

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

اسئلة ووراك محلولة

الفيزياء الاحصائية

A 2 Z LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم 0931497960 TEL:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

اسم تصحيحه لقيادته
سنة ثلاثة فزيار - دورة تكمله للعام 2022/2023

السؤال الاول: (30) درجہ

- 1- قوی حالت التوازن الذموريين (10) درجات
- 2- كل صله (5) درجات

السؤال الثاني: (30) درجہ

- 1- حالات التوزع وطاقة كرنك (14) درجہ
- 2- اعزاد درمطاني كاد حاله مع التمثيل واستنتاج حاله التوازن (16) درجہ

السؤال الثالث: (30) درجہ

- 1- حالات التوزع الماكروي الوجهية: 5
- قونج الجسام الى حالات ذموريين كاله (10) درجات
- تحديد حالات المكنة (3)

- حساب العزاد درمطاني للحالات المكنة والذموريين مع التمثيل، سويا 12 درجہ

د. نورا جبار



الدرجة : سبعون
المدة :
اسم الطالب :

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية
الفصل الثاني من العام الدراسي 2024\2025

السؤال الأول : (20 درجة)
اذكر أنواع الجمل (النظم) الترموديناميكية مع ذكر شرط توازن كل منها .

السؤال الثاني : (20 درجة)
اذكر الفرق بين علم الترموديناميك والفيزياء الإحصائية

السؤال الثالث : (30 درجة)
جملة معزولة درجة حرارتها T (K) ثابتة مكونة من جسيمات متميزة A, B يوزعان على ثلاثة سويات للطاقة بحيث تبقى طاقتها الداخلية ثابتة $U=4\epsilon_0$ حيث أن $\epsilon_0 = KT$ (J) فاذا علمت أن طاقة هذه السويات هي : $\epsilon_0 = \epsilon_1, \epsilon_0 = 3\epsilon_2, \epsilon_0 = 4\epsilon_3$ وأن درجة تحلل هذه السويات هي : $g(\epsilon_1)=1, g(\epsilon_2)=2, g(\epsilon_3)=3$ والمطلوب :

- 1- أوجد حالات التوزع الماكروي الممكنة (المحققة لشرط ثبات الطاقة الداخلية).
- 2- أوجد (مع التمثيل) عدد حالات التوزع الميكروي (الموافقة لكل حالة توزع ماكروي ممكنة)، أي الوزن الإحصائي .
- 3- أوجد حالة التوازن من بين حالات التوزع الماكروي الممكنة.

السؤال الرابع : (20 درجة)

احسب درجة حرارة مول واحد من غاز مثالي عندما يمتلك 20% من تعداد جسيماته طاقة المستوى الإلكتروني $\epsilon_e = 500$ J بفرض أن السويات لا متقطعة وأن بقية الجسيمات في السوية $\epsilon_0 = 0$ J . علما أن $R=8.31$ J/mol.K

السؤال الخامس (عملي) : (10 درجات)
عرف حالة التوازن الترموديناميكي.

مع التمنيات بالنجاح والتفوق

طرطوس 2025\7\28

د. نزار شعبان



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
لِلْعِلْمِ وَالْعَمَلِ وَالْحَمْدِ لِلَّهِ
مُتَوَكِّلِينَ

السؤال الأول: (20 درجة)

كل سطح مدار الجول (5) درجة C

السؤال الثاني: (20 درجة)

تعريف كوكب قمر الزموني، والعذراء، والمصالح (10) درجة C

السؤال الثالث: (30 درجة)

الطب النبوي: (20) درجة

الطب النبوي: (10) درجة C

السؤال الرابع: (20) درجة

حاجب البيت (10) درجة C

حاجب البيت (10) درجة C

السؤال الخامس: (10) درجة C

تعريف كوكب الجول (10) درجة C



امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2024 - 2025

س ١ - أجب عن البندين التاليين: (50 درجة).

١- عرف عنصر فراغ الحجم الطوري $d\Gamma$ ، ثم استنتج حجوم العناصر التالية $d\Gamma(P)$ و $d\Gamma(v)$ و $d\Gamma(\epsilon)$
٢- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$)، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\epsilon_1 = 0$ (J) و $\epsilon_2 = KT$ (J) و $\epsilon_3 = 2KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = N$ و $g_2 = g_3 = 1$ والمطلوب:
١- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

٢- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ ، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية:
A- الجسيمات متميزة (كلاسيكية) B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
(بفرض $N=2$ ، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A,B,C)، ومثلها).
٣- بفرض أن الجسيمات متميزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزيع الماكروي الأكثر احتمال (N_1, N_2, N_3) بدلالة العدد N وتابع التخاص Z ، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1 + N_2 + N_3 = N$). ما نوع التوزيع الحاصل؟

٣- أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعتها المطلقة في المجال $(0, 0.8g_H \rightarrow g_H)$.
علماً أن قيم تابع الخطأ الموافقة: $E_r(1) = 0,8427$ و $E_r(0,8) = 0,7421$ مع الرسم التوضيحي المناسب.

س ٢ - أجب عن البنود التالية: (40 درجة).

١- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$).
ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

• أوجد قيمة السرعة الأكثر احتمالاً g_H بدلالة α ، ثم أوجد قيمة سرعتين g و $\overline{g^2}$ والتشتت $\overline{\Delta g^2}$ بدلالة g_H .

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \frac{n!}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n \geq 0 \text{ (زوجي)} \\ \frac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n = 2m+1 \text{ (فردية)} \end{cases}$$

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية

٢- جملتان تمتلكان نفس العدد من السويات والجسيمات الكلاسيكية، فإذا علمت أن سويات الجملة الأولى متحللة والثانية غير متحللة، والسؤال: أي الجملتين يمتلك أكبر عدد لحالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: 2025 / /

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2024 - 2025 (تسعون درجة)

10

ج 1: (50 درجة).

1- يعطى عنصر الفراغ الطوري $\Gamma(q, P)$ بدلالة إحداثيي الموضع q والاندفاع P المعممين. فيكون عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$ بدلالة عنصري الحجم dq_v و dP_v (الخاصين بالموضع والاندفاع على الترتيب)، بالشكل:

$$d\Gamma = dq_v \cdot dP_v \quad (1)$$

نفرض للسهولة أن عنصر الحجم الخاص بالموضع مساوياً للحجم $dq_v = V$ لأنه يمثل جداءات لعناصر الموضع.

عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

نأخذ عنصر الحجم الخاص بالاندفاع مساوياً لعنصر حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع P ذاته كما يلي:

$$dP_v = d\left(\frac{4}{3}\pi P^3\right) = 4\pi P^2 dP$$

بالتعويض في (1) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

$$d\Gamma(P) = 4\pi V P^2 dP \quad (2)$$

عنصر فراغ السرعة الطوري:

نجده من علاقة كمية الحركة بالسرعة حسب العلاقة:

$$P = m\mathcal{G} \Rightarrow dP = m d\mathcal{G}$$

وبالتعويض في (2) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ السرعة الطوري:

$$d\Gamma(\mathcal{G}) = 4\pi V m^3 \mathcal{G}^2 d\mathcal{G} \quad (3)$$

عنصر فراغ الطاقة الطوري:

نجده من عبارة الطاقة الحركية (باعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المدروس هي طاقة حركية فقط).

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \mathcal{G}^2 = \frac{P^2}{2m} \quad (*)$$

وكما هو واضح يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة الاندفاع من (*) في (2) كما يلي:

$$P^2 = 2m\varepsilon \Rightarrow P = \sqrt{2m\varepsilon} \Rightarrow dP = \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على عنصر فراغ الطاقة الطوري:

$$d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V 2m\varepsilon \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 2\pi V \sqrt{2m} \sqrt{\varepsilon} 2m d\varepsilon$$

$$d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon \quad (4)$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_0 = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! (N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(N + 3 - 1)!}{N! (3 - 1)!} = \frac{(N + 2)!}{2N!} = \frac{(N + 2)(N + 1)N!}{2N!} = \frac{(N + 2)(N + 1)}{2}$$

2- طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)} = \sum_i N_i \varepsilon_i = (N-1) \times 0 + 1 \times KT + 0 \times 2KT = KT$$

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = N! \left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1^1}{1!} \frac{1^0}{0!} \right) = N N^{N-1} = N^N$$

B - الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{(N-1+N-1)! (1+1-1)! (0+1-1)!}{(N-1)! (N-1)! 1! (1-1)! 0! (1-1)!} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\bar{N}-1, \bar{1}, \bar{0})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{N!}{(N-1)! (N-N+1)! 1! (1-1)! 0! (1-0)!} = N$$

الحسابات الرقمية والتمثيل: الحالة المطلوبة هي $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{0})$ و $g_2 = g_3 = 1$ و $g_1 = 2$

$$A- \text{الجسيمات متمايزة (كلاسيكية): } W_{M-B} = N^N = 2^2 = 4$$

$$B- \text{الجسيمات بوزونات: } W_{B-E} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} = \frac{2!}{1} = 2$$

$$C- \text{الجسيمات فيرميونات: } W_{F-D} = N = 2$$

٣- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد نحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \epsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = N e^{-0} + 1 e^{-1} + 1 e^{-2} = N + e^{-1} + e^{-2}$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i = g_i e^{\alpha + \beta \epsilon_i} = e^{\alpha} g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{KT}} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{KT}}$$

$$\text{فيكون: } N_1 = \frac{N}{Z} N e^{-0} = \frac{N^2}{Z} \quad \text{و} \quad N_2 = \frac{N}{Z} 1 e^{-1} = \frac{N}{Z} e^{-1} \quad \text{و} \quad N_3 = \frac{N}{Z} 1 e^{-2} = \frac{N}{Z} e^{-2}$$

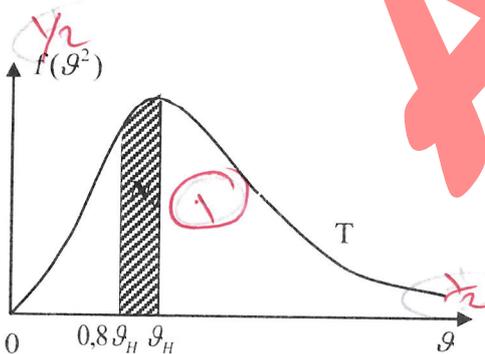
ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{N^2}{Z} + \frac{N}{Z} e^{-1} + \frac{N}{Z} e^{-2} = \frac{N}{Z} (N + e^{-1} + e^{-2}) = \frac{N}{Z} Z = N$$

لإيجاد نوع التوزيع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_1}{N_3} = N e^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_2}{N_3} = \frac{e^{-1}}{e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_1}{N_2} = N e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

نستنتج أن: $N_1 > N_2 > N_3$ فالتوزيع طبيعي.



٣- لدينا قانون عدد الجسيمات التي تنحصر سرعتها في المجال $N_o(0 \rightarrow g_o)$

$$N_o(0 \rightarrow g_o) = N \left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} \right] \quad (*)$$

نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_o(0,8g_H \rightarrow g_H) = N_o(0 \rightarrow g_H) - N_o(0 \rightarrow 0,8g_H)$$

نستخدم (*) في التعبير عن قيمة كل حد من المجال

كما يلي: $N_o(0 \rightarrow g_H)$ و $N_o(0 \rightarrow 0,8g_H)$

$$N_o(0,8g_H \rightarrow g_H) = N \left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 1 \times e^{-(1)^2} \right] - N \left[E_r(0,8) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 0,8 \times e^{-(0,8)^2} \right]$$

$$= N [0,8427 - 0,4153] - N [0,7421 - 0,4758] = (42,74\% - 26,63\%) N = 16,11\% N$$

ج ٢: (40 درجة)

١: إيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:
35) نتطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعتها المطلقة وفق توزيع M-B في مجال السرعات $[g, g+dg]$.

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta m g^2/2} g(g) dg \quad (2)$$

ونعوض عن المقدار $g(g) dg$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = CV 4\pi m^3 g^2 dg \quad (2)$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV (2\pi mKT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\epsilon = m g^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi mKT)^{3/2}} e^{-m g^2/2KT} CV 4\pi m^3 g^2 dg \quad (2)$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg \quad (1)$$

نعتبر أن $\alpha = m/2KT$

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg \quad (2)$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزيع السرعة بدلالة تابع كثافة السرعة كما يلي:

$$dF(g) = \frac{dN(g)}{N} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = f(g^2) dg \quad (2)$$

حيث يعبر $f(g^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} \quad (2)$$

للبرهان على أن $f(g^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $[0 \rightarrow \infty[$.

$$\int_0^{\infty} f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^2 e^{-\alpha g^2} dg \quad (1)$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^{\infty} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(g) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1 \quad (2)$$

• السرعة الأكثر احتمالاً g_H : نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(g^2)}{\partial g} = 0 \Rightarrow 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} (2g e^{-\alpha g^2} - 2\alpha g^3 e^{-\alpha g^2}) = 0 \Rightarrow 2g e^{-\alpha g^2} (1 - \alpha g^2) = 0 \quad (1)$$

الحلول الناتجة عندما $g e^{-\alpha g^2} = 0$ هي $g = \infty$ و $g = 0$ وهي غير مقبولة. وعندما $1 - \alpha g^2 = 0$ نجد:

$$g_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (2)$$

القيمة الوسطى للسرعة المطلقة \bar{g} :

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^{\infty} f(g^2) dg = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{g} = \int_0^{\infty} g f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^3 e^{-\alpha g^2} dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} g_H \approx 1,13 g_H$$

القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\bar{g^2}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^{\infty} f(g^2) dg = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{g^2} = \int_0^{\infty} g^2 f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^4 e^{-\alpha g^2} dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2} g_H^2$$

$$\Delta g^2 = \bar{g^2} - \bar{g}^2 = \frac{3}{2} g_H^2 - \frac{4}{\pi} g_H^2 = \frac{3\pi - 8}{2\pi} g_H^2 \approx \frac{1,43}{6,28} g_H^2 \approx 0,228 g_H^2$$

التشتت

(3)

$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N! (N_e - 1)!}$$

يعطى عدد حالات التوزيع الماكروي للجلمة الكلاسيكية بالقانون التالي

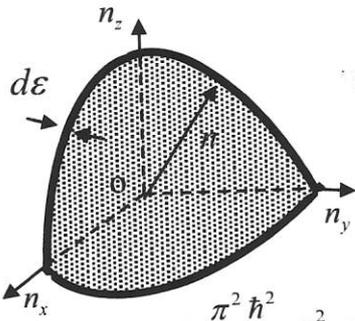
وكما هو واضح فليس لدرجة التحلل أي دور في عدد حالات التوزيع الماكروي، فالجملتان تملكان نفس العدد.

