورة ثانية 2024-2025

## السؤال الأول

**A)** $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Leftarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = e$ — (10)

**B)** بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \neq 0 \Leftarrow$ السلسلة متباعدة — (10)

## السؤال الثاني

**C)**

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$$

(20)

**D)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ — (20)

## السؤال الثالث

$u_n = (-2)^n$ متناوبة الإشارة $\Leftarrow$ غير رتيبة — (10)

$v_n = e^{-n} \Leftarrow f(x) = e^{-x} \Leftarrow f' = -e^{-x} < 0 \Leftarrow$ متناقصة تماماً — (10)

$c_n = n + \cos n \Leftarrow f(x) = x + \cos x \Leftarrow f' = 1 - \sin x \geq 0 \Leftarrow$ متزايدة تماماً — (10)

## القسم العملي

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0 \Leftarrow$ نصف قطر التقارب $R = \frac{1}{0} = \infty$

$\Leftarrow$ السلسلة متقاربة في كل مكان — (10)

مدرس المقرر د. [illegible]

بسم الله الرحمن الرحيم

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | امتحان مقرر الرياضيات عامة (4) | الاسم: |
| كلية العلوم | السنة الأولى كيمياء | الدرجة: 90 |
| قسم الكيمياء | الفصل الدراسي الأول 2025/2024 | المدة: ساعتان |

**السؤال الأول:** (25) درجة

ادرس تقارب المتسلسلة الآتية باستخدام اختبار نهاية النسبة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

**السؤال الثاني:** (20) درجة

ادرس تقارب المتسلسلة العددية الآتية مستخدماً اختبار دالامبير:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

**السؤال الثالث:** (25) درجة

ادرس التقارب النقطي و التقارب المنتظم لمتتالية الدوال الآتية مستخدماً اختبار فايرشتراس:

$$f_n(x) = \frac{1}{nx} \; ; x \in [a, \infty[$$

**السؤال الرابع:** (20) درجة

ادرس تقارب متسلسلة القوى الآتية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \; x^n$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

د. سهى علي سلامه

سلم الصحيح
سلم تصحيح مقرر الرياضيات 4
السنة الأولى كيمياء

## السؤال الأول (25 درجة)

ادرس تقارب المتسلسلة الآتية باستخدام اختبار نهاية النسبة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

الحل: نأخذ المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ (5) ونطبق اختبار نهاية النسبة:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1 \quad (10)$$

⇐ المتسلسلتين من طبيعة واحدة.
ومن تقارب $\sum \frac{1}{n^2}$ لأنها متسلسلة ريمان (10)
$s = 2 > 1$
⇐ المتسلسلة المعطاة متقاربة.

## السؤال الثاني (20 درجة)

ادرس تقارب المتسلسلة العددية الآتية مستخدماً اختبار دالامبير

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

الحل: نطبق اختبار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ (5) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty > 1 \quad (10)$$

(5) فالمتسلسلة متباعدة.

## السؤال الثالث (25 درجة)

ادرس التقارب النقطي والتقارب المنتظم لمتتالية الدوال الآتية مستخدماً اختبار فايرشتراس.

$$f_n(x) = \frac{1}{nx} \ ; \ x \in [a, \infty[$$

الحل:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0 \quad (10)$$

$$\alpha_n = \sup_{x\in[a,+\infty[} \left|\frac{1}{nx}\right| = \frac{1}{an} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (10)$$

(5) والتقارب منتظم

## السؤال الرابع (20 درجة)

ادرس تقارب متسلسلة القوى الآتية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n$$

الحل:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad (10)$$

$$= \lim \left| \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 \quad (5)$$

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} \Rightarrow R = +\infty$$

(5) والمتسلسلة متقاربة في كل مكان.

د. سهى علي سلامة

سلم تصحيح امتحان الرياضيات عامة 4
سنة أولى كيمياء الدورة التكميلية
2023 - 2024

**السؤال الأول** 25 درجة

بأخذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وتطبيق اختبار نهاية النسبة: 10

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

فالمتسلسلتين من طبيعة واحدة

$\Leftarrow$ 10 من تقارب $\sum \frac{1}{n^2}$ لأنها متسلسلة ريمان $s=2>1$

5 $\Leftarrow$ تقارب المتسلسلة المعطاة.

**السؤال الثاني** 20 درجة

بتطبيق اختبار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!}$$ 10

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty > 1$$ 10

والمتسلسلة متباعدة.

**السؤال الثالث** 25 درجة

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$$ 5

$$\alpha_n = \sup_{x\in[a,+\infty[} \left|\frac{1}{nx}\right| = \frac{1}{an} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ 5 5 5

5 والتقارب منتظم

**السؤال الرابع** 20 درجة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$= \lim \left| \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} \right|$$ 10

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$$

$\Leftarrow$ $R=0$ والمتسلسلة متباعدة في كل مكان 10

عدا المركز $x_0 = 0$ فهي متقاربة عنده.

مدرسة المقرر
د. سلطان سلامة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الكيمياء

امتحان مقرر الرياضيات (4)
لطلاب السنة الأولى
من مقررات الفصل الثاني

في 2023-2024
اسم الطالب:
الدرجة العظمى (90)

---

السؤال الأول: (45 درجة)

1) اكتب العدد العقدي $z = 1-3i + \frac{2}{1-i}$
ثم اكتب العدد الناتج بالشكل المثلثي والأسي.

2) أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط $z$ من المستوي العقدي والتي تحقق المتراجحة:

$$2 \le |z-1| \le 3$$

3) تحقق هل الدالة $W(z) = \sqrt{z}$ تحليلية.

4) تحقق هل الدالة $u(x,y) = 3xy^2 - x^3$ توافقية.
إذا تبين لك أنها توافقية أوجد الدالة المرافقة لها $v$ حتى تكون الدالة $f(z) = u + iv$ تحليلية

السؤال الثاني: (45 درجة)

1) انشر الدالة $f(z) = \frac{1}{2-z}$ بجوار النقطة $z=1$ مكتفياً بثلاثة حدود والحد العام، ثم حدد منطقة تقارب السلسلة الناتجة.

2) احسب التكامل $I = \int_{\Gamma} (z+1)\,dz$ حيث $\Gamma$ هو النصف العلوي من قوس الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=2$ باتجاه الموجب $(|z| \le 2)$.

3) احسب التكامل $I = \oint_{\Gamma} \frac{z\,dz}{(z+1)^2}$ عندما:

a) $\Gamma$ هو $|z| \le \frac{1}{2}$

b) $\Gamma$ هو $|z| \le 2$

4) استخدم نظرية الرواسب في حساب التكامل

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx$$

---

يمنع استعمال الآلة الحاسبة

الإجابة بالقلم الأزرق
مدرس المقرر
أ. د. نزار حسن

كلية العلوم سلم تصحيحي مقرر الرياضيات (4) 2023 - 2024 م

قسم الكيمياء لطلاب السنة الاولى مقررات الفصل الثاني

السؤال الاول : 1)

$$z=(1-3i)+\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=(1-3i)+\frac{2(1+i)}{2}$$ (4)

$$=1-3i+\frac{2+2i}{2}=1-3i+1+i=2(1-i)$$ (2)

وان طويلة العدد $|z|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ (1) ولتحديد الدليل الرئيسي

$$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sin\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow Arg\, z=-\frac{\pi}{4}$$ (1)

وبالتالي الشكل المثلثي للعدد العقدي لنا نجد $z=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$ (1)

وان الشكل الأسي : $z=2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (1)

2) لتحديد الحل الهندسي نجد ان $|z-1|\le 3$ تمثل داخل دائرة مركزها $(1,0)$ (3) ونصف قطرها 3 بالاضافة لمحيط الدائرة اما بالنسبة $|z-1|\ge 2$ هي نقاط محيط وخارج الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها $r=2$ (2)

وبالتالي الحل الهندسي مجموعة نقاط الحلقة المحددة بالدائرتين السابقتين.

3) اذا كانت $z=re^{i\theta}$ فان :

$$w(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{r}\,i\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow u=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\ ,\ v=\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$$ (2)

تكون الدالة تحليلية اذا تحقق شرطا كوشي ريمان :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\ ,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$$ (1)

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{1}{2}\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$ (1)

بالتحقق من علاقات الشرط نجد

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\theta=\frac{1}{r}\frac{\sqrt{r}}{2}\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\sqrt{r}}{2}\cdot\frac{1}{r}\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{\partial v}{\partial r}\qquad (2)$$ (1)

من (1) و (2) نجد ان الدالة تحليلية

4) ان الدالة $u$ هي دالة توافقية اذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ (3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3y^2-3x^2\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6x\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=6xy\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x$$ (2) (2)

اذا هي دالة توافقية لتحديد الدالة $v$ المرافقة من شرطي كوشي ريمان نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=3y^2-3x^2\Rightarrow v=\int(3y^2-3x^2)dx+A(x)$$ (1)

$$v=y^3-3x^2y+A(x)\qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=6xy\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=-6xy\Rightarrow v=-\int 6xy\,dx+A(y)$$ (1)

$$=-3x^2y+A(y)\qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد الدالة التحليلية

$$f(z)=u+iv=(3xy^2-x^3)+i(y^3-3x^2y)$$ (1)

السؤال الثاني: 1) يمكن تحديد النشر المطلوب باعتبار الدالة تحوي متسلسلة هندسية حيث تكتب

$$f(z)=\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-(z-1)}=1+(z-1)+(z-1)^2+\dots+(z-1)^n+\dots$$

وهي متسلسلة هندسية أساسها $z-1$ تتقارب عندما $|z-1|<1$ ومنه

$-1<z-1<1 \Rightarrow 0<z<2$ وهي تمثل داخل دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها $r=1$.

2) يمكن التعبير عن معادلة الدائرة حيث $z=2e^{i\theta}$ ومنه المطلوب فإن $0\le\theta\le\pi$

$$\Rightarrow dz=2ie^{i\theta}d\theta,\quad z+1=2e^{i\theta}+1$$

$$I=\int_0^\pi(2e^{i\theta}+1)(2ie^{i\theta})d\theta=\int_0^\pi(4ie^{i2\theta}+2ie^{i\theta})d\theta$$

$$=4i\cdot\frac{1}{2i}e^{i2\theta}\Big|_0^\pi+2i\cdot\frac{1}{i}e^{i\theta}\Big|_0^\pi=2e^{i2\theta}\Big|_0^\pi+2e^{i\theta}\Big|_0^\pi$$

$$=2(e^{i2\pi}-1)+2(e^{i\pi}-1)=2(\cos2\pi+i\sin2\pi-1)+2(\cos\pi+i\sin\pi-1)$$

$$=2(1-1)+2(-1+0-1)=0-4=-4$$

3) أ) أن $f(z)=z$ هي دالة تحليلية وأن النقطة $z=1$ خارج $|z|\le\frac{1}{2}$ التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=\frac{1}{2}$ فإن قيمة التكامل وحسب صيغة كوشي التكاملية مساوية للصفر.

ب) النقطة $z=-1$ هي داخل الدائرة $|z|\le2$ بالتالي قيمة التكامل وحسب صيغة كوشي

$$f'(-1)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_{|z|\le2}\frac{z}{(z+1)^2}dz,\quad f(z)=z\Rightarrow f'(z)=1$$

$$1=\frac{1!}{2\pi i}\oint_C\frac{z}{(z+1)^2}dz\Rightarrow\oint_C\frac{z}{(z+1)^2}dz=2\pi i$$

4) أن التكامل $I$ المطلوب هو من الشكل $\int_{-\infty}^{\infty}\cos mx\, f(x)dx$ لذلك نستبدل $f(x)=\frac{1}{x^2+9}$ بـ $f(z)=\frac{1}{z^2+9}$ والذي يحقق الشرط

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2+9}=0$$

والدالة $e^{imz}f(z)$ . فيكون قيمة التكامل المطلوب

$$I=\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^2+9}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[2\pi i\,\mathrm{Res}(3i)]$$

أن $z=3i$ هي قطب بسيط يقع في النصف العلوي وليس للدالة نقاط أقطاب في المحور الحقيقي وأن

$$\mathrm{Res}(3i)=\lim_{z\to3i}\frac{e^{iz}(z-3i)}{(z-3i)(z+3i)}=\lim_{z\to3i}\frac{e^{iz}}{z+3i}=\frac{e^{i(3i)}}{3i+3i}=\frac{e^{-3}}{6i}$$

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot e^{-3}\frac{1}{6i}\right]=\frac{\pi}{6e^3}$$

[illegible]

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | | التكميلي 2022-2023 |
| كلية العلوم | | الدرجة العظمى (90) |
| قسم الكيمياء | | اسم الطالب: |

مقرر الرياضيات (4) السنة الأولى من مقررات الفصل الثاني

السؤال الأول: (50 درجة)

1- أوجد حلاً (واحداً فقط) للمعادلة $z^3 + 2i = 0$.

2- أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط $z$ من المستوي العقدي والتي تحقق المتراجحة $|z-(1+2i)| < 4$

3- انشر الدالة $f(z) = \dfrac{1}{5-z}$ بجوار النقطة $z = 1$ مكتفياً بأربعة حدود والحد العام, ثم حدد منطقة تقارب السلسلة الناتجة.

4- تحقق هل الدالة $U(x,y) = 3x^2y - y^3$ توافقية؟. إن تبين لك أنها توافقية أوجد الدالة المرافقة.

5- تحقق هل الدالة $f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$ تحليلية.

السؤال الثاني (40 درجة)

1- احسب هذا التكامل $\int_{\Gamma} (2z-1)dz$ إذا كان $\Gamma$ هو منحني القوس العلوي من الدائرة $|z| = 1$ والموجهة بالاتجاه الموجب.

2- احسب التكامل $I = \oint_{\Gamma} \dfrac{z^2\,dz}{(z-1)^2}$ حيث $\Gamma$ هو منحني مغلق.

3- احسب التكامل $I = \int_0^{\infty} \dfrac{1}{(x-3)(x^2+1)} dx$.

---

يمنع استعمال الآلة الحاسبة

الإجابة بالقلم الأزرق حصراً

أ.د. نزار حسن

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الكيمياء

سلم تصحيح رياضيات (٤)
الطلاب السنة الاولى

تكميلي 2022 - 2023

السؤال الاول: 1) من المعادلة $z^3+2i=0 \Leftarrow$ فيكون $z=\sqrt[3]{-2i}$ (2) فيكون الحل المطلوب هو الجذور $\sqrt[3]{-2i}$

لتحديد الشكل المثلثي للعدد العقدي $-2i$ يكون $\cos\theta=\frac{0}{2}=0$ وان $\sin\theta=\frac{-2}{2}=-1$ وبالتالي

الدليل الرئيسي $\operatorname{Arg} z=\frac{3\pi}{2}$ (2) او $-\frac{\pi}{2}$ فيكون الشكل المثلثي $-2i=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$ (2)

وتكون الحلول الموافقة حسب قانون دموافر: الجذور هي

$$\eta_k=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) \quad (2) \qquad k=0,1,2$$

$$\eta_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{2}\,i \quad (2)$$

وهو احد الحلول والحلول الباقية من اجل $k=1,2$

2- المحل الهندسي لمجموعة النقاط $z$ التي تحقق $|z-(1+2i)|<4$ (2) من المعلوم ان $|z-(1+2i)|=4$ (2) تمثل محيط دائرة مركزها $(1+2i)$ (2) ونصف قطرها 2 في المستوي العقدي
وبالتالي مجموعة النقاط المطلوبة هي مجموعة نقاط داخل هذه الدائرة (2) من المستوي العقدي (2)

3- ان النشر المطلوب هو نشر الدالة وفق نشر تايلور وفق العلاقة

$$f(z)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(z-1)+\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n+\dots$$

او نكتب النشر وفق ماكلوران بحيث نكتب الدالة بالشكل (2)

$$\frac{1}{5-z}=\frac{1}{4-(z-1)}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{z-1}{4}}=\frac{1}{4}\left[1+\frac{z-1}{4}+\left(\frac{z-1}{4}\right)^2+\dots+\left(\frac{z-1}{4}\right)^n+\dots\right] \quad (3)\ (2)\ (2)$$

والمتقاربة من اجل $\left|\frac{z-1}{4}\right|<1$ (1) $\Leftarrow$ اي $|z-1|<4$ اي متقاربة داخل الدائرة التي (2) مركزها $z=(1,0)$ ونصف قطرها $r=2$

4- تكون الدالة $u(x,y)=3x^2y-y^3$ توافقية اذا تحقق الشرط $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ (2)

$\frac{\partial u}{\partial x}=6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6y$ , $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-6y$ (2)

ومنه نجد ان العلاقة محققة والدالة توافقية
ولتحديد الدالة المرافقة نطبق شرط كوشي كذلك يكون لدينا ان الدالة تحليلية

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ , $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ (2) , $\frac{\partial u}{\partial x}=6xy=\frac{\partial v}{\partial y}\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} v=3xy^2+A(x)$ ① (1)

$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2=-\frac{\partial v}{\partial x}$ (1) $\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} -v=x^3-3y^2x+A(y)$ ② ?