(2)

5

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2023 - 2024 (تسعون درجة)

ج 1: (50 درجة)



1- بما أن عدد الكم الرئيسي n موجب دوماً، حيث $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ فيكون عدد السويات $N(\epsilon)$ المتوضعة في الحيز الموجب للمساقط $n_{x,y,z}$ الموضح بالشكل

مساوياً لـ $1/8$ العدد الكلي للسويات المتوضعة داخل فراغ الكرة (التي نصف قطرها n)

$$N(\epsilon) = \frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi n^3 \right) \quad (*)$$

وبما أن صيغة العدد الكمي الرئيسي بدلالة السوية والحجم هي:

$$n = \frac{2(2m)^{1/2}}{h} (\epsilon_n)^{1/2} V^{1/3} \quad (**)$$

للحصول على عدد السويات $N(\epsilon)$ المتوضعة داخل الكرة (تابع توزع السويات داخل الكرة) نعوض (***) في (*) بعد إزالة الدليل n المتعلق بالسوية ϵ_n بالشكل التالي:

$$N(\epsilon) = \frac{4}{3} \pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} (\epsilon)^{3/2} \quad (***)$$

وحيث أن تابع التوزع $N(\epsilon)$ يعبر عن عدد السويات، فإن مفاضلته تعبر عن عدد السويات المتوضعة في المجال الطاقى $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$. لذا نغرض تابع كثافة التوزع $g(\epsilon)$ (الذي يساوي مشتقة تابع التوزع بالنسبة لـ ϵ) كما يلي:

$$\frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = g(\epsilon) = 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} \Leftrightarrow dN(\epsilon) = g(\epsilon) d\epsilon$$

نستنتج مما سبق أن تابع كثافة التوزع $g(\epsilon)$ يعبر عن كثافة التنضد أو درجة التحلل لحالات الانتقال المسمومة، ويأخذ الشكل:

$$g(\epsilon) = 2\pi C V (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} \quad ; C = 1/h^3$$

وبما أن صيغة عنصر فراغ الطاقة الطوري

$$d\Gamma(\epsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

نستنتج العلاقة المطلوبة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري.

$$dN(\epsilon) = g(\epsilon) d\epsilon = C d\Gamma(\epsilon)$$

1- الحركة في الفراغ: بداية نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الاندفاع

$$C = 1/h^3 \text{ و } dP_V = d\left(\frac{4}{3}\pi P^3\right) \text{ و } V = \int dq_V = \int dx dy dz$$

$$dN(P) = g(P) dP = C d\Gamma(P) = \frac{C}{1/h^3} \frac{dq_V}{V = \int dx dy dz} \frac{dP_V}{d\left(\frac{4}{3}\pi P^3\right)} = \frac{V}{h^3} d\left(\frac{4}{3}\pi P^3\right) = \frac{V}{h^3} 4\pi P^2 dP$$

وبالاستفادة من علاقة الطاقة بالاندفاع نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الطاقة.

$$P^2 = 2m\epsilon \Rightarrow P = \sqrt{2m\epsilon} \Rightarrow dP = \frac{m d\epsilon}{\sqrt{2m\epsilon}} \quad (*)$$

$$dN(\epsilon) = g(\epsilon) d\epsilon = C d\Gamma(\epsilon) = 4\pi \frac{V}{h^3} 2m\epsilon \frac{m d\epsilon}{\sqrt{2m\epsilon}} = 4\pi \frac{V}{2h^3} \sqrt{2m\epsilon} 2m d\epsilon = 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (a)$$

$$\Rightarrow g(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} = Cte \epsilon^{1/2}$$

تمثل العلاقة (a) معادلة جزء من قطع مكافئ كما في الحالة A من الشكل

٢- الحركة على السطح: بداية نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الاندفاع

وذلك باعتبار $S = \int dq_v = \int dx dy$ و $dP_v = d(\pi P^2)$ و $C = 1/h^2$

$$dN(P) = g(P) dP = C d\Gamma(P) = \frac{C}{1/h^2} \frac{dq_v}{S=\int dx dy} \frac{dP_v}{d(\pi P^2)} = \frac{S}{h^2} d(\pi P^2) = \frac{S}{h^2} 2\pi P dP$$

وبالاستفادة من (*) نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الطاقة.

$$dN(\varepsilon) = g(\varepsilon) d\varepsilon = C d\Gamma(\varepsilon) = \frac{S}{h^2} 2\pi \sqrt{2m\varepsilon} \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = \frac{S}{h^2} 2\pi m d\varepsilon$$

(b)

$$\Rightarrow g(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{S}{h^2} 2\pi m = Cte$$

تمثل العلاقة (b) معادلة مستقيم كما في الحالة B من الشكل

٣- الحركة على مستقيم: بداية نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الاندفاع

وذلك باعتبار $L = \int dq_v = \int dx$ و $dP_v = dP_x$ و $C = 1/h$

$$dN(P) = g(P) dP = C d\Gamma(P) = \frac{C}{1/h} \frac{dq_v}{L=\int dx} \frac{dP_v}{dP_x} = \frac{L}{h} dP_x$$

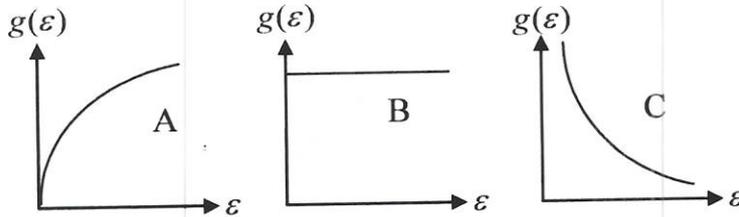
وبالاستفادة من (*) نوجد عدد الحالات الكوانتية بدلالة الطاقة.

$$dN(\varepsilon) = g(\varepsilon) d\varepsilon = C d\Gamma(\varepsilon) = \frac{L}{h} \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = \frac{L}{2h} \frac{2m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = \frac{L}{2h} \sqrt{2m} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon$$

(c)

$$\Rightarrow g(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{L}{2h} \sqrt{2m} \varepsilon^{-1/2} = Cte \varepsilon^{-1/2}$$

تمثل العلاقة (c) معادلة فرع من قطع زائد كما في الحالة C من الشكل



٣- ١- نحسب Z من صيغة التجميع في المجال $[0 \rightarrow \infty]$ كما يلي:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{\beta \varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{n\beta \varepsilon_0}$$

نفرض $x = e^{\beta \varepsilon_0} < 1$

لأن $e^{\beta \varepsilon_0} = e^{-\varepsilon_0/KT} = (1/e^{\varepsilon_0/KT}) < 1$ حيث يكون $e^{\varepsilon_0/KT} > 1$ في الحالتين $\varepsilon_0 > KT$ و $\varepsilon_0 < KT$:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

وبفرض $m = n+1$ يمكننا كتابة Z بدلالة مشتق سلسلة أخرى S_m كما يلي:

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d x^m}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

وبإيجاد عبارة الحد العام للسلسلة الجديدة S_m (باعتبارها سلسلة هندسية أساسها $x = e^{\beta \varepsilon_0} < 1$):

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \dots = 1 \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \frac{1-0}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$Z = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx} (1-x)^{-1} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = (1-e^{\beta \varepsilon_0})^{-2}$$

٢- نوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

$$\ln Z = \ln(1-e^{\beta \varepsilon_0})^{-2} = -2 \ln(1-e^{\beta \varepsilon_0})$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -2 \frac{-\varepsilon_0 e^{\beta \varepsilon_0}}{1-e^{\beta \varepsilon_0}} = \frac{2\varepsilon_0}{e^{-\beta \varepsilon_0} - 1} = \frac{2\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/KT} - 1}$$

من أجل $\varepsilon_0 \ll KT$ ننشر التابع الأسّي ونكتفي بالحدين الأول والثاني وبالتعويض نجد:

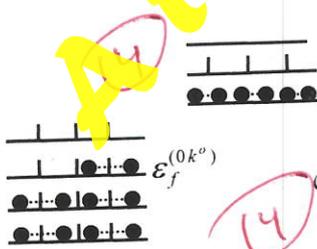
$$\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_0}{1 + \frac{\varepsilon_0}{KT}} \approx 2KT$$

من أجل $\varepsilon_0 = KT$ نجد: $\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_0}{e-1} \approx 1,16KT \Rightarrow \bar{\varepsilon} > KT$

من أجل $\varepsilon_0 \gg KT$ يصبح المقدار $e^{\varepsilon_0/KT} \gg 1$ ويهمل الواحد الموجود في المقام نجد: $\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/KT}} \approx 0$

ج ٢: (40 درجة)

١٥



عند درجة الصفر المطلق تهبط كافة البوزونات الموزعة على سويات الطاقة العليا إلى السوية الدنيا وتخضع في هذه الحالة لتكاثف أينشتاين، كما بالشكل.

عند درجة الصفر المطلق تهبط كافة الفيرميونات الموزعة على سويات الطاقة العليا إلى السويات الدنيا بحيث يحدث ملئ للحجرات بدءاً من السوية الدنيا بمعدل فيرميون واحد لكل حجرة. والسوية التي ينتهي عندها الملئ تدعى سوية فيرمي. وعليه نعرف ما يلي:

تعريف سوية فيرمي: هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات (عند درجة الصفر المطلق)، حيث تكون السويات الدنيا $\varepsilon < \varepsilon_f$ مشغولة بالكامل (ممتلئة)، أما العليا $\varepsilon > \varepsilon_f$ فتكون فارغة تماماً.

٢- لدينا قانون عدد الجسيمات التي تنحصر سرعتها في المجال $N_o(0 \rightarrow \vartheta_o)$

$$N_o(0 \rightarrow \vartheta_o) = N \left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} \right] \quad (*)$$

نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_o(0,8 \vartheta_H \rightarrow \vartheta_H) = N_o(0 \rightarrow \vartheta_H) - N_o(0 \rightarrow 0,8 \vartheta_H)$$

نستخدم (*) في التعبير عن قيمة كل حد من المجال

كما يلي: $N_o(0 \rightarrow \vartheta_H)$ و $N_o(0 \rightarrow 0,8 \vartheta_H)$

$$N_o(0,8 \vartheta_H \rightarrow \vartheta_H) = N \left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 1 \times e^{-(1)^2} \right] - N \left[E_r(0,8) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 0,8 \times e^{-(0,8)^2} \right]$$

$$= N [0,8427 - 0,4153] - N [0,7421 - 0,4758] = (42,74\% - 26,63\%) N = 16,11\% N$$

٨

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^1}{1!} \frac{1^0}{0!} \right) = 24$$



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{2})$

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(0+2-1)!}{0!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 1 \times 1 = 3$$

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(0+2-1)!}{0!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 1 \times 2 = 6$$

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{0!(2-0)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

مكتبة
A to Z



امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2023 - 2024

س1- أجب عن البنود التالية: (50 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(B-E)}$ لتوزيع بوزة - آينشتين، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$)، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\epsilon_1 = 0$ (J) و $\epsilon_2 = KT$ (J) و $\epsilon_3 = 2KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = N$ و $g_2 = g_3 = 1$. والمطلوب:
1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\bar{N} - 1, \bar{1}, \bar{0})$ ، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية:

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

(بفرض $N = 2$ ، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A, B, C)، ومثلها.)

3- بفرض أن الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزيع الماكروي الأكثر احتمال (N_1, N_2, N_3) بدلالة العدد N وتابع التخاص Z ، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1 + N_2 + N_3 = N$). ما نوع التوزيع الحاصل؟

4- إذا كانت الجسيمات بوزونات: ماذا يمكنك القول عن حالة ودرجة حرارة الجملة الواقعة بحالة التوزيع الماكروي $(\bar{N} - 1, \bar{1}, \bar{0})$ ، مثل بالرسم هذه الحالة (لا تتقيد بدرجة التحلل المعطاة).

5- إذا كانت الجسيمات فيرميونات: والجملة متعددة سويات الطاقة ومتعددة التحلل وواقعة عند درجة الصفر المطلق، المطلوب: مثل بالرسم شكلاً توضح عليه توزيع الفيرميونات على السويات، ثم اعط تعريفاً واحداً لسوية فيرمي.

3- أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعتها المطلقة في المجال $(N_0(\vartheta_H \rightarrow 1,6 \vartheta_H))$.

علماً أن قيم تابع الخطأ الموافقة: $E_r(1) = 0,8427$ و $E_r(1,6) = 0,9763$

س2- أجب عن البنود التالية: (40 درجة).

1- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$). ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

• أوجد قيمة السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H بدلالة α ، ثم أوجد قيمة سرعتين $\bar{\vartheta}$ و $\overline{\vartheta^2}$ والتشتت $\Delta\vartheta^2$ بدلالة ϑ_H .