من ① و ② نجد

$v=-x^3+3xy^2+A$ (2) , $f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$

5- تكون الدالة تحليلية اذا حققت شرط كوشي - ريمان فاذا فرضنا ان $z=x+iy$ فان (2)

$$f(z)=z^2\bar z=[(x^2+y^2)+i2xy](x-iy)=x(x^2+y^2)+2xy^2)+i[y(x^2+y^2)+2x^2y]$$

$=u(x,y)+iv(x,y)$ (2) $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-y^2+2y^2=3x^2+y^2$ (2)

$\frac{\partial v}{\partial y}=x^2-3y^2+2x^2=3x^2-3y^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ (2) (2)

ومنه غير تحليلية

السؤال الثاني: 1) لحساب التكامل $\int_{|z|=1} (2z-1)\,dz$ علينا ان نفرض ان $z=re^{i\theta}$ (2)

وبما ان $|z|=1$ تمثل حركة نقاط محيط دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ (2) ولما كانت $C$ تمثل النصف العلوي من هذه الدائرة فان مجال تغير $\theta$ هو $0 \le \theta \le \pi$ (2) وان فيكون التكامل المطلوب

$$z=e^{i\theta} \Longrightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta \quad (2)$$

$$I=\int_0^\pi (2e^{i\theta}-1)ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^\pi (2e^{i2\theta}-e^{i\theta})d\theta = i\left[\frac{2}{2i}e^{i2\theta}-\frac{1}{i}e^{i\theta}\right]_0^\pi \quad (2)$$

$$=(e^{i2\pi}-1)-(e^{i\pi}-1)=2 \quad (2)$$

2- علينا حساب التكامل وفق صيغة كوشي

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \quad (3)$$

$$(2)\ f(z)=z^2 ,\ n=1 \Longrightarrow f'(z)=2z ,\ a=1 \Rightarrow f'(1)=2 \quad (2)$$

$$f'(1)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z-1)^2} \ (3) \Leftrightarrow 2\times 2\pi i = \oint_C \frac{z\,dz}{(z-1)^2} \quad (2)$$ وهو المطلوب

3- لحساب التكامل $I=\int_0^\infty \frac{1}{(x-3)(x^2+1)}dx$ وهو تكامل من الشكل $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

علينا حساب التكامل وفق نظرية الرواسب نفرض ان:

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^2+1)} \quad (3)$$

والدالة نقاط شاذة عند $z=3$ و $z=\pm i$ (2)

نلاحظ ان النصف العلوي من المستوي العقدي يحوي $z=3$ على المحور الحقيقي و $z=i$ موجود (2) وان كلاً منها قطب بسيط من الرتبة الاولى عندئذ تكون التكامل

$$I=\int_0^\infty \frac{dz}{(z-3)(z^2+1)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z-3)(z-i)(z+i)} \ (3) = 2\pi i\,Res(i)+\pi i\,Res(3) \quad (2)$$

$$Res(i)=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z-3)(z+i)(z-i)} \ (2) = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z-3)(z+i)}=\frac{1}{-2-6i}$$

$$Res(3)=\lim_{z\to 3}\frac{z-3}{(z-3)(z^2+1)}=\lim_{z\to 3}\frac{1}{9+1}=\frac{1}{10} \quad (1)$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2\pi i\left(\frac{1}{-2+6i}\right)+\pi i\,\frac{1}{10}\right]$$

نموذج (A)

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | | الفصل الثاني 2023-2022 |
| كلية العلوم | | الدرجة العظمى (90) |
| قسم الكيمياء | | اسم الطالب: |
| مقرر الرياضيات (4) | السنة الأولى | من مقررات الفصل الثاني |

السؤال الأول: (50 درجة)

1- أوجد حلاً (واحداً فقط) للمعادلة $z^3 + 2i = 0$.

2- أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط $z$ من المستوي العقدي والتي تحقق المتراجحة $|z-(1+2i)| < 4$

3- انشر الدالة $f(z) = \dfrac{1}{5-z}$ بجوار النقطة $z = 1$ مكتفياً بأربعة حدود والحد العام، ثم حدد منطقة تقارب السلسلة الناتجة.

4- تحقق هل الدالة $U(x,y) = 3x^2y - y^3$ توافقية؟. إن تبين لك أنها توافقية أوجد الدالة المرافقة.

5- تحقق هل الدالة $f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$ تحليلية.

السؤال الثاني: (40 درجة)

1- بفرض لدينا التكامل $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (z+i)dz$ ، تحقق هل التكامل متعلق بالطريق المسلوك؟، إن تبين لك أنه غير متعلق احسب هذا التكامل إذا كان $\Gamma$ هو منحني يصل بين النقطتين $A(0,0)\ ,\ B(1,3)$.

2- احسب التكامل $I = \oint_\Gamma \dfrac{z\,dz}{z-3}$ ( $\Gamma$ منحني مغلق).

3- احسب التكامل $I = \int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x} dx$.

---

يمنع استعمال الآلة الحاسبة

الإجابة بالقلم الأزرق حصراً

أ.د. نزار حسن

قسم الرياضيات / كلية العلوم

سلم تصحيح مقرر رياضيات (4) نموذج (A) الفصل الدراسي الثاني لطلاب السنة الأولى كيمياء (A) الدرجة العظمى (90)

نموذج A

سؤال الأول: 1) أسئلة المعادلة بحدائية $z^3=-2i$ ومنه $z=\sqrt[3]{-2i}$ والحل المطلوب هو ايجاد الجذور

توحيد الشكل المثلثي للعدد العقدي $z=-2i$ حيث $|z|=2$ وان الدليل الرئيسي $\mathrm{Arg}(-2i)$

هو الزاوية $\cos\theta=\frac{0}{2}=0$ و $\sin\theta=\frac{-2}{2}=-1$ اذ $\mathrm{Arg}(-2i)=\frac{3\pi}{2}$ أو عكسيا اخذ $-\frac{\pi}{2}$

ومنه الشكل المثلثي $-2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ او $-2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

والحل هو ايجاد الجذور وفق الجذر

$$\eta_k=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

وهو الحل المطلوب

$$k=0\Rightarrow \eta_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

2- ان المتراجحة $|z-(1+2i)|<4$ فيمثل $|z-(1+2i)|=4$ محيط دائرة مركزها $z_0=(1+2i)$ في المستوي العقدي وبالتالي وفق المتراجحة فان مجموعة النقاط المطلوبة مجموعة النقاط الداخلية للدائرة المذكورة من المستوي العقدي (يمكن للطالب التعبير عن ذلك بشكل تخطيطي) وذلك بعرض مجموعة النقاط هي $(z=x+iy)$

3- ان النشر المطلوب للدالة $f(z)=\frac{1}{5-z}$ حول نقطة $z=1$ اي النشر وفق تايلور اما وفقه القانون

$$f(z)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(z-1)+\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n+\dots$$

او وفق اعتبار الدالة كمجموع لسلسلة قوى هندسية وفق الآتي

$$f(z)=\frac{1}{5-z}=\frac{1}{5-(z-1)-1}=\frac{1}{4-(z-1)}=\frac{1}{4\left(1-\frac{z-1}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+\frac{z-1}{4}+\left(\frac{z-1}{4}\right)^2+\dots+\left(\frac{z-1}{4}\right)^n+\dots\right]=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n$$

وهذه الشكل مجموع سلسلة هندسية اساسها $\frac{z-1}{4}$ تتقارب من اجل $\left|\frac{z-1}{4}\right|<1$ ومنه $|z-1|<4 \Leftarrow$ وبالتالي $z$ تمثل من المستوي العقدي هي مجموعة نقاط داخل دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 4 وهي المنطقة التقارب المطلوبة.

4- الدالة $U(x,y)=3x^2y-y^3$ توافقية اذا تحقق الشرط $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$، حيث

$\frac{\partial u}{\partial x}=6xy \Rightarrow \frac{\partial^2u}{\partial x^2}=6y$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-6y$

اذاً: $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=6y-6y=0$ والدالة المعروضة توافقية

لتحديد الدالة المرافقة يتم وضع شرط كوشي كدالة تحليلية وهو:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=6xy=\frac{\partial v}{\partial y}\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} v=3xy^2+A(x)\ (1)$$

ثم بالمكاملة ومن الشرط الثاني

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow -v=x^3-3xy^2+A(y)\ (2)$$

ثم بالمكاملة وبالتالي الدالة المرافقة نأخذ الحدود المشتركة وغير المشتركة من (1) و (2) عندها نجد:

$$v=-x^3+3xy^2+A$$

5- الدالة تكون تحليلية اذا تحقق شرط كوشي فاذا فرضنا ان $z=x+iy$ فان: $w=f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$z^2=(x^2-y^2)+i2xy \Rightarrow z^2\bar{z}=[(x^2-y^2)+i2xy](x-iy)$$

$$z^2\bar{z}=x(x^2-y^2)+2xy^2+i[y(x^2-y^2)+2x^2y]=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-y^2+2y^2=3x^2+y^2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x^2-3y^2+2x^2=3x^2-3y^2$$

نلاحظ من ذلك ان احد شرطي كوشي غير محقق حيث $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ وبالتالي الدالة غير تحليلية (يمكن البرهان باستخدام الشرط الآخر $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$)

ة طرطوس
ية العلوم

سلم تصحيح مقرر رياضيات 4 نموذج (A) الفصل الدراسي الثاني
لطلاب السنة الاولى كيمياء النموذج (A)
الدرجة القصوى (90) نموذج A

سؤال الاول: 1) ان المعادلة تعادل $z^3=-2i$ (2) ومنه $z=\sqrt[3]{-2i}$ والحل المطلوب هو ايجاد الجذور

نوجد الشكل المثلثي للعدد العقدي $z=-2i$ حيث $|z|=2$ (1) وان الدليل الرئيسي $Arg(-2i)$

هو الزاوية $\cos\theta=\frac{0}{2}=0$ و $\sin\theta=\frac{-2}{2}=-1$ اذ $Arg(-2i)=\frac{3\pi}{2}$ (1) أو عكسيا نأخذ $-\frac{\pi}{2}$

ومنه الشكل المثلثي $-2i=2(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})$ (1) او $-2i=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

والحل هو ايجاد الجذور وفق الجذر $\eta_k=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$ (1)

والحل المطلوب $k=0\Rightarrow \eta_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ (1)

2- ان المتراجحة $|z-(1+2i)|<4$ فيها $|z-(1+2i)|=4$ محيط دائرة مركزها $z_0=(1+2i)$ (1)

في المستوي العقدي وبالتالي وفق المتراجحة فإن مجموعة النقاط المطلوبة مجموعة النقاط (1)

الداخلية للدائرة (1) (2) المذكورة في المستوي العقدي (يمكن للطالب التعبير عن ذلك بشكل تحليلي وذلك بفرض مجموعة النقاط هي $(z=x+iy)$

3- ان النشر المطلوب للدالة $f(z)=\frac{1}{5-z}$ بجوار نقطة $z=1$ اي النشر وفق تايلور إما وفق القانون

$$f(z)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(z-1)+\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n+\dots$$

او وفق اعتبار الدالة كمجموع سلسلة قوى هندسية وفق الآتي

$$f(z)=\frac{1}{5-z}=\frac{1}{5-(z-1)-1}=\frac{1}{4-(z-1)} \ (2) =\frac{1}{4(1-\frac{z-1}{4})} \ (2)$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+\frac{z-1}{4}+\left(\frac{z-1}{4}\right)^2+\dots+\left(\frac{z-1}{4}\right)^n+\dots\right]=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n \ (4)$$

(1) ووفق الشكل مجموع سلسلة هندسية اساسها $\frac{z-1}{4}$ تتقارب من اجل $\left|\frac{z-1}{4}\right|<1$ ومنه $|z-1|<4$ (1) وبالتالي $z$ تمثل في المستوي العقدي هي مجموعة نقاط داخل دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 4 وهي المنطقة التقارب المطلوبة.

4- الدالة $U(x,y)=3x^2y-y^3$ توافقية اذا تحقق الشرط $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ (2) حيث

$\frac{\partial u}{\partial x}=6xy\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=6y$ (2) , $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-6y$ (2)

اذاً: $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=6y-6y=0$ (2) والدالة المعروضة توافقية

لتحديد الدالة المرافقة يتم من شرط كوشي لدالة تحليلية وهو: (2)

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ , $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=6xy=\frac{\partial v}{\partial y}\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} v=3xy^2+A(x)$ (1) بالمكاملة

ومن الشرط الثاني

$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow -v=x^3-3xy^2+A(y)$ (2) بالمكاملة

بالتالي الدالة المرافقة نأخذ الحدود المشتركة وغير المشتركة من (1) و (2) عندها نجد:

$v=-x^3+3xy^2+A$ (1)

5- الدالة تكون تحليلية اذا تحقق شرط كوشي فاذا فرضنا ان $w=f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ و $z=x+iy$ فإن:

$z^2=(x^2-y^2)+i2xy\Rightarrow z^2\bar{z}=[(x^2-y^2)+i2xy](x-iy)$ (2) $=u(x,y)+iv(x,y)$ (2)

$z^2\bar{z}=x(x^2-y^2)+2xy^2+i[y(x^2-y^2)+2x^2y]$

$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-y^2+2y^2=3x^2+y^2$ (2) , $\frac{\partial v}{\partial y}=x^2-3y^2+2x^2=3x^2-3y^2$ (2) نلاحظ من ذلك ان احد شرطي كوشي غير محقق حيث

$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ (2) وبالتالي الدالة غير تحليلية (يمكن البرهان باستخدام الشرط الآخر $\left(\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

السؤال الثاني: يكون التكامل $\int_\Gamma (z+i)\,dz$ غير متعلق بالطريق المسلوك إذا كانت دالة ما تحت التكامل تحليلية (تحقق شرطي كوشي) 2

حسابها لدينا $z = x+iy$ ومنه نجد أن:

$$f(z) = z+i = x+i(y+1) = u(x,y)+i\,v(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad 3$$

نستنتج أن الدالة تحليلية فالتكامل غير متعلق بالطريق المسلوك.

لحساب التكامل يمكن اعتبار المنحني $\Gamma$ الذي يصل بين النقطتين $A$ و $B$ هو مستقيم معادلته بالمقارنة بين النقطتين $A$ و $B$ أي يمكن اعتبار معادلة المستقيم $y = 3x$ 1

من هذه العلاقة يمكن رد التكامل إلى تكامل حقيقي (متحول واحد) حيث نلاحظ أن $0 \le x \le 1$ 1

$$I = \int_\Gamma (z+i)\,dz = \int_0^1 [x+i(3x+1)](dx+i3dx) = (1+i3)\int_0^1 [x(1+3i)+i]\,dx \quad 1$$

$$= (1+i3)\left[\frac{x^2}{2}(1+3i)+ix\right]_0^1 = (1+i3)\left[\frac12(1+3i)+i-0\right] = (1+i3)\left(\frac12+i\frac52\right)$$

$$= \left(\frac12-\frac{15}{2}\right)+i\left(\frac52+\frac32\right) = -7+i4 \quad 1$$

2- لحساب التكامل $I = \oint_\Gamma \frac{z\,dz}{z-3}$ 5

نلاحظ أن النقطة $z=3$ هي نقطة شاذة أي الدالة تحليلية في منطقة مغلقة من المستوي العقدي ولحساب التكامل يمكن اعتماد أسلوبين:

الأول: وفق صيغة كوشي التكاملية

$$f^{(n)}(3) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{z\,dz}{(z-3)^{n+1}} \quad 5$$

حيث أن $f(z)=z$ و $n=0$ 5

بالتالي نتيجة التكامل 5

$$I = f(3) = \frac{0!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{z\,dz}{z-3} \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{z\,dz}{z-3} \Rightarrow \oint_\Gamma = 6\pi i$$

الثاني: استخدام صيغة كوشي العكسية وهي أن $\Gamma$ منحني مغلق والدالة $f(z)=\frac{z}{z-3}$ ولها نقطة شاذة عند تلك التكامل حيث $C$ و $\Gamma_1$

$$I = \oint_\Gamma \frac{z\,dz}{z-3} = \oint_{\Gamma_1} \frac{z\,dz}{z-3} = 6\pi i$$

هو منحني مغلق يمكن اعتباره دائرة مركزها النقطة $(3,0)$ ونصف قطرها اختياري وليكن $\rho=1$ وباعتبار أن $z = e^{i\theta}+3$ نستعمل لحساب $dz$ مع الأخذ بعين الاعتبار $0 \le \theta < 2\pi$ نحيط الدائرة. فنحصل على نفس النتائج.

3- يمكن حساب التكامل وفق نظرية الرواسب والدالة الحقيقية حيث لدينا

$$I = \frac12 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad 2$$

حيث لدينا $f(z) = \frac{1}{z}$ وبالتالي $z=0$ نقطة شاذة 2 عبارة عن قطب بسيط من المرتبة الأولى، واقع على المحور الحقيقي

$$I = \frac12\{Im[\pi i\, Res(0)\} \quad 2, \quad Res(0) = \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^{iz}}{z} = \lim_{z\to 0} e^{iz} = 1 \quad 2$$

أي حسب الرواسب للدالة $\frac{e^{iz}}{z}$ ومنه

$$I = \frac12 Im[\pi i] = \frac{\pi}{2} \quad 2$$

نموذج (B)

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | | الفصل الثاني 2023-2022 |
| كلية العلوم | | الدرجة العظمى (90) |
| قسم الكيمياء | | اسم الطالب: |
| مقرر الرياضيات (4) | السنة الأولى | من مقررات الفصل الثاني |



السؤال الأول: (50 درجة)

1- احسب $(1-i)^{16}$ (أبسط شكل)

2- تحقق هل الدالة $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ تحليلية.

3- تحقق هل الدالة $U(x,y)=6x(2y-1)$ توافقية؟. إن تبين لك أنها توافقية أوجد الدالة المرافقة.

4- أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط $z$ من المستوي العقدي والتي تحقق المتراجحة $|z-1|\leq|z+3-i|$.