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \frac{n!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n \text{ زوجي } \vartheta n \geq 0 \\ \frac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n \text{ فردي } \vartheta n = 2m+1 \vartheta m \geq 0 \end{cases}$$

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية

2- جملتان تمتلكان نفس العدد من السويات والجسيمات الكلاسيكية، فإذا علمت أن سويات الجملة الأولى متحللة والثانية غير متحللة، والسؤال: أي الجملتين يمتلك أكبر عدد لحالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 19 / 2 / 2024

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2023 - 2024 (تسعون درجة)

ج 1: (50 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{i(B-E)}$ max

15

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (B-E). المعطاة بالعلاقة: $W_{B-E} = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!}$ وحيث أن الجسيمات هي بوزونات (كمية) فيكون عددها N_i ودرجة تحلل سويات الطاقة g_i كبيرين، لذا يُهمل الواحد في

توزيع (B-E) وتصبح عبارة الوزن الإحصائي بالشكل التالي: $W_{B-E} \approx \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i! g_i!}$

نوجد بدايةً $\ln(W_{B-E})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{B-E})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{B-E}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{B-E}) \approx \ln \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i! g_i!} = \sum_i [\ln(N_i + g_i)! - \ln N_i! - \ln g_i!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{B-E}) \approx \sum_i [(N_i + g_i) \ln(N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i]$$

بما أن W_{B-E} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{B-E}) = \frac{\partial \ln(W_{B-E})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [(N_i + g_i) \ln(N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[\ln(N_i + g_i) + \frac{N_i + g_i}{N_i + g_i} - \ln N_i - \frac{N_i}{N_i} \right] dN_i = \sum_i [\ln(N_i + g_i) - \ln N_i] dN_i$$

$$d \ln(W_{B-E}) \approx \sum_i \ln \frac{N_i + g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{B-E}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{N_i + g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{N_i + g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{N_i + g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} - 1 \Rightarrow \boxed{N_{i(B-E)} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} - 1}}$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! (N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(N + 3 - 1)!}{N! (3 - 1)!} = \frac{(N + 2)!}{2N!} = \frac{(N + 2)(N + 1)N!}{2N!} = \frac{(N + 2)(N + 1)}{2}$$

2- طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)} = \sum_i N_i \varepsilon_i = (N-1) \times 0 + 1 \times KT + 0 \times 2KT = KT$$

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متميزة (بيكية)

30

3

1

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = N! \left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1^1}{1!} \frac{0^0}{0!} \right) = N N^{N-1} = N^N \quad (3)$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{(N-1+N-1)! (1+1-1)! (0+1-1)!}{(N-1)! (N-1)! 1! (1-1)! 0! (1-1)!} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} \quad (3)$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{N!}{(N-1)! (N-N+1)! 1! (1-1)! 0! (1-0)!} = N \quad (3)$$

الحسابات الرقمية والتمثيل: الحالة المطلوبة هي $(\overbrace{1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ و $g_1 = 2$ و $g_2 = g_3 = 1$

A- الجسيمات متميزة (كلاسيكية): $W_{M-B} = N^N = 2^2 = 4$

B- الجسيمات بوزونات: $W_{B-E} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} = \frac{2!}{1} = 2$

C- الجسيمات فيرميونات: $W_{F-D} = N = 2$

فيديو
A to Z

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = N e^{-0} + 1 e^{-1} + 1 e^{-2} = N + e^{-1} + e^{-2}$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} = e^{\alpha} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT}$$

$$\text{فيكون: } N_1 = \frac{N}{Z} N e^{-0} = \frac{N^2}{Z} \quad \text{و} \quad N_2 = \frac{N}{Z} 1 e^{-1} = \frac{N}{Z} e^{-1} \quad \text{و} \quad N_3 = \frac{N}{Z} 1 e^{-2} = \frac{N}{Z} e^{-2}$$

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{N^2}{Z} + \frac{N}{Z} e^{-1} + \frac{N}{Z} e^{-2} = \frac{N}{Z} (N + e^{-1} + e^{-2}) = \frac{N}{Z} Z = N$$

لإيجاد نوع التوزيع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

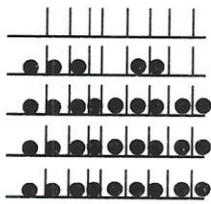
$$\frac{N_1}{N_3} = N e^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_2}{N_3} = \frac{e^{-1}}{e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_1}{N_2} = N e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

نستنتج أن: $N_1 > N_2 > N_3$ فالتوزيع طبيعي.

4- عندما تكون الجسيمات بوزونات: فتكون الجملة الواقعة وفق التوزيع الماكروي $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ بحالة تكاتف،



ودرجة حرارتها هي درجة آينشتاين



$f(\varepsilon)$

5- عندما تكون الجسيمات فيرميونات: تتوضع الفيرميونات عند درجة الصفر المطلق

على كافة السويات الدنيا بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل.

- تكون كافة السويات الأدنى من سوية فيرمي $f(\varepsilon)$ مملوءة (مشغولة) بمعدل

فيرميون واحد لكل درجة تحلل والسويات الأعلى فارغة تماماً.

- سوية فيرمي هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات

3- نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_o(\mathcal{G}_H \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) = N_o(0 \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) - N_o(0 \rightarrow \mathcal{G}_H)$$

نستخدم (*) في التعبير عن قيمة كل من $N_o(0 \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H)$ و $N_o(0 \rightarrow \mathcal{G}_H)$ كما يلي:

$$N_o(\mathcal{G}_H \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) = N \left[E_r(1,6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} 1,6 e^{-(1,6)^2} \right] - N \left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} 1 e^{-(1)^2} \right]$$

$$N_o(\mathcal{G}_H \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) = N \left[E_r(1,6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1,6}{e^{(1,6)^2}} - E_r(1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{e} \right]$$

وبإجراء الحسابات والتعويض عن $E_r(1,6)$ و $E_r(1)$ بقيمتيهما من جدول الخطأ نجد:

$$N_o(\mathcal{G}_H \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) = N [0,9763 - 0,1396 - 0,8427 + 0,4151] = 0,4091 N = 40,91 \% N$$

ج 2: (40 درجة).

1: لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\mathcal{G}^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعتها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\mathcal{G}, \mathcal{G} + d\mathcal{G}]$.

$$dN(\mathcal{G}) = \frac{N}{Z} e^{\beta m \mathcal{G}^2/2} g(\mathcal{G}) d\mathcal{G}$$

ونعوض عن المقدار $g(\mathcal{G}) d\mathcal{G}$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة السطال وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\mathcal{G}) d\mathcal{G} = C d\Gamma(\mathcal{G}) = CV 4\pi m^3 \mathcal{G}^2 d\mathcal{G}$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m \mathcal{G}^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\mathcal{G}) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-m \mathcal{G}^2/2KT} CV 4\pi m^3 \mathcal{G}^2 d\mathcal{G}$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\mathcal{G}) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2} d\mathcal{G}$$

نعتبر أن $\alpha = m/2KT$

$$dN(\mathcal{G}) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2} d\mathcal{G}$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرعة بدلالة تابع كثافة السرعة كما يلي:

$$dF(\mathcal{G}) = \frac{dN(\mathcal{G})}{N} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2} d\mathcal{G} = f(\mathcal{G}^2) d\mathcal{G}$$

حيث يعبر $f(\mathcal{G}^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\mathcal{G}^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2}$$

للبرهان على أن $f(\mathcal{G}^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

$$\int_0^{\infty} f(\mathcal{G}^2) d\mathcal{G} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2} d\mathcal{G}$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^{\infty} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2} d\mathcal{G} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(\mathcal{G}) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

• السرعة الأكثر احتمالاً g_H : نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(g^2)}{\partial g} = 0 \Rightarrow 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} (2g e^{-\alpha g^2} - 2\alpha g^3 e^{-\alpha g^2}) = 0 \Rightarrow 2g e^{-\alpha g^2} (1 - \alpha g^2) = 0$$

الحلول الناتجة عندما $g e^{-\alpha g^2} = 0$ هي $g = 0$ و $g = \infty$ وهي غير مقبولة. وعندما $1 - \alpha g^2 = 0$ نجد:

$$g_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

القيمة الوسطى للسرعة المطلقة \bar{g} :

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^{\infty} f(g^2) d g = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{g} = \int_0^{\infty} g f(g^2) d g = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^3 e^{-\alpha g^2} d g = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} g_H \approx 1,13 g_H$$

القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\overline{g^2}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^{\infty} f(g^2) d g = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\overline{g^2} = \int_0^{\infty} g^2 f(g^2) d g = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^4 e^{-\alpha g^2} d g = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{3}{8} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^5} = \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2} g_H^2$$

$$\Delta g^2 = \overline{g^2} - \bar{g}^2 = \frac{3}{2} g_H^2 - \frac{4}{\pi} g_H^2 = \frac{3\pi - 8}{2\pi} g_H^2 \approx \frac{1,43}{6,28} g_H^2 \approx 0,228 g_H^2$$

التشتت

-2 يعطى عدد حالات التوزيع الماكروي للجملة الكلاسيكية بالقانون التالي $N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! (N_\varepsilon - 1)!}$

وكما هو واضح فليس لدرجة التحلل أي دور في عدد حالات التوزيع الماكروي، فالجملتان تملكان نفس العدد.



اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2022 - 2023

س 1 - أجب عن البنود التالية: (55 درجة).

1- بفرض أن تابع كثافة السرعة المطلقة لتوزيع $M-B$ في المجال $[0 \rightarrow \infty[$ هو $f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$

- أوجد قيمة السرعة الأكثر احتمالاً g_H بدلالة α ، ثم أوجد قيمة السرعتين \bar{g} و $\overline{g^2}$ والتشتت Δg^2 بدلالة g_H .
- ارسم الخط البياني لتابع الكثافة $f(g^2)$ عند درجة حرارة محددة T ، وحدد عليه كل من g_H و \bar{g} و $\sqrt{\overline{g^2}}$.

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \frac{n!}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{n+1/2}} & ; n \text{ زوجي } (n \geq 0) \\ \frac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n \text{ فردي } (n = 2m+1, m \geq 0) \end{cases}$$

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة (J) $\varepsilon_1 = KT$ و $\varepsilon_2 = 2KT$ و $\varepsilon_3 = 3KT$ ، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$. والمطلوب:
1- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2, N_3)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$ ، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- استند من صيغتي تابع التحاص $Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ وتابع الكثافة الاحتمالي $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \varepsilon_i}$ في إيجاد ما يلي:

- أ- القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ ، والانحراف المعياري ε^2 ، والتشتت $\Delta \varepsilon^2$ ، بدلالة تابع التحاص Z والمشتقة $\partial/\partial \beta$.
- ب- صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

س 2 - أجب عن البندين التاليين: (35 درجة).

1- إذا علمت أن الطاقة الداخلية لغاز البوزون عند درجات حرارة تفوق درجة التكاثف $T > T_B$ هي ذاتها

$$U_{\max} = \frac{3}{2} NKT = U_{\text{Clas}}$$

وعند الدرجات الأقل $T \leq T_B$ تأخذ الصيغة $U_{\min} \approx 0,77 NKT \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$. والمطلوب:

- أوجد السعات الحرارية $C_{V\max}$ و $C_{V\min}$ لمجال الحرارة، وارسم الخط البياني لتحويلات C_V بدلالة T مع الشرح.
- برهن أن الأنتروبية تعطى وفق الصيغة $S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$ ، ثم أوجد قيمتها عند الطاقات العالية والمنخفضة.

2- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي.

●	●	C
●	●	AB
●	●	AB

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: 19/14

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2022 - 2023 (تسعون درجة)

ج 1: (55 درجة)

السرية الأكثر احتمالاً g_H : نجدتها باشتقاق تابع الكثافة $f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$ وإعداد المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(g^2)}{\partial g} = 0 \Rightarrow 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} (2g e^{-\alpha g^2} - 2\alpha g^3 e^{-\alpha g^2}) = 0 \Rightarrow 2g e^{-\alpha g^2} (1 - \alpha g^2) = 0$$

الحلول الناتجة عندما $e^{-\alpha g^2} = 0$ هي $g = \infty$ و $g = 0$ وهي غير مقبولة.

وعندما $1 - \alpha g^2 = 0$ نجد: $g_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

القيمة الوسطى للسرعة المطلقة \bar{g} :

نجدتها باتتبع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(g^2) dg = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{g} = \int_0^\infty g f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty g^3 e^{-\alpha g^2} dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} g_H \approx 1,13 g_H$$

القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\overline{g^2}$:

نجدتها باتتبع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(g^2) dg = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

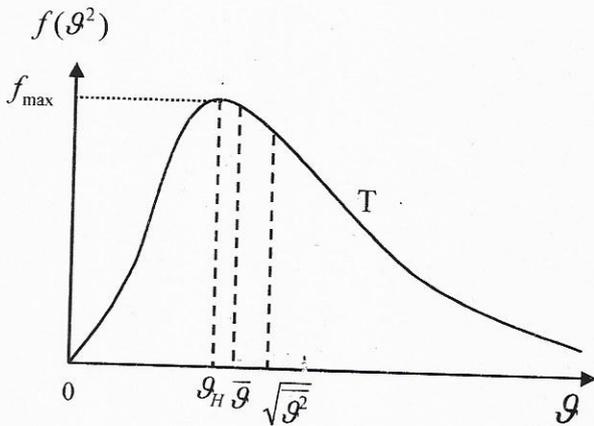
$$\overline{g^2} = \int_0^\infty g^2 f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty g^4 e^{-\alpha g^2} dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2} g_H^2 \Rightarrow \sqrt{\overline{g^2}} \approx 1,22 g_H$$

التشتت Δg^2 :

$$\Delta g^2 = \overline{g^2} - \bar{g}^2 = \frac{3}{2} g_H^2 - \frac{4}{\pi} g_H^2$$

$$= \frac{3\pi - 8}{2\pi} g_H^2 \approx \frac{1,43}{6,28} g_H^2 \approx 0,228 g_H^2$$

الخط البياني لتابع الكثافة $f(g^2)$ عند درجة حرارة محددة T



2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$\frac{N!}{N_1! N_2! N_3!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000! (3-1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501$$

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2, N_3)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\epsilon_i / KT}$$

$$Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i / KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3} = 1,056$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\epsilon_1 / KT} = \frac{1000}{1,056} 2 e^{-1} \approx 697$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\epsilon_2/KT} = \frac{1000}{1,056} 2 e^{-2} \approx 256$$

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\epsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,056} e^{-3} \approx 47$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 697 + 256 + 47 = 1000$$

التحقق: (1)

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \epsilon_i = N_1 \epsilon_1 + N_2 \epsilon_2 + N_3 \epsilon_3 = 697KT + 256 \times 2KT + 47 \times 3KT = 1350 KT$$

٣- أ. نحسب القيمة الوسطى $\bar{\epsilon}$ من العلاقة

$$\bar{\epsilon} = \sum_i \epsilon_i P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \epsilon_i g_i e^{\beta \epsilon_i}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial Z/Z}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

بما أن نجد بالتعويض $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \epsilon_i g_i e^{\beta \epsilon_i}$

$$\overline{\epsilon^2} = \sum_i \epsilon_i^2 P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \epsilon_i^2 g_i e^{\beta \epsilon_i}$$

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$$

نجد بالتعويض $\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \epsilon_i^2 g_i e^{\beta \epsilon_i}$ يكون $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \epsilon_i g_i e^{\beta \epsilon_i}$ بما أن

$$\Delta \overline{\epsilon^2} = \overline{\epsilon^2} - \bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial Z/Z}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$$

ب- إيجاد صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad \text{وجدنا أن } \bar{\epsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \text{وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات}$$

ومن علاقة الطاقة الداخلية $U = N \bar{\epsilon}$ نجد

$$U = N \bar{\epsilon} = N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = NKT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

ج ٢: (35 درجة).

١:

حساب الحرارة النوعية (السعة الحرارية):

- من أجل $T > T_B$: تتوافق السعة الحرارية للبوزونات مع السعة الحرارية للغاز الكلاسيكي

$$C_{V \max} = \left(\frac{\partial U_{\max}}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} NK = C_{V \text{ Clas}}$$

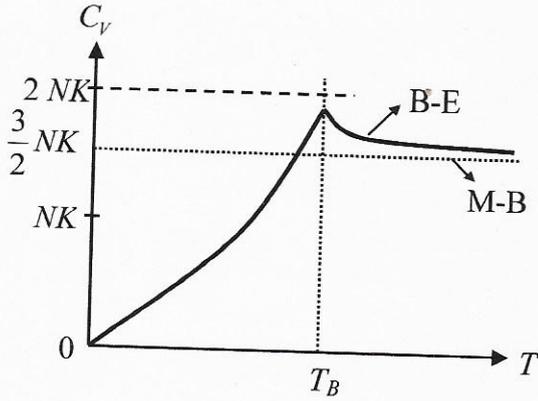
نلاحظ هنا أنه عند الطاقات العالية تكون $C_{V \max}$ غير تابعة لدرجة الحرارة T .

- من أجل $T \leq T_B$:

$$C_{V \min} = \left(\frac{\partial U_{\min}}{\partial T} \right)_V \approx \frac{5}{2} 0,77 NKT_B^{-3/2} T^{3/2} \Rightarrow$$

$$C_{V \min} = 1,92 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}$$

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات المنخفضة تكون $C_{V \min}$ تابعة لتغيرات درجة الحرارة T .
يوضح الشكل تمثيل $C_{V \min}$ (السعة الحرارية لغاز البوزون عند الطاقات المختلفة)



- عند الطاقات المنخفضة: أي في المجال الواقع بجوار T_B
نلاحظ أن $C_V = 0$ عندما $T = 0 K^o$ ، وتزداد بازدياد T
بشكل يتناسب طردياً مع $T^{3/2}$ إلى أن تصل لقيمتها القصوى
 $C_V = 1,92 NK$ عندما $T = T_B$.
- وعند الطاقات العالية: أي عندما $T > T_B$ تنخفض قيمة C_V
بازدياد T لتأخذ قيمة ثابتة $C_V = \frac{3}{2} NK$ ، كما هو الحال في
الغاز الكلاسيكي الخاضع لتوزيع M-B.

• برهان صيغة الأنتروبية:
من المبدأ الأول في الترموديناميك يكون $\delta Q = dU$ ونحسب الأنتروبية من عبارة كلاوزيوس كما يلي:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} = C_V \frac{dT}{T} ; dU = C_V dT$$

وبالمكاملة نحصل على صيغة الأنتروبية

$$S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$$

حساب الأنتروبية:

$$S_{\max} = \int_0^T C_{V \max} \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} NK \ln T$$

- عند الطاقات العليا:

$$S_{\min} = \int_0^T C_{V \min} \frac{dT}{T}$$

- عند الطاقات المنخفضة:

$$S_{\min} = \int_0^T 1,92 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \frac{dT}{T} = 1,92 NK T_B^{-3/2} \int_0^T T^{1/2} dT = 1,92 NK T_B^{-3/2} \frac{2}{3} T^{3/2} = 1,28 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}$$

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^0}{0!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} \frac{(1+1-1)!}{1!0!} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 \times 2 \times 1 = 2$$



اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية
السنة الثالثة فيزياء / الفصل الثاني للعام الدراسي 2022 - 2023

س1- أجب عن البنود التالية: (55 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$)، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\epsilon_1 = 0$ (J) و $\epsilon_2 = KT$ (J) و $\epsilon_3 = 2KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = N$ و $g_2 = g_3 = 1$ والمطلوب:
1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3)$ ، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية:

A- الجسيمات متميزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

(بفرض $N = 2$ ، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A, B, C)، ومثلها.)

3- بفرض أن الجسيمات متميزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزيع الماكروي الأكثر احتمال (N_1, N_2, N_3) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z ، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1 + N_2 + N_3 = N$). ما نوع التوزيع الحاصل؟

4- إذا كانت الجسيمات بوزونات: ماذا يمكنك القول عن حالة ودرجة حرارة الجملة الواقعة بحالة التوزيع الماكروي $(\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3)$ ، مثل بالرسم هذه الحالة (لا تتقيد بدرجة التحلل المعطاة).

5- إذا كانت الجسيمات فيرميونات: والجملة متعددة سويات الطاقة ومتعددة التحلل وواقعة عند درجة الصفر المطلق، المطلوب: مثل بالرسم شكلاً توضح عليه توضع الفيرميونات على السويات، ثم اعط تعريفاً واحداً لسوية فيرمي.

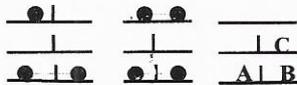
3- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$). ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي)

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$$

س2- أجب عن النقاط الثلاث التالية: (35 درجة)

• أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي.



• اكتب العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي، ومثل بيانياً المشغولية عند الطاقات العالية والمنخفضة.
• استنتج عبارة تحاص الغاز الفونوني Z في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير أينشتين.

علماً أن: سويات طاقة الفونونات $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$ وهي غير متحللة، ودرجة أينشتين $\theta_E = \hbar \omega / K$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 10 / 7 / 2023

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية
السنة الثالثة فيزياء الفصل الثاني للعام الدراسي 2022 - 2023 (تسعون درجة)

ج 1: (55 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{i(M-B)}$

20

ننتقل من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln N! + \sum_i [N_i Ln g_i - Ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln x! \approx x Ln x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln g_i - Ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i}} \Leftrightarrow \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i}} \quad (8)$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! (N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(N + 3 - 1)!}{N! (3 - 1)!} = \frac{(N + 2)!}{2 N!} = \frac{(N + 2)(N + 1) N!}{2 N!} = \frac{(N + 2)(N + 1)}{2}$$

2- طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)} = \sum_i N_i \varepsilon_i = (N-1) \times 0 + 1 \times KT + 0 \times 2KT = KT$$

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متميزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = N! \left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1^1}{1!} \frac{1^0}{0!} \right) = N N^{N-1} = N^N$$

B - الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{(N-1+N-1)! (1+1-1)! (0+1-1)!}{(N-1)! (N-1)! 1! (1-1)! 0! (1-1)!} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} \quad (2)$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{N-1}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{N!}{(N-1)! (N-N+1)! 1! (1-1)! 0! (1-0)!} = N \quad (2)$$

الحسابات الرقمية والتمثيل: الحالة المطلوبة هي $(\overset{\varepsilon_1}{1}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ و $g_2 = g_3 = 1$ و $g_1 = 2$

A- الجسيمات متميزة (كلاسيكية): $W_{M-B} = N^N = 2^2 = 4$

B- الجسيمات بوزونات: $W_{B-E} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} = \frac{2!}{1} = 2$

C- الجسيمات فيرميونات: $W_{F-D} = N = 2$

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i / KT} = N e^{-0} + 1 e^{-1} + 1 e^{-2} = N + e^{-1} + e^{-2} \quad (1)$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} = e^{\alpha} g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$

فيكون: $N_1 = \frac{N}{Z} N e^{-0} = \frac{N^2}{Z}$ و $N_2 = \frac{N}{Z} 1 e^{-1} = \frac{N}{Z} e^{-1}$ و $N_3 = \frac{N}{Z} 1 e^{-2} = \frac{N}{Z} e^{-2}$ ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

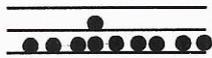
$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{N^2}{Z} + \frac{N}{Z} e^{-1} + \frac{N}{Z} e^{-2} = \frac{N}{Z} (N + e^{-1} + e^{-2}) = \frac{N}{Z} Z = N \quad (1)$$

لإيجاد نوع التوزيع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

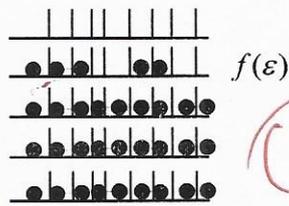
$$\frac{N_1}{N_3} = N e^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_2}{N_3} = \frac{e^{-1}}{e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_1}{N_2} = N e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

نستنتج أن: $N_1 > N_2 > N_3$ فالتوزيع طبيعي. (1)

4- عندما تكون الجسيمات بوزونات: فتكون الجملة الواقعة وفق التوزيع الماكروي $(\overset{\varepsilon_1}{N-1}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ بحالة تكاثف، ودرجة حرارتها هي درجة آينشتين (1)



5- عندما تكون الجسيمات فيرميونات: تتوضع الفيرميونات عند درجة الصفر المطلق



$f(\varepsilon)$

على كافة السويات الدنيا بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل.

- تكون كافة السويات الأدنى من سوية فيرمي $f(\varepsilon)$ مملوءة (مشغولة) بمعدل

فيرميون واحد لكل درجة تحلل والسويات الأعلى فارغة تماماً.

- سوية فيرمي هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات

3- لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:

ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزيع M-B في مجال السرعات $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta m \vartheta^2 / 2} g(\vartheta) d\vartheta$$

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta) d\vartheta$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\mathcal{V})d\mathcal{V} = C d\Gamma(\mathcal{V}) = CV 4\pi m^3 \mathcal{V}^2 d\mathcal{V}$$

وعن تابع التخاص Z بقيمته $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m\mathcal{V}^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\mathcal{V}) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-m\mathcal{V}^2/2KT} CV 4\pi m^3 \mathcal{V}^2 d\mathcal{V}$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\mathcal{V}) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} \mathcal{V}^2 e^{-\alpha\mathcal{V}^2} d\mathcal{V}$$

نعتبر أن $\alpha = m/2KT$

$$dN(\mathcal{V}) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \mathcal{V}^2 e^{-\alpha\mathcal{V}^2} d\mathcal{V}$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزيع السرعة بدلالة تابع كثافة السرعة كما يلي:

$$dF(\mathcal{V}) = \frac{dN(\mathcal{V})}{N} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \mathcal{V}^2 e^{-\alpha\mathcal{V}^2} d\mathcal{V} = f(\mathcal{V}^2) d\mathcal{V}$$

حيث يعبر $f(\mathcal{V}^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\mathcal{V}^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \mathcal{V}^2 e^{-\alpha\mathcal{V}^2}$$

للبرهان على أن $f(\mathcal{V}^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $[0 \rightarrow \infty[$.

$$\int_0^{\infty} f(\mathcal{V}^2) d\mathcal{V} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \mathcal{V}^2 e^{-\alpha\mathcal{V}^2} d\mathcal{V}$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^{\infty} \mathcal{V}^2 e^{-\alpha\mathcal{V}^2} d\mathcal{V} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(\mathcal{V}) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

أجوبة نقاط السؤال الثاني: (35 درجة)

• تحديد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات في الجمل التالية

① الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ C
A|B

② الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^1}{1!} \frac{1^0}{0!} \right) = 24$

① الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ ●●
|
●●●

الوزن الإحصائي

③ $W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(0+2-1)!}{0!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 1 \times 1 = 3$

① الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ ●|
|
●●●

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{(2+2-1)! (0+2-1)! (1+2-1)!}{2!1! 0!1! 1!1!} = 3 \times 1 \times 2 = 6$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{0!(2-0)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

• تأخذ العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي الشكل

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} \pm m} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} \pm 1}$$

حيث يأخذ الثابت m القيمة صفر في توزيع مكسويل والقيمة واحد في توزيع بوزة وفيرمي، والإشارة السالبة لبوزة والموجبة لفيرمي.

عند الطاقات العالية $(\epsilon_i - \mu) \gg KT$ يؤول توزيع بوزة وفيرمي إلى توزيع مكسويل (يُهمل الواحد في المقام)

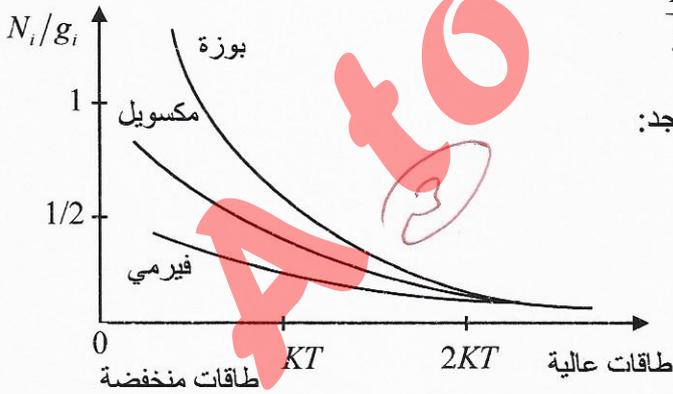
$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} \pm 1} \approx \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}}} \ll 1 \Rightarrow \frac{N_i}{g_i} \rightarrow 0$$

عند الطاقات المنخفضة $(\epsilon_i - \mu) \ll KT$ يكون $e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} \geq 1$ فنجد:

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} \pm 1} \leq 1 \text{ من أجل مكسويل}$$

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} - 1} \gg 1 \text{ من أجل بوزة}$$

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} + 1} \leq \frac{1}{2} \text{ من أجل فيرمي}$$



شكل ()

• تعطى طاقة الهزاز الكوانتي بالصيغة $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$

أي أن للهزاز طاقة $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$ في السوية الأرضية $n=0$ عند درجة الصفر المطلق $T=0 K$

يعطى تابع تحاص سويات الطاقة غير المتحللة للفونونات بصيغته المعروفة

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{1} e^{\beta \epsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega} = e^{\frac{\beta \hbar \omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta n \hbar \omega} = e^{-\frac{\hbar \omega}{2KT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n \hbar \omega}{KT}} = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \frac{\theta_E}{T}}$$

حيث افترضنا درجة حرارة آينشتاين $\theta_E = \frac{\hbar \omega}{K}$ مقدار ثابت، وبكتابة المجموع نجد

$$Z = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} (1 + e^{-\frac{\theta_E}{T}} + e^{-2\frac{\theta_E}{T}} + e^{-3\frac{\theta_E}{T}} + \dots)$$

السلسلة هندسية حدها الأول واحد وأساسها $e^{-\frac{\theta_E}{T}} < 1$ فيكون مجموعها $S = 1 \frac{1 - (e^{-\frac{\theta_E}{T}})^n}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}} \approx \frac{1}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$ وبالتعويض

$$Z = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} / (1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}})$$



امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٢ - ٢٠٢٣

س ١- أجب عن البنود التالية: (٥٠ درجة).