5- بفرض لدينا السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 3^n}(z+1)^n$ ، حدد نصف قطر تقارب السلسلة ثم حدد منطقة تقاربها

السؤال الثاني (40 درجة)

1- احسب هذا التكامل $\int_{\Gamma}(2z-1)dz$ إذا كان $\Gamma$ هو منحني القوس العلوي من الدائرة $|z|=1$ والموجهة بالاتجاه الموجب.

2- احسب التكامل $I=\oint_{\Gamma}\frac{z^2\,dz}{(z-1)^2}$ حيث $\Gamma$ هو منحني مغلق.

3- احسب التكامل $I=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x-3)(x^2+1)}dx$.

---

يمنع استعمال الآلة الحاسبة

الإجابة بالقلم الأزرق حصراً

أ.د. نزار حسن

ـة طرطوس — ـة العلوم

سلم تصحيح مقرر رياضيات (4) نموذج (B) الفصل الثاني 2022 - 2023

لطلاب السنة الاولى كيمياء نموذج B

السؤال الاول: 1- لحساب $(1-i)^{16}$ نوجد الشكل المثلثي للعدد العقدي $z=1-i$ حيث $|z|=\sqrt{2}$ (2)

وان الدليل الرئيسي $\theta = Arg(1-i)$ ومنه: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$ (3) (2)

$1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}) \Rightarrow (1-i)=(\sqrt{2})^{16}(\cos 16\frac{\pi}{4}-i\sin 16\frac{\pi}{4})=(\sqrt{2})^{16}(\cos 4\pi - i\sin 4\pi)$ (3)

$(1-i)^{16}=(\sqrt{2})^{16}\cdot 1=(\sqrt{2})^{16}$ (2)

2- تحقق هل $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ تحليلية لبيان ذلك من الافضل تعريف $z$ بالشكل الاسي

اي $z=re^{i\theta}$ ومنه (2) $f(z)=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \Leftarrow$ (1) $f(z)=\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$

$f(z)=f(r,\theta)=u(r,\theta)+i\,v(r,\theta)=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}+i\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$

وتكون تحليلية اذا تحقق شرطي كوشي $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ (1) (2) , $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$ (2)

$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$ , $\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\sqrt{r}}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ , $\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}$ , $\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

(1) $\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\theta=\frac{1}{r}\frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ (1) محقق , (2) $\frac{1}{r}(-\frac{\sqrt{r}}{2}\sin\frac{\theta}{2})=-\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}$ (1) ايضاً محقق

وبالتالي الدالة تحليلية.

3- الدالة $u(x,y)=6x(2y-1)$ توافقية اذا تحقق الشرط $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ (2)

(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=6(2y-1) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ (1) , $\frac{\partial u}{\partial y}=12x$ (1) $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (1) $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

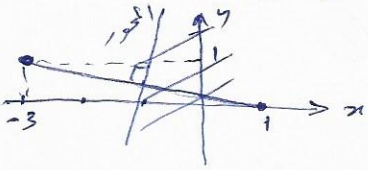
والدالة توافقية لايجاد الدالة المرافقة نحقق شرطي كوشي $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ , $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=6(2y-1)=\frac{\partial v}{\partial y} \xrightarrow[\text{بالنسبة لـ } y]{\text{بالمكاملة}} v=6(y^2-y)+A(x)$ (2)

(2) $\frac{\partial u}{\partial y}=12x=-\frac{\partial v}{\partial x} \xrightarrow[\text{بالنسبة لـ } x]{} -v=6x^2+A(y)$ (2)

نحدد $v(x,y)$ بالحدود المشتركة وغير المشتركة في (1) و (2) $v=6(y^2-y)+6x^2+A$ (2)

4- لدينا $|z-1| \leq |z+3-i|$ ان المساواة $|z-1|=|z+3-i|$ تمثل محموعة نقاط محور (2) (2)



القطعة المستقيمة الواصلة بين $(1,0)$ و $(-3,1)$ (2)

والذي يقسم المستوي العقدي الى نصفي مستويين وبالتالي وفق (3)

المتراجحة محموعة نقاط النصف الايمن من المحور والاقرب الى $(1,0)$ بما فيها نقاط المحور.

(يمكن الذهاب بالشكل التحليلي حيث نفرض $z=x+iy$ نبدل في المتراجحة، ينتج لدينا النقاط المطلوبة:

$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq \sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$

5- السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 3^n}(z+1)^n$ هي سلسلة قوى عقدية يمكن دراستها وفق دراسة سلسلة حقيقية. بالتالي للتحديد نصف قطر التقارب يمكن بواسطة الجذر النوني (كوشي) حيث

$\lambda=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2\cdot 3^n}}$ (3) $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2\cdot 3}=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$ (2)

وبالتالي نصف قطر التقارب هو $R=\frac{1}{\lambda}=3$ (2) بالتالي السلسلة تتقارب من اجل $|z+1|<3$ وهي تمثل محموعة نقاط داخل دائرة مركزها $(-1,0)$ (1) ونصف قطرها $r=3$. (2)

السؤال الثاني:

1- لحساب التكامل $\int_{|z|=1}(2z-1)\,dz$ لحساب التكامل يمكن نعرض $z=1.e^{i\theta}$

مجموعة نقاط الدائرة $|z|=1$ وبيان $\Gamma$ هو النصف العلوي فإن $0\le\theta\le\pi$

$z=e^{i\theta} \Rightarrow dz=i\,e^{i\theta}\,d\theta$

$$I=\int_0^{\pi}(2e^{i\theta}-1)\,i\,e^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^{\pi}(2e^{i2\theta}-e^{i\theta})\,d\theta=i\left[\frac{2}{2i}e^{i2\theta}-\frac{1}{i}e^{i\theta}\right]_0^{\pi}$$

$$=e^{i2\theta}\Big|_0^{\pi}-e^{i\theta}\Big|_0^{\pi}=(e^{i2\pi}-1)-(e^{i\pi}-1)=(1-1)-(-1-1)=2$$

2- لحساب التكامل $I=\oint_{\Gamma}\frac{z^2}{(z-1)^2}\,dz$ يمكن حساب التكامل وفق صيغة كوشي

$$f'(1)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{z^2}{(z-1)^2}\,dz\ ,\quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z\ ,\ n=1$$

$$\Rightarrow f'(1)=2$$

$$2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{z^2}{(z-1)^2}\,dz\Rightarrow\oint_{\Gamma}\frac{z^2\,dz}{(z-1)^2}=4\pi i$$

3- التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{1}{(x-3)(x^2+1)}\,dx$ هو تكامل من الشكل $I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$

فيه $f(z)$ تحليلي في النصف العلوي من المستوي العقدي $Z$ ويحقق ما $\lim_{z\to\infty}z.f(z)=0$

وهنا نعتبر الدالة $f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^2+1)}$ ولها نقاط شاذة $z=3$

قطب بسيط من المرتبة الأولى يقع على المحور الحقيقي و $z=\pm i$ أقطاب بسيطة من المرتبة الأولى فيها $z=i$ يقع في النصف العلوي من المستوي العقدي

بالتالي بالاستفادة من نظرية الرواسب لدينا

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{(z-3)(z^2+1)}\,dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-3)(z^2+1)}\,dz=\left[2\pi i\,Res(i)+\pi i\,Res(3)\right]\cdot\frac{1}{2}$$

$$Res(i)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-3)(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-3)(z+i)}=\frac{1}{(-3+i)(2i)}$$

$$=\frac{1}{-2-6i}$$

$$Res(3)=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1}{(z-3)(z^2+1)}=\lim_{z\to 3}\frac{1}{9+1}=\frac{1}{10}$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2\pi i\,\frac{1}{-2-6i}+\pi i\,\frac{1}{10}\right]=\frac{\pi}{3+i}+\frac{\pi i}{10}$$

| | | |
|---|---|---|
| الجمهورية العربية السورية<br>جامعة طرطوس<br>كلية العلوم | امتحان مادة رياضيات 4<br>سنة 1 – كيمياء ء | تاريخ الامتحان: 2023 / 2 / 8<br>التوقيت: 11.30 - 13.30<br>المدة: ساعتان |

**السؤال الاول ( 21 درجة):** حل المعادلة $z^2+3z+3=0$ واكتب جذورها بالشكل الجبري والشكل المثلثي والشكل الاسي ومن ثم احسب قيمة العبارة $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{12}=?$ .

**أجب عن "ثلاثة أسئلة فقط" من الاسئلة الاربعة التالية (23 درجة لكل سؤال) خلاف ذلك لاتصحح فقط الا اول ثلاث اجابات للطالب:**

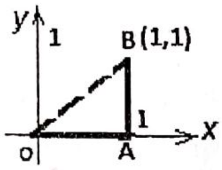
**السؤال الثاني ( 23 درجة):**

أدرس فيما اذا كان التابع التالي تحليليا على C : $f(z)=(x^2-y)+i(y^2-x)$, ومن ثم احسب تكامل هذا التابع

أ -على المسار **OAB** .