١- A- ارسم معين الطاقات واستفد منه في إيجاد تفاضلات توابع الطاقة، ووضع التوابع المناسبة في الفراغات في ما يلي:

$$V = \left. \frac{\partial \dots}{\partial P} \right|_S = \left. \frac{\partial \dots}{\partial P} \right|_T \quad \text{و} \quad -P = \left. \frac{\partial \dots}{\partial V} \right|_S = \left. \frac{\partial \dots}{\partial V} \right|_T$$

B- برهن صحة العلاقات التالية: (توجيه: استفد من ١ في برهان ٢)

$$U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad -1 \quad C_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \quad -2 \quad U = -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V \quad -3$$

٢- مسألة: جملة مكونة من 5000 جسيم متمايز موزعة على سويتين للطاقة (J) $\epsilon_1 = KT$ و $\epsilon_2 = 2KT$ ، السويتان متحلتان بالشكل $g_1 = 3$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

١- ارسم هيكل السويتات والتحلات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

٢- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2$ ،

ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$).

٣- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(N_1 + 1, N_2 - 1)$

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويتات فيها، واحسب وزنها الإحصائي.



س ٢- أجب عن البندين التاليين: (٤٠ درجة).

١- أ- افرض أن تابع كثافة السرعة المطلقة لتوزيع M-B في المجال $[0 \rightarrow \infty[$ هو $f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$

• أوجد قيمة السرعة الأكثر احتمالاً g_H بدلالة α ، ثم أوجد قيمة سرعتين \bar{g} و $\overline{g^2}$ والتشتت $\overline{\Delta g^2}$ بدلالة g_H .

• برهن اعتماداً على $f(g^2)$ أن: $\bar{g} \left(\frac{1}{g} \right) = \frac{4}{\pi}$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \frac{n!}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n \geq 0 \text{ زوجي} \\ \frac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n = 2m+1 \text{ فردي} \end{cases}$$

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

٢- عرف تابع فيرمي $f(\epsilon)$ ، ومثله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\epsilon_f(T = 0k^o)$.

ثم مثله في جوارها من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\epsilon = \epsilon_f(0) \pm KT$.

• اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\epsilon_f^{(0)}$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: الأسس ٦ / ٣ / ٢٠٢٣

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٢ - ٢٠٢٣ (تسعون درجة)

ج ١: (٥٠ درجة)

	+	U	-
I	T	P	F
	V	S	
	G		

$$F(T, V) \Rightarrow dF = -S dT - P dV \quad -٢ \quad (1)$$

$$I(S, P) \Rightarrow dI = T dS + V dP \quad -٤ \quad (1)$$

$$(2) \quad V = \left(\frac{\partial I}{\partial P} \right)_S = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T \quad \text{و} \quad -P = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (2)$$

A - نستفيد من تفاضلات توابع الطاقة التالية

$$U(S, V) \Rightarrow dU = T dS - P dV \quad -١ \quad (1) \quad (15)$$

$$G(T, P) \Rightarrow dG = -S dT + V dP \quad -٣ \quad (1)$$

B- برهان صحة العلاقات

١- بما أن $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$ نعوض في العبارة $F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$ فنجد: $F + TS = U$ (2)

٢- من تعريف C_V : حيث $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ ، وبالاستفادة من العبارة (١) حيث: $U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$ نجد:

$$(2) \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\partial}{\partial T} \left[F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \right] = \left[\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial F}{\partial T} - T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right]_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V$$

٣- نبدأ من الطرف الأيمن:

$$(2) \quad -T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{F}{T} \right)_V = -T^2 \left(\frac{T \frac{\partial F}{\partial T} - F}{T^2} \right)_V = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = F + TS = U$$

٢- المسألة:

١- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N! (N_e - 1)!} = \frac{(5000 + 2 - 1)!}{5000! (2 - 1)!} = \frac{5001!}{5000!} = \frac{5001 \times 5000!}{5000!} = 5001 \quad (3)$$

٢- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i / KT} \quad ; \quad Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i / KT} = 3e^{-1} + 2e^{-2} = 1,104 + 0,270 = 1,374 \quad (3)$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1 / KT} = \frac{5000}{1,374} 3e^{-1} \approx 4017 \quad (3)$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2 / KT} = \frac{5000}{1,374} 2e^{-2} \approx 983 \quad (3)$$

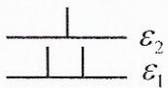
$$N = N_1 + N_2 = 4017 + 983 = 5000 \quad (2)$$

وهي حالة توزيع طبيعي لأن $N_1 > N_2$
طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 = 4017 KT + 983 \times 2KT = 5983 KT \quad (2)$$

٣- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{3^{N_1} 2^{N_2}}{N_1! N_2!} \right)$$



$$W'_{(N_1+1, N_2-1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{3^{N_1+1}}{(N_1+1)!} \frac{2^{N_2-1}}{(N_2-1)!} \right)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-1)}} = \frac{3^{N_1} 2^{N_2} (N_1+1)! (N_2-1)!}{N_1! N_2! 3^{N_1+1} 2^{N_2-1}} = \frac{3^{N_1} 2^{N_2} (N_1+1) N_1! (N_2-1)!}{N_1! N_2 (N_2-1)! 3 \times 3^{N_1} 2^{-1} \times 2^{N_2}}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-1)}} = \frac{2(N_1+1)}{3N_2} = \frac{2(4018)}{3 \times 983} \approx 2,7 > 1 \Rightarrow W_{(N_1, N_2)_{\max}} > W'_{(N_1+1, N_2-1)}$$

(4)

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$

الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^1}{1!} \frac{1^0}{0!} \right) = 24$

15
I C
A I B

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{2})$

الوزن الإحصائي

●●
|
●●●

$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)! (0+2-1)! (2+1-1)!}{2! 1! 1! 0! 1! 2! 0!} = 3 \times 1 \times 1 = 3$

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

● |
|
● ●

$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{(2+2-1)! (0+2-1)! (1+2-1)!}{2! 1! 1! 0! 1! 1! 1!} = 3 \times 1 \times 2 = 6$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{2!}{2! (2-2)!} \frac{2!}{0! (2-0)!} \frac{2!}{1! (2-1)!} = 1 \times 1 \times 2 = 2$

ج ٢: (٤٠ درجة)

١: السرعة الأكثر احتمالاً g_H : نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(g^2)}{\partial g} = 0 \Rightarrow 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} (2g e^{-\alpha g^2} - 2\alpha g^3 e^{-\alpha g^2}) = 0 \Rightarrow 2g e^{-\alpha g^2} (1 - \alpha g^2) = 0$$

الحلول الناتجة عندما $g e^{-\alpha g^2} = 0$ هي $g = 0$ و $g = \infty$ وهي غير مقبولة. وعندما $1 - \alpha g^2 = 0$ نجد:

$$g_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

القيمة الوسطى للسرعة المطلقة \bar{g} :

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^{\infty} f(g^2) dg = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{g} = \int_0^{\infty} g f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^3 e^{-\alpha g^2} dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} g_H \approx 1,13 g_H$$

(4)

$$\left(\frac{1}{v} \right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} f(v^2) dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v e^{-\alpha v^2} dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\alpha}$$

$$\Rightarrow \bar{v} \left(\frac{1}{v} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} g_H \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\alpha} = \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{4}{\pi}$$

(4)

القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\overline{g^2}$:

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^{\infty} f(g^2) dg^2 = 1$ (واستخدام تكاملات بواسون)

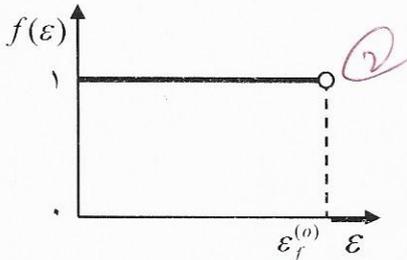
$$\overline{g^2} = \int_0^{\infty} g^2 f(g^2) dg^2 = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^4 e^{-\alpha g^2} dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2} g_H^2 \quad (4)$$

$$\Delta g^2 = \overline{g^2} - \overline{g}^2 = \frac{3}{2} g_H^2 - \frac{4}{\pi} g_H^2 = \frac{3\pi - 8}{2\pi} g_H^2 \approx \frac{1,43}{6,28} g_H^2 \approx 0,228 g_H^2 \quad (4) \quad \underline{\text{التشتت}}$$

٢: يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزع (فيرمي - ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + d\varepsilon$ الذي درجة تحلله $(g \rightarrow g + dg)$ بالشكل:

$$dN = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon \quad ; \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} \quad (1)$$

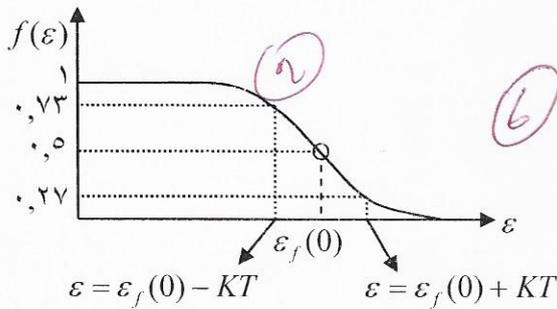
حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0k^0$ ، ونمثله بالشكل:



شكل ()

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 & ; \varepsilon < \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = 0 & ; \varepsilon > \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{0/0} + 1} = XX & ; \varepsilon = \varepsilon_f \end{cases} \quad (6)$$

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال $[0 - 1]$. وفي جوار سوية فيرمي، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-1} + 1} \approx 0,73 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) - KT \\ \frac{1}{e^0 + 1} = 0,5 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) \\ \frac{1}{e^{+1} + 1} \approx 0,27 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) + KT \end{cases} \quad (6)$$

• تعاريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$:

- ١- هي الطاقة الموافقة لتوزع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^0$
- ٢- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^0$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(0)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i > \varepsilon_f^{(0)}$
- ٣- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon) = 0,5$



امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2021 - 2022

س1- أجب عن البنود التالية: (55 درجة).

1- بفرض أن

$$n_e \approx 2 \left(\frac{2\pi m_e KT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_c - \epsilon_f(T)}{KT}}$$

التركيز الكمي للإلكترونات في قطاع التوصيل CB في الدرجة T هو

$$n_h \approx 2 \left(\frac{2\pi m_h KT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_v - \epsilon_f(T)}{KT}}$$

والتركز الكمي للثقوب في قطاع التكافؤ VB عند نفس الدرجة T هو

وأن $m_e \approx m_h$ و $n_e \approx n_h$ (عند نفس درجة الحرارة)

المطلوب: برهن أن سوية فيرمي $\epsilon_f(T)$ في أشباه الموصلات تقع في منتصف فجوة الطاقة ϵ_g تماماً.

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة (J) $\epsilon_1 = KT$ و $\epsilon_2 = 2KT$ و $\epsilon_3 = 3KT$ ، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$. والمطلوب:

1- ارسم هيكل السويات والتحولات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$ ، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overline{N}_1 + 1, \overline{N}_2 - 2, \overline{N}_3 + 1)$

3- استند من صيغتي تابع التحاص $Z = \sum_i g_i e^{\beta \epsilon_i}$ وتابع الكثافة الاحتمالي $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \epsilon_i}$ في إيجاد ما يلي:

أ- القيمة الوسطى $\overline{\epsilon}$ ، والانحراف المعياري $\overline{\epsilon^2}$ ، والتشتت $\overline{\Delta \epsilon^2}$ ، بدلالة تابع التحاص Z والمشتقة $\partial/\partial \beta$.

ب- صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

س2- أجب عن البنود التالية: (35 درجة).

1- عرف تابع فيرمي $f(\epsilon)$ ، ومثله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\epsilon_f(T = 0k^0)$.

ثم مثله في جوارها من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\epsilon = \epsilon_f(0) \pm KT$.

• اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\epsilon_f^{(0)}$.

2- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي.

$\frac{c}{ABI}$	$\frac{c}{ABI}$	$\frac{c}{ABI}$
$\frac{c}{ABI}$	$\frac{c}{ABI}$	$\frac{c}{ABI}$
$\frac{c}{ABI}$	$\frac{c}{ABI}$	$\frac{c}{ABI}$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: 2022/9/8

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2021 - 2022 (تسعون درجة)

ج 1: (55 درجة)
1: بنسبة العلاقتين

$$\frac{n_e}{n_h} \approx \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_C - \epsilon_f(T)}{KT}} e^{-\frac{\epsilon_V - \epsilon_f(T)}{KT}} = \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{\frac{2\epsilon_f(T) - (\epsilon_V + \epsilon_C)}{KT}}$$

10

بأخذ لغارتم الطرفين

$$\ln \frac{n_e}{n_h} \approx \frac{3}{2} \ln \frac{m_e}{m_h} + \frac{2\epsilon_f(T) - (\epsilon_V + \epsilon_C)}{KT} \quad (5)$$

وباعتبار $m_e \approx m_h$ و $n_e \approx n_h$ (عند نفس درجة الحرارة) نجد (باعتبار $\ln 1 = 0$)

$$\epsilon_f(T) \approx \frac{1}{2}(\epsilon_V + \epsilon_C)$$

وبما أن عرض فجوة الطاقة (القطاع المحظور) $\epsilon_g = \epsilon_C - \epsilon_V \Rightarrow \epsilon_C = \epsilon_g + \epsilon_V$ وبالتعويض

$$\epsilon_f(T) \approx \frac{1}{2}(2\epsilon_V + \epsilon_g)$$

$$\epsilon_f(T) \approx \epsilon_V + \frac{1}{2}\epsilon_g \quad (5)$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

ϵ_3
ϵ_2
ϵ_1

$$N_o = \frac{(N + N_\epsilon - 1)!}{N! (N_\epsilon - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000! (3 - 1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501$$

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2, N_3)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\epsilon_i/KT} ; Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3} = 1,056 \quad (3)$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\epsilon_1/KT} = \frac{1000}{1,056} 2e^{-1} \approx 697 \quad (3)$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\epsilon_2/KT} = \frac{1000}{1,056} 2e^{-2} \approx 256 \quad (3)$$

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\epsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,056} e^{-3} \approx 47 \quad (3)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 697 + 256 + 47 = 1000 \quad (1)$$

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \epsilon_i = N_1 \epsilon_1 + N_2 \epsilon_2 + N_3 \epsilon_3 = 697KT + 256 \times 2KT + 47 \times 3KT = 1340KT \quad (2)$$

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1} 2^{N_2} 1^{N_3}}{N_1! N_2! N_3!} \right)$$

$$W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1+1}}{(N_1+1)!} \frac{2^{N_2-2}}{(N_2-2)!} \frac{1^{N_3+1}}{(N_3+1)!} \right)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2} 1 (N_1+1)! (N_2-2)! (N_3+1)!}{N_1! N_2! N_3! 2^{N_1+1} 2^{N_2-2} 1} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2} 1 (N_1+1) N_1! (N_2-2)! (N_3+1) N_3!}{N_1! N_2 (N_2-1) (N_2-2)! N_3! 2 \times 2^{N_1} 2^{-2} \times 2^{N_2} 1}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}} = 2 \frac{(N_1+1)(N_3+1)}{N_2 (N_2-1)} = 2 \frac{(698)(48)}{256(255)} = 1,026 \Rightarrow W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} > W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}$$

3- أ- نحسب القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة 20

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \text{بما أن } \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} \text{ نجد بالتعويض}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \quad \text{بما أن } \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} \text{ يكون } \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta \varepsilon_i} \text{ نجد بالتعويض}$$

$$\Delta \varepsilon^2 = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial Z / Z}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$$

ب- إيجاد صيغة طاقة الجملية بدلالة المشتقة $\partial / \partial T$.