ب – على المسار **OB** .

كما هو مبين بالشكل، وقارن بين النتيجتين موضحا سبب التساوي او الاختلاف حسب النتائج.




**السؤال الثالث ( 23 درجة):**

ليكن التابع العقدي: $f(z)=\sin z$ اكتب هذا التابع على الشكل $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ واوجد المنطقة التي يكون هذا التابع تحليليا عليها ومن ثم برهن ان مشتق هذا التابع حسب صيغة كوشي ريمان هو $f'(z)=\cos z$ .

**السؤال الرابع(23 درجة):** احسب التكامل $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta$ بالاعتماد على نظرية الرواسب، استفد من التحويل: $z=e^{i\theta}$ .

**السؤال الخامس(23 درجة):** ليكن التابع : $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z^2+4)^2}$ ،عين اقطاب هذا التابع واحسب الرواسب عند هذه الاقطاب ومن ثم احسب التكاملات التالية:

1 - $\int_{C_1} f(z)dz$ حيث $C_1$ هي الدائرة التي مركزها $O$ ونصف قطرها 1 أي $C_1: |z|=1$ .

2 - $\int_{C_2} f(z)dz$ حيث $C_2$ هي الدائرة التي مركزها $O$ ونصف قطرها 1 أي $C_2: |z|=3$ .

++++++++ انتهت الأسئلة +++++++

د احمد الشيخة

حل المعادلة $z^2+3z+3=0$ واكتب جذورها بالشكل الجبري والمثلثي والاسي ثم احسب $(\sqrt{3}+i)^{12}$

2 درجات

(6) $z^2+3z+3=0$ , $\Delta=(3)^2-4(3)=-3=3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{3}\,i$

(5) * $z_1=\dfrac{-3-\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)}$

(5) * $z_2=\dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{3}\;e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)}$

(5) * $(1+\sqrt{3}i)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}$

$(1+\sqrt{3}i)^{12}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{12}=2^{12}e^{i4\pi}=2^{12}$

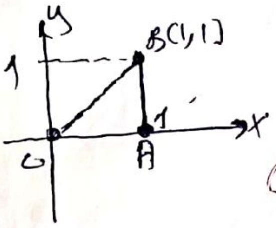
اجب عن سؤالين فقط من الاسئلة الثلاثة التالية (23 درجة لكل سؤال)

---

(2) أ) ادرس فيما اذا كانت الدالة $f(z)=(x^2-y)+(y^2-x)i$ تحليلية على المستوى ثم احسب

(2ج) احسب تكامل الدالة على المسار OAB المبين بالشكل وضح ثم

(2د) تكاملها على القطعة المستقيمة OB قارن بين النتائج ماذا يعنيه وعلل النتيجة.




(5) $u(x,y)=x^2-y$ , $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$ , $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-1$ $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$v(x,y)=y^2-x$ , $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-1$ , $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y$

* $I_1=\int_{OAB}f(z)\,dz=\int_{OA}f(z)\,dz+\int_{AB}f(z)\,dz$ الدالة غير تحليلية

(5) $\int_{OA}f(z)\,dz \xrightarrow[z=x]{y=0} \int_0^1(x^2-ix)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2i\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i$

(5) $\int_{AB}f(z)\,dz \xrightarrow{x=1} \int_0^1[(1-y)+i(y^2-1)]\,i\,dy=\left[\left(y-\frac{1}{2}y^2\right)+i\left(\frac{1}{3}y^3-y\right)\right]_0^1 i=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i$

$z=1+iy \Rightarrow dz=i\,dy$

(5) $\int_{OAB}f(z)\,dz=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\right)=1 \Rightarrow I_1=1$

* $I_2=\int_{OB}f(z)\,dz \xrightarrow[z=x+ix]{y=x} \int_0^1[(x^2-x)+(x^2-x)i](1+i)\,dx=(1+i)^2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{1}{3}i$

(3) $I_1\neq I_2$ بما ان الدالة غير تحليلية وتكاملها يعتمد على المسار

بيّن أن التابع $f(z)=\sin z$ اشتقاقي أينما كان الشكل $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

وجد المنطقة التي يكون تابعاً تحليلياً محققاً معادلات كوشي ريمان وبرهن $(\sin z)'=\cos z$

حل

(5)

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy$$

(6)

$$\cos iy=\frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2}=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=\operatorname{ch}y,\quad \sin iy=\frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i}=i\operatorname{sh}y$$

$$\sin z=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$$

(5)

$$u(x,y)=\sin x\operatorname{ch}y\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\operatorname{sh}y$$

$$v(x,y)=\cos x\operatorname{sh}y\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\operatorname{sh}y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\operatorname{ch}y\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

(6)

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y+i(-\sin x\operatorname{sh}y)$$

$$=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy$$

$$=\cos(x+iy)$$

$$=\cos z$$

---

س4 احسب التكامل $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$ مستعيناً بالتحويل $z=e^{i\theta}$

23

8

$$z=e^{i\theta}\rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta=\int_{c:|z|=1}\frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{iz}dz=\frac{2}{i}\int_C\frac{1}{z^2+4z+1}dz$$

(5)

$$z^2+4z+1=0\Rightarrow\Delta=16-4=12\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$z_1=\frac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$$

$$z_2=\frac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}\Rightarrow I=\frac{1}{2i}\int_C\frac{1}{[z+(2+\sqrt{3})][z-(-2+\sqrt{3})]}dz$$

وبالتالي $z_1$ و $z_2$ كل منهما قطب بسيط للتابع $f(z)$ المكامل وأما $z_2$ هو نقطة التي تقع داخل الدائرة الواحدية وبالتالي

(5)

$$\operatorname{Res}[f(z),z=z_2=-2+\sqrt{3}]=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)=\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{1}{z+(2+\sqrt{3})}=\frac{1}{-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ومنه

(6)

$$I=2\pi i\operatorname{Res}(f(z),z_2)=2\pi i\cdot\frac{2}{i}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$I=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

س 5

23 ليكن التابع $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z^2+4)^2}$

23 احسب اقطاب هذا التابع وادرس نوع كل قطب منه ثم احسب

أ - تكامل هذا التابع على محيط الدائرة $C_1: |z|=1$

ب - تكامل هذا التابع على محيط الدائرة $C_2: |z|=3$

الحل

(5) $z^2+4=0 \Rightarrow (z+2i)(z-2i)=0 \Rightarrow z_1=-2i,\ z_2=2i$

اذاً كلاً من $z_1, z_2$ قطبية من المرتبة الثانية للتابع $f(z)$

(5) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-2i)(z+2i)} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{z\to 2i}(z-2i)^2 f(z) = \dfrac{(2i)^2+1}{(2i+2i)^2} = \dfrac{3}{16} \\ \lim\limits_{z\to -2i}(z+2i)^2 f(z) = \dfrac{(-2i)^2+1}{(-2i-2i)^2} = \dfrac{3}{16} \end{cases}$

(3) $2\pi i\sum(\operatorname{Res} f(z), z_i) = 2i\left(-\dfrac{5}{32}i+\dfrac{5}{32}i\right)=0$

أ - الدائرة الواسعة اي من القطبين غير واقع

(5) $\displaystyle\int_{C_1}\frac{z^2+1}{z^2+4}\,dz = 2\pi i(0)=0$

ب - الدائرة $C: |z|=3$ تحوي كلاً من القطبين وبالتالي

(5) $\displaystyle\int_{C_2}\frac{z^2+1}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\left(\sum \operatorname{Res} f(z)\right) = 2\pi i\left(\frac{3}{4}i-\frac{3}{4}i\right)=0$

$\operatorname{Res}(f(z), z=2i) = \dfrac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{z\to 2i}\left[\dfrac{d}{dz}\left((z-2i)^2 f(z)\right)\right]$

$= \lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{2z(z+2i)^2-(z^2+1)[2(z+2i)]}{(z+2i)^4}$

$= \lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{2z(z+2i)-2(z^2+1)}{(z+2i)^3} = \dfrac{-16+6}{-64i} = -\dfrac{5}{32}i$

$\operatorname{Res}(f(z), z=-2i) = \dfrac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{z\to -2i}\left[\dfrac{d}{dz}\left((z+2i)^2 f(z)\right)\right]$

$= \lim\limits_{z\to -2i}\dfrac{2z(z-2i)^2-(z^2+1)[2(z-2i)]}{(z-2i)^4}$

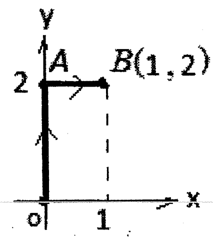
$= \lim\limits_{z\to -2i}\dfrac{2z(z-2i)-2(z^2+1)}{(z-2i)^3} = \dfrac{-16+6}{64i} = \dfrac{5}{32}i$

| | | |
|---|---|---|
| الجمهورية العربية السورية<br>جامعة طرطوس<br>كلية العلوم | امتحان مادة رياضيات 4 (نموذج 2 )<br>سنة 1 – كيمياء ء | تاريخ الامتحان: 26/ 6 / 2022<br>التوقيت: 9 - 11<br>المدة: ساعتان |

**السؤال الاول ( 22 درجة):** حل المعادلة $z^2+2z+4=0$ واكتب جذورها بالشكل المثلثي والشكل الاسي ومن ثم احسب قيمة العبارة $\left(\dfrac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\right)^{20}=?$

**السؤال الثاني ( 22 درجة):**

أدرس فيما اذا كان التابع التالي تحليليا على C : $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy+x)$, ومن ثم احسب تكامل هذا التابع على المسار OAB المبين بالشكل المقابل:




**السؤال الثالث ( 22 درجة):**

ليكن التابع العقدي: $f(z)=sh\,z$ اكتب هذا التابع على الشكل $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ واوجد المنطقة التي يكون هذا التابع تحليليا عليها ومن ثم اوجد مشتق هذا التابع حسب صيغة كوشي ريمان وبين ان: $f'(z)=(sh\,z)'=ch\,z$ .

يُعطى: $$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\quad ch\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2},\ sh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

**أجب عن "سؤال واحد فقط" من السؤالين التاليين (24 درجة لكل سؤال) :**

س4 – احسب التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+3}dx$ بالاعتماد على نظرية الرواسب مع التفصيل بالنسبة للشروط .

س5 – ليكن التابع : $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z-i\pi)^2(z-2)}$ ،عين اقطاب هذا التابع واحسب الرواسب عند هذه الاقطاب ومن ثم احسب التكامل التالي : $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ هي الدائرة التي مركزها $O$ ونصف قطرها 4 أي $C:|z|=4$ .

+++++++ انتهت الأسئلة +++++++

د.احمد حمزة الشيخة

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان مادة رياضيات4 (نموذج 1)
سنة 1–كيمياء

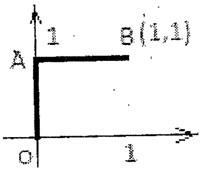
تاريخ الامتحان: 26/ 6 / 2022
التوقيت: 9- 11
المدة: ساعتان

**السؤال الاول( 22 درجة):** حل المعادلة $z^2+2z+4=0$ واكتب جذورها بالشكل المثلثي والشكل الاسي ومن ثم احسب قيمة العبارة $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12}=?$

**السؤال الثاني (22درجة):**

أدرس فيما اذا كان التابع التالي تحليليا على C :, $f(z)=(y^2-x^2-y)+i(2xy+y)$, ومن ثم احسب تكامل هذا التابع

على المسار OAB المبين بالشكل المقابل:




**السؤال الثالث (22درجة):**

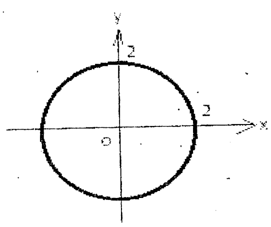
ليكن التابع العقدي: $f(z)=e^{iz}$ اكتب هذا التابع على الشكل $f(z)=u(x;y)+iv(x,y)$ واوجد المنطقة التي يكون هذا التابع تحليليا عليها ومن ثم اوجد مشتق هذا التابع حسب صيغة كوشي ريمان.

**أجب عن "سؤال واحد فقط" من السؤالين التاليين (24 درجة لكل سؤال) خلاف ذلك لاتصحح فقط الا اول اجابة للطالب:**

س4–احسب التكامل $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta$ بالاعتماد على نظرية الرواسب ، استفد من التحويل: $z=e^{i\theta}$.

س5–ليكن التابع : $f(z)=\frac{z^2+2}{(z-i)(z-1)^2}$، عين اقطاب هذا التابع واحسب الرواسب عند هذه الاقطاب ومن ثم احسب التكامل

التالي $\int_C f(z)dz$ : حيث $C$ هي الدائرة التي مركزها $O$ونصف قطرها 2 أي $C: \; |z|=2$.




+++++++ انتهت الأسئلة ++++++++
د احمد الشيخة

حل المعادلة $z^2+2z+4=0$ ثم احسب $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12}$ (س 1)

ثم اكتب جذريها بالشكل المثلثي والأسي (22)

$$* \; z^2+2z+4=0 \Rightarrow \Delta = 4-16 = -12 = 12i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\,i$$

(2)

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{3}\,i}{2} \\ z_2 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}\,i}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ z_2 = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases} =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \\ z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(2)

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

(3)

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12} = \left(\frac{(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}\right)^{12} = \left(\frac{1-3-2i\sqrt{3}}{1+3}\right)^{12}$$

$$= \left(\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = \left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{12}$$

$$= \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{12} = e^{i16\pi} = e^{i8(2\pi)} = 1$$

---

(س 2) (22)

$$f(z) = (y^2-x^2-y)+i(2xy+y) \Rightarrow u = y^2-x^2-y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = y^2-x^2-y \\ v = 2xy+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -2x \;,\; \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y-1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y \;,\; \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x+1 \end{cases}$$

(8)

بما أن $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ إذن الدالة غير تحليلية على $\mathbb{C}$

(14)

$$\int_{OAB} f(z)\,dz = \int_{OA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz$$

$$* \int_{OA} f(z)\,dz : \; x=0 \Rightarrow dx=0 \quad z=iy \;,\; \& \; dz = i\,dy$$

(5)

$$\int_{OA} f(z)\,dz = \int_0^1 [(y^2-y)+i(+y)]\,i\,dy = \int_0^1 [-y+i(y^2-y)]\,dy$$

$$= \left[-\frac{1}{2}y^2+i\left(\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{6}i$$

(5)

$$* \int_{AB} f(z)\,dz : \; y=1 \;,\; z = x+i \Rightarrow dz = dx$$

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_0^1 [-x^2+i(2x+1)]\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+i(x^2+x)\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+2i$$

$$\int_{OAB} f(z)\,dz = \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}i\right)+\left(-\frac{1}{3}+2i\right) = -\frac{5}{6}+\frac{11}{6}i$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\right)^{20} = ?$$

س١ حل المعادلة $z^2+2z+4=0$ واكتب

(22)

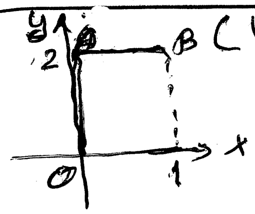
$z^2+2z+4=0 \Rightarrow \Delta = 4-16 = -12 = 12i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\, i$

(8)
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{3}\,i}{2} = -1-\sqrt{3}\,i \\ z_2 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}\,i}{2} = -1+\sqrt{3}\,i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ z_2 = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$$

(4)
$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \\ z_2 = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} x_1 = 1 - i\sqrt{2} \Rightarrow |x_1| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \\ \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin\theta_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}\, e^{i\theta_1} \\ x_2 = 1 + i\sqrt{2} \Rightarrow |x_2| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \\ \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin\theta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}\, e^{i\theta_2} \\ (\ldots)^{20} \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}\, e^{i\theta_1}}{\sqrt{3}\, e^{-i\theta_1}}\right)^{20} = \left(e^{2i\theta_1}\right)^{20} = e^{i40\theta_1} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\theta_1$$

---



$$\int_{OAB} f(z)\,dz = ? \quad , \quad f(z) = \underbrace{(x^2-y^2-x)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2xy+x)}_{v(x,y)}$$

(س٢)

(22)

(8)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x-1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y+1, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$$ f غير تحليلي

(2) $\displaystyle\int_{OAB} f(z)\,dz = \int_{OA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz.$

$\Rightarrow OA: \; x = 0 \Rightarrow dx = 0, \; z = iy \Rightarrow dz = i\,dy$

(5) $\displaystyle\int_{OA} f(z)\,dz = \int_0^2 (-y^2)\, i\,dy = i\left[-\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = -\frac{8}{3}i$

$\Rightarrow AB: \; y = 2 \Rightarrow dy = 0, \; z = x + 2i \Rightarrow dz = dx, \; x \in [0,1]$

(5) $\displaystyle\int_{AB} f(z)\,dz = \int_0^1 [(x^2-x-4) + i(4x+x)]\,dx = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x\right) + i\left(\frac{5}{2}x^2\right)\right]_0^1$

$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 4\right) + \frac{5}{2}i = -\frac{25}{6} + \frac{5}{2}i$

(2) $\displaystyle\int_{OAB} f(z)\,dz = -\frac{8}{3}i - \frac{25}{6} + \frac{5}{2}i = -\frac{25}{6} - \frac{1}{6}i$

س3 (22)

: $f(z)=\operatorname{sh} z$

$$\operatorname{sh} z=\operatorname{sh}(x+iy)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}iy+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}iy$$
$$=\underbrace{\operatorname{sh}x\cos y}_{u(x,y)}+i\underbrace{\operatorname{ch}x\sin y}_{v(x,y)}$$