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = -KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad \text{وجدنا أن } \bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \text{ وبلاستفادة من العلاقة بين المشتقات}$$

ومن علاقة الطاقة الداخلية $U = N \bar{\varepsilon}$ نجد

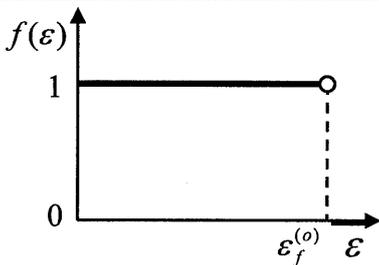
$$U = N \bar{\varepsilon} = N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = NKT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

ج 2: (35 درجة)

1: يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزيع (فيرمي - ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon \rightarrow \varepsilon + d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \rightarrow g + dg)$ بالشكل:

$$dN = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = f(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon \quad ; \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1}$$

حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0K$ ، ونمثله بالشكل:



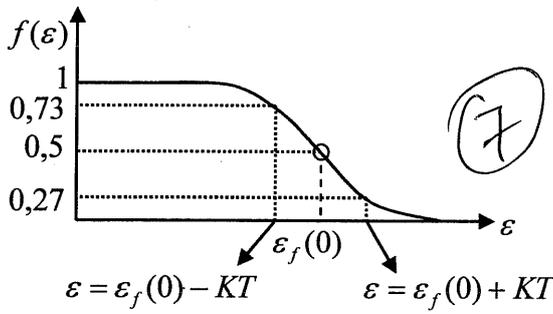
شكل ()

7

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 & ; \varepsilon < \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = 0 & ; \varepsilon > \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{0/0} + 1} = XX & ; \varepsilon = \varepsilon_f \end{cases}$$

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال $[0 - 1]$.

وفي جوار سوية فيرمي ، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-1} + 1} \approx 0,73 ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) - KT \\ \frac{1}{e^0 + 1} = 0,5 ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) \\ \frac{1}{e^{+1} + 1} \approx 0,27 ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) + KT \end{cases}$$

• تعاريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$:

- 1- هي الطاقة الموافقة لتوزيع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^\circ$
- 2- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^\circ$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(0)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i > \varepsilon_f^{(0)}$
- 3- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon) = 0,5$

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{0^0}{0!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12$$

$$\frac{c}{|AB|}$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} \frac{(1+1-1)!}{1!0!} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 \times 2 \times 1 = 2$$



امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية
السنة الثالثة فيزياء / الفصل الثاني للعام الدراسي 2021 - 2022

س 1- أجب عن البنود التالية: (55 درجة)

1-A- ارسم معين الطاقات واستنفد منه في إيجاد تفاضلات توابع الطاقة، ووضع التوابع المناسبة في الفراغات في ما يلي:

$$-S = \left(\frac{\partial \dots}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial \dots}{\partial T} \right)_P \quad \text{و} \quad T = \left(\frac{\partial \dots}{\partial S} \right)_V = \left(\frac{\partial \dots}{\partial S} \right)_P$$

B- برهن صحة العلاقات التالية: (توجيه: استنفد من 1 في برهان 2)

$$U = -T^2 \left(\frac{\partial (F/T)}{\partial T} \right)_V \quad -3 \quad C_V = K\beta^2 \left[\frac{\partial^2 (\beta F)}{\partial \beta^2} \right]_V \quad -2 \quad U = \left[\frac{\partial (\beta F)}{\partial \beta} \right]_V \quad -1$$

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة (J) $\epsilon_1 = KT$ و $\epsilon_2 = 2KT$ و $\epsilon_3 = 3KT$ ، السويات متحللة بالشكل $g_1 = 3$ و $g_2 = 2$ و $g_3 = 1$ والمطلوب:

1- ارسم هيكل السويات والتحلات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2, N_3)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$ ، وأنها حالة توزع طبيعي، ثم احسب طاقة هذه الحالة بدلالة KT . (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(N_1 + 1, N_2 - 1, N_3)$

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

3- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد حالتها الماكروية الأم ونوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها، واحسب وزنها الإحصائي.



س 2- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة)

1- برهن أن تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة المعروف بالسرعة الموجهة، $G(\mathcal{G}_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha \mathcal{G}_x^2}$ ، غوص الطبيعي،

هو تابع كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة ما يلي: $\overline{\mathcal{G}_x}$ ، $\overline{\mathcal{G}_x^2}$ ، $\Delta \mathcal{G}_x^2$ ، $\overline{\mathcal{G}_x^2 \mathcal{G}_y}$ ، $\overline{(\mathcal{G}_x + b \mathcal{G}_y)^2}$ ، $\overline{\mathcal{G}_x^3 \mathcal{G}_y}$ ، $\overline{\mathcal{G}_x^2 \mathcal{G}_y}$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \frac{n!}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n \text{ زوجي } n \geq 0 \\ \frac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n \text{ فردي } n = 2m+1 \text{ } m \geq 0 \end{cases}$$

2- بفرض أن

$$n_e \approx 2 \left(\frac{2\pi m_e KT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_c - \epsilon_f(T)}{KT}}$$

التركيز الكمي للإلكترونات في قطاع التوصيل CB في الدرجة T هو

$$n_h \approx 2 \left(\frac{2\pi m_h KT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_v - \epsilon_f(T)}{KT}}$$

والتركيز الكمي للثقوب في قطاع التكافؤ VB عند نفس الدرجة T هو

وأن $m_e \approx m_h$ و $n_e \approx n_h$ (عند نفس درجة الحرارة)

المطلوب: برهن أن سوية فيرمي $\epsilon_f(T)$ في أشباه الموصلات تقع في منتصف فجوة الطاقة ϵ_g تماماً.

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية -
السنة الثالثة فيزياء الفصل الثاني للعام الدراسي 2021 - 2022 (تسعون درجة)

ج 1: (55 درجة)

1- نستفيد من تفاضلات توابع الطاقة التالية

$$U(S, V) \Rightarrow dU = T dS - P dV \quad -1$$

$$G(T, P) \Rightarrow dG = -S dT + V dP \quad -3$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_P \quad (4)$$

2- برهان صحة العلاقات

1- نبدأ من الطرف الأيمن للمساواة فنجد:

$$\left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} \right]_V = \left[F + \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \right]_V = F + \beta \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_V$$

نوجد قيمة $\left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_V$ بإدخال درجة الحرارة T كوسيط بالشكل التالي:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_V = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \beta} \right)_V = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right)_V = -S \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right)_V = -S \left(\frac{1}{K\beta^2} \right)_V ; S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \Rightarrow \beta = - \frac{1}{KT} \Rightarrow T = - \frac{1}{K\beta}$$

بالتعويض والاستفادة من معين الطاقات التالي نجد:

$$F + \beta \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_V = F - \beta S \left(\frac{1}{K\beta^2} \right)_V = F - \frac{S}{K\beta} = F + TS = U \quad (2)$$

2- من تعريف C_V : حيث $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ ، وبالأستفادة من العبارة (1) حيث:

$$U = \left(\frac{\partial \beta F}{\partial \beta} \right)_V \quad \text{وبالتعويض عن المشتقة بقيمتها} \quad \frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{KT^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \quad \text{نجد:}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{KT^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \beta F}{\partial \beta} \right)_V = \frac{K}{K^2 T^2} \left(\frac{\partial^2 \beta F}{\partial \beta^2} \right)_V = K\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \beta F}{\partial \beta^2} \right)_V \quad (2)$$

3- نبدأ من الطرف الأيمن:

$$-T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{F}{T} \right)_V = -T^2 \left(\frac{T \frac{\partial F}{\partial T} - F}{T^2} \right)_V = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = F + TS = U \quad (2)$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_\epsilon - 1)!}{N! (N_\epsilon - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000! (3 - 1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501 \quad (5)$$

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2, N_3)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\epsilon_i/KT} ; Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = 3e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3} = 1,104 + 0,270 + 0,05 = 1,424 \quad (3)$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\epsilon_1/KT} = \frac{1000}{1,424} 3e^{-1} \approx 775 \quad (2)$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\epsilon_2/KT} = \frac{1000}{1,424} 2e^{-2} \approx 190 \quad (2)$$

	+	U	-
T		P	
V		S	
	G		

(2)

$$F(T, V) \Rightarrow dF = -S dT - P dV \quad -2$$

$$I(S, P) \Rightarrow dI = T dS + V dP \quad -4$$

$$-S = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_P \quad \text{و}$$

(12)

	ϵ_3
	ϵ_2
	ϵ_1

(20)

(5)

(3)

(2)

(2)

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\epsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,424} e^{-3} \approx 35 \quad (2)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 775 + 190 + 35 = 1000 \quad (1)$$

(1) وهي حالة توزع طبيعي لأن $N_1 > N_2 > N_3$
طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \epsilon_i = N_1 \epsilon_1 + N_2 \epsilon_2 + N_3 \epsilon_3 = 775KT + 190 \times 2KT + 35 \times 3KT = 1260KT \quad (1)$$

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{3^{N_1} 2^{N_2} 1^{N_3}}{N_1! N_2! N_3!} \right)$$

$$W'_{(N_1+1, N_2-1, N_3)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{3^{N_1+1} 2^{N_2-1} 1^{N_3}}{(N_1+1)! (N_2-1)! N_3!} \right)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-1, N_3)}} = \frac{3^{N_1} 2^{N_2} 1^{N_3} (N_1+1)! (N_2-1)! N_3!}{N_1! N_2! N_3! 3^{N_1+1} 2^{N_2-1} 1^{N_3}} = \frac{3^{N_1} 2^{N_2} 1^{N_3} (N_1+1) N_1! (N_2-1)! N_3!}{N_1! N_2 (N_2-1)! N_3! 3 \times 3^{N_1} 2^{-1} \times 2^{N_2} 1}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-1, N_3)}} = \frac{2(N_1+1)}{3N_2} = \frac{2(776)}{3 \times 190} \approx 2,7 > 1 \Rightarrow W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} > W'_{(N_1+1, N_2-1, N_3)} \quad (3)$$

(1) الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\epsilon_1}{2}, \overset{\epsilon_2}{0}, \overset{\epsilon_3}{1})$ الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3! \left(\frac{2^2 2^0 1^1}{2! 0! 1!} \right) = 12$

c
1
AB1

(1) الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\epsilon_1}{2}, \overset{\epsilon_2}{2}, \overset{\epsilon_3}{1})$ الوزن الإحصائي

••
•••
••••

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18 \quad (5)$$

(1) الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\epsilon_1}{2}, \overset{\epsilon_2}{1}, \overset{\epsilon_3}{1})$ الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

••
•••
••••

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} \frac{(1+1-1)!}{1!0!} = 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad (5)$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 \times 2 \times 1 = 2 \quad (5)$$

ج 2: 35

1: هو تابع كثافة احتمال. لأنه يحقق الشرط الواحد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(v_x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \int_0^{+\infty} v_x^0 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \quad (6)$$

إيجاد قيم المقادير: $\overline{g_x^2 g_y^2}$ ، $(\overline{g_x + b g_y})^2$ ، $\overline{g_x^3 g_y}$ ، $\overline{g_x^2 g_x}$ ، $\overline{\Delta v_x^2}$ ، $\overline{g_x^2}$ ، $\overline{g_x}$

$$\textcircled{a} \bar{g}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x G(g_x) dg_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_x e^{-\alpha g_x^2} dg_x = 0$$

بما أن الأس فردي فنجد من تكاملات بواسون

تشير هذه النتيجة إلى أن عدد الجسيمات المتحركة وفق ox^+ يساوي العدد المتحرك وفق ox^-

$$\textcircled{b} \overline{g_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x^2 G(g_x) dg_x = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{+\infty} g_x^2 e^{-\alpha g_x^2} dg_x = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} g_x^2 e^{-\alpha g_x^2} dg_x}_{\frac{1}{4\sqrt{\alpha^3}}} = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{4\sqrt{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{KT}{m}$$

$$\alpha = \frac{m}{2KT}$$

$$\textcircled{c} \Delta v_x^2 = \overline{v_x^2} - \bar{v}_x^2 = 1/2\alpha = \frac{KT}{m}$$

$$\textcircled{d} \overline{g_x^2 g_x} = \overline{g_x^3} = 0 \quad ; \quad \bar{g}_x = 0$$

$$\textcircled{e} \overline{g_x^3 g_y} = \overline{g_x^3} \bar{g}_y = 0 \quad ; \quad \bar{g}_y = 0$$

$$\textcircled{f} \overline{(g_x + b g_y)^2} = \overline{g_x^2} + 2b \bar{g}_x \bar{g}_y + b^2 \overline{g_y^2} = (1+b^2) \frac{KT}{m} \quad ; \quad \bar{g}_x = \bar{g}_y = 0$$

$$\textcircled{g} \overline{g_x^2 g_y^2} = \overline{g_x^2} \bar{g}_y^2 = \left(\frac{KT}{m}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2$$

بنسبة العلاقتين 2:

$$\frac{n_e}{n_h} \approx \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_C - \epsilon_f(T)}{KT}} e^{-\frac{\epsilon_V - \epsilon_f(T)}{KT}} = \left(\frac{m_e}{m_h}\right)^{3/2} e^{\frac{2\epsilon_f(T) - (\epsilon_V + \epsilon_C)}{KT}}$$

19

بأخذ لغازتم الطرفين

$$\ln \frac{n_e}{n_h} \approx \frac{3}{2} \ln \frac{m_e}{m_h} + \frac{2\epsilon_f(T) - (\epsilon_V + \epsilon_C)}{KT}$$

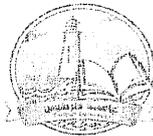
وباعتبار $m_e \approx m_h$ و $n_e \approx n_h$ (عند نفس درجة الحرارة) نجد (باعتبار $\ln 1 = 0$)

$$\epsilon_f(T) \approx \frac{1}{2} (\epsilon_V + \epsilon_C) \quad \textcircled{12}$$

وبما أن عرض فجوة الطاقة (القطاع المحظور) $\epsilon_g = \epsilon_C - \epsilon_V \Rightarrow \epsilon_C = \epsilon_g + \epsilon_V$ وبالتعويض

$$\epsilon_f(T) \approx \frac{1}{2} (2\epsilon_V + \epsilon_g)$$

$$\epsilon_f(T) \approx \epsilon_V + \frac{1}{2} \epsilon_g \quad \textcircled{13}$$



امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2021 - 2022

السؤال الثالث

س1- أجب عن البندين التاليين: (55 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(\mu-D)_{max}}$ لتوزيع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من جسيمين متميزين موزعين على ثلاث سويات للطاقة $\epsilon_1 = KT$ ، $\epsilon_2 = 2KT$ ، $\epsilon_3 = 3KT$ السويات متحللة بالشكل: $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزيع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقتين (بدلالة e)، واستنتج من ذلك حصراً كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقتي الجملة

- أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(1, 1, 0)$ في الحالات التالية:
 - 1- الجسيمات متميزان A و B.
 - 2- الجسيمات بوزونات.
 - 3- الجسيمات فيرميونان.
- 3- عرف تابع فيرمي $f(\epsilon)$ ، ومثله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\epsilon_f(T = 0K^0)$.
ثم مثله في جوارها من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\epsilon = \epsilon_f(0) \pm KT$.
- اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\epsilon_f^{(0)}$.