(12)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{ch}x\cos y\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\operatorname{sh}x\sin y\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}=\operatorname{sh}x\sin y\ ,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\operatorname{ch}x\cos y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow \operatorname{sh} z$$ تحليلية

(10)
$$f'(z)=(\operatorname{sh} z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\operatorname{ch}x\cos y+i\operatorname{sh}x\sin y$$
$$=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}iy+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}iy$$
$$=\operatorname{ch}(x+iy)$$
$$(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$$

أجب عن أحد السؤالين التاليين (24 درجة) لكل سؤال

س4 (24)

احسب $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+3}\,dx$ بالاعتماد على نظرية الرواسب مع التفصيل المناسب للشروط

(11)

نأخذ $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+3}$ تحليلية ما عدا

$$z^2-2z+3=0\Rightarrow\Delta=4-12=-8=8i^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}\,i$$
$$z_1=\frac{2-2\sqrt{2}i}{2}=1-\sqrt{2}i\ \&\ z_2=\frac{2+2\sqrt{2}i}{2}=1+\sqrt{2}i$$

يوجد في النصف العلوي قطب بسيط هو $z_2=1+\sqrt{2}i$ وكذلك لا يوجد أقطاب على المحور الحقيقي و $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$ وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+3}\,dx=2\pi i\sum \operatorname{Res}(f(z),z_j)$$ حيث $z_j$ قطب في النصف العلوي

إذاً

(11)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+3}\,dx=2\pi i\left(\operatorname{Res} f(z),z_2\right)$$
$$f(z)=\frac{1}{z^2-2z+3}=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$
$$\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{(1+\sqrt{2}i)-(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}i}=(\operatorname{Res} f(z),z_2)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+3}\,dx=2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}i}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$f(z)=e^{iz}$ تحليلية على الشكل $f(z)=u+iv$ إيجاد الشرط اللازم في فصل المتكامل

عين ... ثم ... مشتق

3 22

$$* \; e^{iz}=e^{i(x+iy)}=e^{-y+ix}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)=e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x$$

12

$$\begin{cases} u=e^{-y}\cos x \\ v=e^{-y}\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=-e^{-y}\sin x \;,\; \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^{-y}\cos x \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=e^{-y}\cos x \;,\; \dfrac{\partial v}{\partial y}=-e^{-y}\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

ومنه $f(z)=e^{iz}$ تحليلية في كامل المستوي العقدي

10

$$f'(z)=(e^{iz})'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=-e^{-y}\sin x+ie^{-y}\cos x$$
$$=e^{-y}(-\sin x+i\cos x)$$
$$=e^{-y}(i^2\sin x+i\cos x)$$
$$=ie^{-y}(\cos x+i\sin x)$$
$$=ie^{-y}e^{ix}=ie^{-y+ix}=ie^{i(x+iy)}=ie^{iz}$$

~~احسب أحد التكاملين الآتيين~~

4 22

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta \Rightarrow z=e^{i\theta}\Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \;,\; d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta=\int_C\frac{1}{2+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz}$$

باعتبار الدائرة $C$ : $C: |z|=1$

8

$$=\int_C\frac{1}{\frac{4iz+(z^2-1)}{2iz}}\cdot\frac{dz}{iz}=\int_C\frac{2}{z^2+4iz-1}dz$$

8

$$z^2+4iz-1=0 \;;\; \Delta=(4i)^2-4(-1)=-16+4=-12=12i^2$$

$$\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} z_1=\dfrac{-4i-2\sqrt{3}i}{2}=-2i-\sqrt{3}i=(-2-\sqrt{3})i \\ z_2=\dfrac{-4i+2\sqrt{3}i}{2}=-2i+\sqrt{3}i=(-2+\sqrt{3})i \end{cases}$$

$z_1$ هو خارج $C$ و $z_2$ داخل $C$ وهو قطب بسيط للمتكامل

4

$$F(z)=\frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)} \;,\; \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot F(z)=\frac{2}{[(-2+\sqrt{3})i-(-2-\sqrt{3})i]}=\frac{1}{\sqrt{3}i}$$

هو الراسب لـ $F(z)$ عند $z_2$

4

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta=2\pi i\left(\frac{1}{\sqrt{3}i}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$\lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \frac{i^2+2}{(i-1)^2} = \frac{1}{i^2-2i+1} = -\frac{1}{2i} \neq 0$ $\frac{5}{8}$

و $z=i$ قطب بسيط 24

8 $\mathrm{Res}[f(z), z=i] = -\frac{1}{2i}$

$\lim_{z \to 1} (z-1)^2 f(z) = \frac{(1)^2+2}{1-i} = \frac{3}{1-i} = \frac{3(1+i)}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} i \neq 0$

وبالتالي $z=1$ قطب من الرتبة الثانية

$\mathrm{Res}[f(z), z=1] = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[ (z-1)^2 \cdot \frac{z^2+2}{(z-i)(z-1)^2} \right]_{z=1}$

8 $= \left( \frac{z^2+2}{z-i} \right)'_{z=1} = \left[ \frac{2z(z-i) - (z^2+2)}{(z-i)^2} \right]_{z=1}$

$= \frac{1-2i-2}{(1-i)^2} = \frac{-1-2i}{-2i} = \frac{1+2i}{2i}$

النقطتان $i$ و $1$ واقعتان داخل الدائرة $C$ التي مركزها $0$ ونصف قطرها $2$

8 $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \left[ \mathrm{Res}(f(z), z=i) + \mathrm{Res}(f(z), z=1) \right]$

$= 2\pi i \left[ -\frac{1}{2i} + \frac{1+2i}{2i} \right] = 2\pi i$

(2) س

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z-i\pi)^2(z-2)}$$ عين الأقطاب ونوع كل منها ثم احسب

حدد الأقطاب و $\int_C f(z)\,dz$ ; $C: |z|=4$

* $\lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)^2 f(z) = \dfrac{e^{i(i\pi)}}{(i\pi-2)} = \dfrac{e^{-\pi}}{(i\pi-2)} \neq 0$ ; $z=i\pi$ قطب من الرتبة الثانية لـ $f(z)$

(8)

* $\lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \dfrac{e^{2i}}{(2-i\pi)^2} \neq 0 \Rightarrow$ قطب بسيط لـ $f(z)$

* $\left(\operatorname{Res} f(z),\, z=i\pi\right) = \dfrac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i\pi}\left[\dfrac{d}{dz}(z-i\pi)^2 f(z)\right] = \left(\dfrac{e^{iz}}{z-2}\right)'_{z=i\pi}$

(8)

$$= \left[\frac{ie^{iz}(z-2)-e^{iz}}{(z-2)^2}\right]_{z=i\pi} = \left[\frac{e^{iz}(iz-2i-1)}{(z-2)^2}\right]_{z=i\pi}$$

$$= \frac{e^{-\pi}(-\pi-2i-1)}{(i\pi-2)^2}$$

* $\left(\operatorname{Res} f(z),\, z=2\right) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \dfrac{e^{2i}}{(2-i\pi)^2}$

(8)

$$\int_C = 2\pi i \sum\left(\operatorname{Res} f(z), z_i\right) = 2\pi i\left[\frac{e^{-\pi}(-\pi-2i-1)}{(i\pi-2)^2} + \frac{e^{2i}}{(2-i\pi)^2}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{-\pi}(-\pi-2i-1)+e^{2i}}{(i\pi-2)^2}\right]$$

$z^2+2z+4=0$ حل المعادلة (س/1) (22)

$= 4-16 = -12 = 12i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\, i$

$\sqrt{3}\, i \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ z_2 = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$

$\sqrt{3}\, i$

$+ i\sin\frac{4\pi}{3}) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$

$+ i\sin\frac{2\pi}{3}$

$= \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$\sin\theta_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}\, e^{i\theta_1}$

$\Rightarrow \theta_2 = -\theta_1$

$= \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$\theta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}\, e^{i\theta_2}$

$)^{20} = \left(e^{2i\theta_1}\right)^{20} = e^{i40\theta_1}$

---

$f(z) = \underbrace{(x^2-y^2-x)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2xy+x)}_{v(x,y)}$ (س/2) (22)

$= -2y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$ f غير تحليلي

$= 2x$

$+ \int_{AB} f(z)\, dz.$

$z = iy \Rightarrow dz = i\,dy$

$i\,dy = i\left[-\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = -\frac{8}{3}i$

$z = x+2i \Rightarrow dz = dx,\ x \in [0,1]$

$4) + i(4x+x)]]\, dx = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x\right) + i\left(\frac{5}{2}x^2\right)\right]_0^1$

$4) + \frac{5}{2}i = -\frac{25}{6} + \frac{5}{2}i$

$\frac{5}{2}i = -\frac{25}{6} - \frac{1}{16}i$