س2- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة).

1- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$) .
ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

2- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

$\frac{c}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي)

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{n! 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: الأمام 20/2/2022

د. محمد إبراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الفصل الأول للعام الدراسي 2021 - 2022 (تسعون درجة)

17: 100 55
1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{(F-D)}$ max

5) نطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i . أي $g_i \gg N_i$.
نوجد بدايةً $\ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{F-D}) \approx \ln \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{F-D}) \approx \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)]$$

بما أن W_{F-D} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{F-D}) = \frac{\partial \ln(W_{F-D})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[-\ln N_i - 1 + \frac{g_i}{g_i - N_i} + \ln (g_i - N_i) - \frac{N_i}{g_i - N_i} \right] dN_i = \sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} - 1 + \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right) dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) \approx \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1 \Rightarrow N_{i(F-D)} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1}$$

2- المسألة:

$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N!(N_e - 1)!} = \frac{(2 + 3 - 1)!}{2!(3 - 1)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزيع الماكروي الستة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{ \begin{matrix} (2,0,0) \\ U=2KT \end{matrix}, \begin{matrix} (0,2,0) \\ U=4KT \end{matrix}, \begin{matrix} (0,0,2) \\ U=6KT \end{matrix}, \begin{matrix} (1,1,0) \\ U=3KT \end{matrix}, \begin{matrix} (1,0,1) \\ U=4KT \end{matrix}, \begin{matrix} (0,1,1) \\ U=5KT \end{matrix} \right\}$

• نحسب نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^\alpha g_i e^{\beta \varepsilon_i}}{e^\alpha g_j e^{\beta \varepsilon_j}} = \frac{g_i e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j e^{-\varepsilon_j/KT}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2e^{-KT/KT}}{2e^{-2KT/KT}} = \frac{2e^{-1}}{2e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{2e^{-KT/KT}}{1e^{-3KT/KT}} = \frac{2e^{-1}}{1e^{-3}} = 2e^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_3$$

$$\frac{N_2}{N_3} = \frac{2e^{-2KT/KT}}{1e^{-3KT/KT}} = \frac{2e^{-2}}{1e^{-3}} = 2e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3$$

2

والتوزيع الطبيعي
تخاص الجملة:

$$Z = \sum_i g_i e^{-g_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3}$$

$$Z_\Omega = Z^N = (2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3})^2 = 4e^{-2} + 4e^{-4} + e^{-6} + 8e^{-3} + 4e^{-4} + 4e^{-5}$$

تخاص الطاقم:

نقارنه بالعبارة:

$$Z_\Omega = \sum_i W_i e^{-U_i/KT} = W_{(2,0,0)} e^{-2} + W_{(0,2,0)} e^{-4} + W_{(0,0,2)} e^{-6} + W_{(1,1,0)} e^{-3} + W_{(1,0,1)} e^{-4} + W_{(0,1,1)} e^{-5}$$

$$Z_\Omega = 4e^{-2} + 4e^{-4} + e^{-6} + 8e^{-3} + 4e^{-4} + 4e^{-5}$$

تكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزيع الماكروي بالشكل:

$$W_{(2,0,0)} = 4, \quad W_{(0,2,0)} = 4, \quad W_{(0,0,2)} = 1, \quad W_{(1,1,0)} = 8, \quad W_{(1,0,1)} = 4, \quad W_{(0,1,1)} = 4$$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (1,1,0)

$$\Omega = \left(\sum_i g_i\right)^N = 5^2 = 25 \quad \bullet \text{ للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة}$$

$$\Omega = \sum_i W_i = 4 + 4 + 1 + 8 + 4 + 4 = 25 \quad \bullet \text{ وهذا يتطابق مع الحسابات}$$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,1,0)} = 2! \left(\frac{2^1 2^1 1^0}{1! 1! 0!} \right) = 8 \quad \bullet \text{ 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)}$$

B	B	B	B
A	A	A	A

A	A	A	A
B	B	B	B

3

2- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} = \frac{(1+2-1)! (1+2-1)! (0+1-1)!}{1! (2-1)! 1! (2-1)! 0! (1-1)!} = 4$$

•	•	•	•
•	•	•	•

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1,1,0) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزيع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \frac{2!}{1! (2-1)!} \frac{2!}{1! (2-1)!} \frac{1!}{0! (1-0)!} = 4$$

•	•	•	•
•	•	•	•

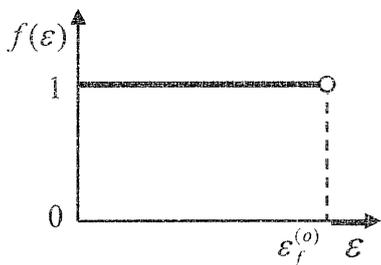
تعريف تابع فيرمي من عبارة توزيع (فيرمي - ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon \rightarrow \varepsilon + d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \rightarrow g + dg)$ بالشكل:

$$dN = \frac{dg(\varepsilon)}{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT} + 1} = \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT} + 1} = f(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon \quad ; \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT} + 1}$$

حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0K^0$ ، ونمثله بالشكل:

2

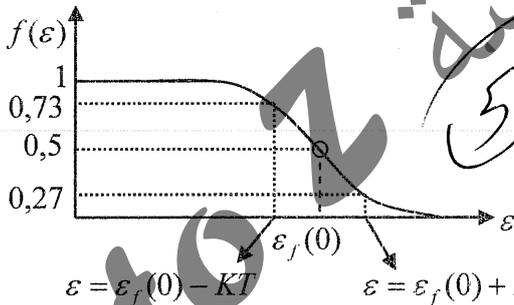
3



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 & ; \varepsilon < \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = 0 & ; \varepsilon > \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{0/0} + 1} = XX & ; \varepsilon = \varepsilon_f \end{cases}$$

شكل ()

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمة في المجال [0 - 1]. وفي جوار سوية فيرمي ، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-1} + 1} \approx 0,73 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) - KT \\ \frac{1}{e^0 + 1} = 0,5 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) \\ \frac{1}{e^{+1} + 1} \approx 0,27 & ; \varepsilon_f(0) + KT \end{cases}$$

تعريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$:

1- هي الطاقة الموافقة لتوزيع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^0$
 2- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^0$ وبمعدل

فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i \geq \varepsilon_f^{(0)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(0)}$

3- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon) = 0,5$

2 ج: 35 و 36

1: لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:
 نطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعتها المطلقة وفق توزيع M-B في مجال السرعات $[g, g + dg]$.

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta m g^2 / 2} g(g) dg$$

ونعوض عن المقدار $g(g) dg$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m g^2 / 2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-m g^2 / 2KT} CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

نعتبر أن $\alpha = m/2KT$

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزيع السرعة بدلالة تابع كثافة السرعة كما يلي:

$$dF(g) = \frac{dN(g)}{N} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = f(g^2) dg$$

حيث يعبر $f(g^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$$

للبرهان على أن $f(g^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $[0 \rightarrow \infty[$.

$$\int_0^{\infty} f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^{\infty} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(g) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^0}{0!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12$$

$\frac{c}{A|B}$

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$\frac{1}{A|B}$

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ الوزن الإحصائي

$\frac{1}{A|B}$

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$



مكتبة
AZ
للخدمات الجامعية



امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البنود التالية: (55 درجة)

1- تعطى عبارة الكثافة السطحية للتيار الإلكتروني بالعلاقة $J_x = \frac{2q}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\varepsilon - \varepsilon_f(T)]} dP_y dP_z$ فإذا علمت أن فرق الطاقة $\varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + P^2/2m$ استنتج صيغة ريتشاردسون - دخمان لكثافة التيار.

15

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة (J) $\varepsilon_1 = KT$ و $\varepsilon_2 = 2KT$ و $\varepsilon_3 = 3KT$ ، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$. والمطلوب:

20

1- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2, N_3)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$ ، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماء: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(N_1 + 1, N_2 - 2, N_3 + 1)$

3- استند من صيغتي تابع التحاص $Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ وتابع الكثافة الاحتمالي $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \varepsilon_i}$ في إيجاد ما يلي:

20

أ- القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ ، والانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2}$ ، والتشتت $\overline{\Delta \varepsilon^2}$ ، بدلالة تابع التحاص Z والمشتقة $\partial/\partial \beta$.
ب- صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

س2- أجب عن البنود التالية: (35 درجة)

1- استنتج تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة $G(g_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g_x^2}$ غوص (طبيعي)، أي ما يعرف بالسرعة الموجهة،

18

ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة ما يلي: $\overline{g_x}$ ، $\overline{g_x^2}$ ، $\overline{\Delta g_x^2}$

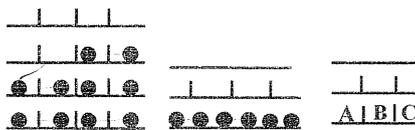
توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية (زوجي) n ; $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2} \frac{\pi}{\alpha^{n+1}}$

(فردية) n ; $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{m!}{2\alpha^{m+1}}$; $n = 2m + 1$; $m \geq 0$

2- حدد درجة حرارة وطاقة كل من الجمل الموضحة بالشكل (مرتفعة أو منخفضة)، مع التعليل المناسب؟

- أعد رسم الجمل، ثم حدد (لكل منها) نوع الجسيمات الموزعة على سوياتها، (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) والحالة الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.
- ما هو اسم الحالة التي تخضع لها البوزونات.
- عرف (مستلهماً من الشكل المناسب) سوية فيرمي، وحدد موقعها عليه.

17



مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: الثلاثاء 21/9/2021

مدرس المقرر

د. محمد إبراهيم

سأم تصحيح أمتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2020 - 2021 (تسعون درجة)

1 ج (55 درجة).

1- بما أن كمية الحركة المتبقية هي المتعلقة بالمركبتين y و z تصبح علاقة فرق الطاقة بالشكل

$$\varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + \frac{P_y^2 + P_z^2}{2m}$$

بالتعويض في عبارة التكامل الأخيرة نجد

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\varepsilon - \varepsilon_f(T)]} dP_y dP_z \Rightarrow J_x = \frac{2q}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\phi + \frac{P_y^2 + P_z^2}{2m}]} dP_y dP_z$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{\beta\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_y^2}{2mKT}} dP_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_z^2}{2mKT}} dP_z$$

وبالاستفادة من تكاملات بواسون

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2 \left(\frac{0!}{0! 2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} ; n=0 \text{ (زوجي)}$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{-\phi/KT} \sqrt{2\pi mKT} \sqrt{2\pi mKT}$$

وباعتبار $\beta = |1/KT|$ نجد صيغة ريتشاردسون - ديمان المطلوبة

$$J_x = \frac{4\pi m q}{\beta^2 h^3} e^{-\phi/KT} = \frac{4\pi m q}{h^3} (KT)^2 e^{-\phi/KT}$$

أو بالشكل

$$J_x = \frac{4\pi m K^2 q}{h^3} T^2 e^{-\phi/KT} = \lambda T^2 e^{-\phi/KT} ; \lambda = \frac{4\pi m_e K^2 q_e}{h^3} \approx 1,2 \times 10^6 \text{ A/m}^2 \text{ k}^2$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_0 = \frac{(N + N_e - 1)!}{N! (N_e - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000! (3 - 1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501$$

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2, N_3)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3} = 1,056$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{1000}{1,056} 2e^{-1} \approx 697$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{1,056} 2e^{-2} \approx 256$$

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,056} e^{-3} \approx 47$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 697 + 256 + 47 = 1000$$

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_3 \varepsilon_3 = 697KT + 256 \times 2KT + 47 \times 3KT = 1350KT \quad (2)$$

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1} 2^{N_2} 1^{N_3}}{N_1! N_2! N_3!} \right)$$

$$W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1+1} 2^{N_2-2} 1^{N_3+1}}{(N_1+1)! (N_2-2)! (N_3+1)!} \right) \quad (4)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2} 1^{N_3} (N_1+1)! (N_2-2)! (N_3+1)!}{N_1! N_2! N_3! 2^{N_1+1} 2^{N_2-2} 1^{N_3+1}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2} 1^{N_3} (N_1+1) N_1! (N_2-2)! (N_3+1) N_3!}{N_1! N_2 (N_2-1) (N_2-2)! N_3! 2 \times 2^{N_1} 2^{-2} \times 2^{N_2} 1}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}} = 2 \frac{(N_1+1)(N_3+1)}{N_2(N_2-1)} = 2 \frac{(698)(48)}{256(255)} = 1,026 \Rightarrow W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} > W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}$$

3- أ- نحسب القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \text{بما أن } \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad \text{نجد بالتعويض}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \quad \text{نجد بالتعويض } \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad \text{يكون } \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$\Delta \varepsilon^2 = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$$

ب- إيجاد صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad \text{وجدنا أن } \bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \text{وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات}$$

ومن علاقة الطاقة الداخلية $U = N \bar{\varepsilon}$ نجد

$$U = N \bar{\varepsilon} = N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{\nu} = NKT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

ج 2: (35 درجة)

1: نعيد كتابة العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعتها المطلقة وفق توزيع M-B في المجالات

$$[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x], [\vartheta_y, \vartheta_y + d\vartheta_y], [\vartheta_z, \vartheta_z + d\vartheta_z] \quad \text{كما يلي:}$$

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{Z} e^{\beta \varepsilon} g(\vartheta_{x,y,z}) d\vartheta_{x,y,z} \quad (1)$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (OX مثلاً). (أي لمعرفة $dN(\vartheta_x)$ التي تنحصر سرعتها في المجال

$[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$ ، نعيد صياغة مفهوم عنصر فراغ الاندفاع الطوري بالشكل التالي:

$$d\Gamma(P_{x,y,z}) = dq_V \cdot dP_V = V dP_x dP_y dP_z \quad (2)$$

$$dP_x = m d\mathcal{G}_x \quad \& \quad dP_y = m d\mathcal{G}_y \quad \& \quad dP_z = m d\mathcal{G}_z \quad \text{وبما أن}$$

بالتعويض في (2) بعد استبدال مركبات الاندفاع بمركبات السرعة

$$d\Gamma(\mathcal{G}_{x,y,z}) = dq_V \cdot dP_V = V m^3 d\mathcal{G}_x d\mathcal{G}_y d\mathcal{G}_z$$

وبالعودة إلى العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري التي تصبح بالشكل التالي:

$$g(\mathcal{G}_{x,y,z}) d\mathcal{G}_{x,y,z} = C d\Gamma(\mathcal{G}_{x,y,z}) = CV m^3 d\mathcal{G}_x d\mathcal{G}_y d\mathcal{G}_z \quad (3)$$

وإذا اعتبرنا الطاقة الإجمالية طاقة حركية

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \mathcal{G}^2 = \frac{1}{2} m (\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2 + \mathcal{G}_z^2) \quad (4)$$

وإذا أخذنا تابع التخاص لجسيم واحد

$$Z = CV (2\pi m KT)^{3/2} \quad (5)$$

كما نأخذ مضروب لاغرانج بعين الاعتبار

$$\beta = -1/KT \quad (6)$$

نعوض (3) و (4) و (5) و (6) في (1) نحصل على عدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعتها المطلقة بالشكل التالي:

$$dN(\mathcal{G}_{x,y,z}) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2KT} (\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2 + \mathcal{G}_z^2)} CV m^3 d\mathcal{G}_x d\mathcal{G}_y d\mathcal{G}_z$$

$$dN(\mathcal{G}_{x,y,z}) = N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT} \mathcal{G}_x^2} d\mathcal{G}_x e^{-\frac{m}{2KT} \mathcal{G}_y^2} d\mathcal{G}_y e^{-\frac{m}{2KT} \mathcal{G}_z^2} d\mathcal{G}_z \quad (5)$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (وليكن OX مثلاً) ندع مركبة سرعته دون تكامل ونكامل مركبات السرعة على المحورين الآخرين OY و OZ في المجال $[-\infty, +\infty]$ كما يلي:

$$dN(\mathcal{G}_x) = N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT} \mathcal{G}_x^2} d\mathcal{G}_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT} \mathcal{G}_y^2} d\mathcal{G}_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT} \mathcal{G}_z^2} d\mathcal{G}_z$$

نحل التكاملات باستخدام تكاملات بواسون وذلك بفرض $\alpha = m/2KT$ على النحو التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_y^0 e^{-\alpha \mathcal{G}_y^2} d\mathcal{G}_y = 2 \int_0^{+\infty} \mathcal{G}_y^0 e^{-\alpha \mathcal{G}_y^2} d\mathcal{G}_y = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_z^0 e^{-\alpha \mathcal{G}_z^2} d\mathcal{G}_z = 2 \int_0^{+\infty} \mathcal{G}_z^0 e^{-\alpha \mathcal{G}_z^2} d\mathcal{G}_z = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بالتعويض عن $\alpha = m/2KT$ وعن التكاملات بقيمتها نجد:

$$dN(\mathcal{G}_x) = N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha \mathcal{G}_x^2} d\mathcal{G}_x = N \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha \mathcal{G}_x^2} d\mathcal{G}_x$$

للحصول على تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة، نقسم الطرفين على N

$$dF(\mathcal{G}_x) = \frac{dN(\mathcal{G}_x)}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha \mathcal{G}_x^2} d\mathcal{G}_x \quad (5)$$

وبملاحظة أن المقدار $G(\mathcal{G}_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha \mathcal{G}_x^2}$ يمثل تابع كثافة غوص الطبيعي،

وهو تابع كثافة احتمال. لأنه يحقق الشرط الواحدي.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(v_x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \int_0^{+\infty} v_x^0 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \quad (2)$$

إيجاد قيم المقادير: $\overline{v_x^2}$ ، $\overline{v_x}$ ، $\overline{v_x}$

بما أن الأس فردي فنجد من تكاملات بواسون $\overline{g_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x G(g_x) dg_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_x^1 e^{-\alpha g_x^2} dg_x = 0$

تشير هذه النتيجة إلى أن عدد الجسيمات المتحركة وفق ox^+ يساوي العدد المتحرك وفق ox^-

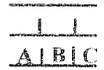
$$\overline{g_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x^2 G(g_x) dg_x = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{+\infty} g_x^2 e^{-\alpha g_x^2} dg_x = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} g_x^2 e^{-\alpha g_x^2} dg_x}_{\frac{1}{4\sqrt{\alpha^3}}} = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{4\sqrt{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{KT}{m}$$

$$\overline{\Delta v_x^2} = \overline{v_x^2} - \overline{v_x}^2 = 1/2\alpha$$

2: درجة حرارة وطاقة جميع الجمل منخفضة (بجوار الصفر المطلق)، لأن جسيماتها تحتل السويات الدنيا للطاقة.

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(3, 0, 0)$ ،

الوزن الإحصائي



$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(3,0,0)} = 3! \left(\frac{3^3}{3!} \frac{3^0}{0!} \frac{1^0}{0!} \right) = 27$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(5, 0, 0)$

الوزن الإحصائي



$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(5,0,0)} = \frac{(6+1-1)!}{6! 0!} \frac{(0+4-1)!}{0! 3!} \frac{(0+1-1)!}{0! 0!} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

الجملة فيرميونات حصراً والحالة الأم هي $(4, 4, 2, 0)$

الوزن الإحصائي



$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(4,4,2,0)} = \frac{4!}{4! (4-4)!} \frac{4!}{4! (4-4)!} \frac{4!}{2! (4-2)!} \frac{4!}{0! (4-0)!} = 1 \times 1 \times 6 \times 1 = 6$$

تخضع البوزونات لحالة تكاثف أينشتاين عند درجة الصفر المطلق.

تعريف سوية فيرمي: هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات (عند درجة الصفر المطلق)،

حيث تكون السويات الدنيا $\epsilon < \epsilon_f$ مشغولة بالكامل (ممتلئة)، أما العليا $\epsilon > \epsilon_f$ فتكون فارغة تماماً.

تشغل سوية فيرمي $\epsilon_f^{(0)}$ السوية الثالثة (المشغولة جزئياً بالفيرميونات) كما هو موضح في الشكل السابق.



اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البنود التالية: (45 درجة).

1- عرف عنصر فراغ الحجم الطوري $d\Gamma$ ، ثم استنتج حجوم العناصر التالية $d\Gamma(P)$ و $d\Gamma(v)$ و $d\Gamma(\epsilon)$ 10

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\epsilon_1 = KT$ (J) 20

و $\epsilon_2 = 2KT$ (J) و $\epsilon_3 = 3KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_3 = 2$ و $g_2 = 1$. والمطلوب:

1- ارسم هيكل السويات والتحولات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2, N_3)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$ ، وأنها حالة

توزيع طبيعي، ثم احسب طاقة هذه الحالة بدلالة KT . (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(N_1 + 1, N_2 - 2, N_3 + 1)$

3- استند من صيغتي تابع التحاص $Z = \sum_i g_i e^{\beta \epsilon_i}$ وتابع الكثافة الاحتمالي $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \epsilon_i}$ في إيجاد ما يلي: 15

أ- القيمة الوسطى $\bar{\epsilon}$ ، والانحراف المعياري $\bar{\epsilon}^2$ ، والتشتت $\Delta \epsilon^2$ ، بدلالة تابع التحاص Z والمشتقة $\partial/\partial \beta$.
ب- صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

س2- أجب عن البنود التالية: (45 درجة).

1- لدينا تابع كثافة السرعة المطلقة في إحصاء مكسويل - بولتزمان $f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$ (حيث $\alpha = m/2kT$) 20

والمطلوب: برهن أن $f(g^2)$ تابع كثافة احتمال، ثم أوجد قيم السرعة التالية g_H و \bar{g} و $\overline{g^2}$ ومثلها على منحنى

تابع الكثافة، ثم استند من النتائج السابقة في الحصول على قيم الطاقات الموافقة التالية $(\epsilon_H)_{Clas}$ و $(\bar{\epsilon})_{Clas}$.

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{n! 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} \quad (\text{بحالة } n \text{ زوجي})$$

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي)

2- أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعتها المطلقة في المجال $(g_H \rightarrow 1,6 g_H)$ 5

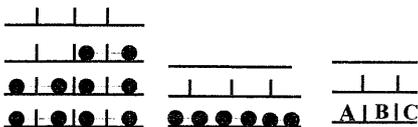
علماً أن قيم تابع الخطأ الموافقة: $E_r(1) = 0,8427$ و $E_r(1,6) = 0,9763$

3- حدد درجة حرارة وطاقة كل من الجمل الموضحة بالشكل (مرتفعة أو منخفضة)، مع التعليل المناسب؟ 20

• أعد رسم الجمل، ثم حدد (لكل منها) نوع الجسيمات الموزعة على سوياتها، (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) والحالة الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

• ما هو اسم الحالة التي تخضع لها البوزونات.

• عرف (مستلهماً من الشكل المناسب) سوية فيرمي، وحدد موقعها عليه.



مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: 19 / 8 / 2021

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2020 - 2021 (تسعون درجة)

ج 1: 45 درجة

1- يعطى عنصر الفراغ الطوري $\Gamma(q, P)$ بدلالة إحداثيي الموضع q والاندفاع P المعممين. فيكون عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$ بدلالة عنصري الحجم dq_V و dP_V (الخاصين بالموضع والاندفاع على الترتيب)، بالشكل:

$$d\Gamma = dq_V \cdot dP_V \quad (1)$$

نفرض للسهولة أن عنصر الحجم الخاص بالموضع مساوياً للحجم $dq_V = V$ لأنه يمثل جداءات لعناصر الموضع.
عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

نأخذ عنصر الحجم الخاص بالاندفاع مساوياً لعنصر حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع P ذاته كما يلي:

$$dP_V = d\left(\frac{4}{3}\pi P^3\right) = 4\pi P^2 dP$$

بالتعويض في (1) عن كل بقيمته نحصل على عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

$$d\Gamma(P) = 4\pi V P^2 dP \quad (2)$$

عنصر فراغ السرعة الطوري:

نجد من علاقة كمية الحركة بالسرعة حسب العلاقة:

$$P = m\vartheta \Rightarrow dP = m d\vartheta$$

وبالتعويض في (2) عن كل بقيمته نحصل على عنصر فراغ السرعة الطوري:

$$d\Gamma(\vartheta) = 4\pi V m^3 \vartheta^2 d\vartheta \quad (3)$$

عنصر فراغ الطاقة الطوري:

نجد من عبارة الطاقة الحركية (باعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المدروس هي طاقة حركية فقط).

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \vartheta^2 = \frac{P^2}{2m} \quad (*)$$

وكما هو واضح يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة الاندفاع من (*) في (2) كما يلي:

$$P^2 = 2m\varepsilon \Rightarrow P = \sqrt{2m\varepsilon} \Rightarrow dP = \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على عنصر فراغ الطاقة الطوري:

$$d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V 2m\varepsilon \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 2\pi V \sqrt{2m} \sqrt{\varepsilon} 2m d\varepsilon$$

$$d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon \quad (4)$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

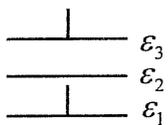
$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N! (N_e - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000! (3 - 1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501$$

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + e^{-2} + 2e^{-3} = 0,971$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{1000}{0,971} 2e^{-1} \approx 758$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{0,971} e^{-2} \approx 139$$



$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{0,971} 2e^{-3} \approx 103 \quad (2)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 758 + 139 + 103 = 1000 \quad (2)$$

وهي حالة توزع طبيعي لأن $N_1 > N_2 > N_3$ (1)
طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_3 \varepsilon_3 = 758 KT + 139 \times 2KT + 103 \times 3KT = 1345 KT \quad (2)$$

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1} 1^{N_2} 2^{N_3}}{N_1! N_2! N_3!} \right)$$

$$W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1+1} 1^{N_2-2} 2^{N_3+1}}{(N_1+1)! (N_2-2)! (N_3+1)!} \right)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}} = \frac{2^{N_1} 1^{N_2} 2^{N_3} (N_1+1)! (N_2-2)! (N_3+1)!}{N_1! N_2! N_3! 2^{N_1+1} 1^{N_2-2} 2^{N_3+1}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{1}{N_2 (N_2-1) (N_2-2)!} \frac{2^{N_3} (N_1+1) N_1! (N_2-2)! (N_3+1) N_3!}{2 \times 2^{N_3}}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}} = \frac{(N_1+1)(N_3+1)}{4 N_2 (N_2-1)} = \frac{(759)(104)}{4 \times 139 (138)} \approx 1,029 \Rightarrow W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} > W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)} \quad (5)$$

3- أ- نحسب القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \text{نجد بالتعويض} \quad \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$(4) \quad \overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \quad \text{نجد بالتعويض} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad \text{يكون} \quad \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$\Delta \varepsilon^2 = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \quad (4)$$

ب- إيجاد صيغة طاقة الجملة بدلالة المشتقة $\partial/\partial T$.

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad \text{وجدنا أن} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \text{وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات}$$

ومن علاقة الطاقة الداخلية $U = N \bar{\varepsilon}$ نجد

$$U = N \bar{\varepsilon} = N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = NKT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \quad (3)$$

1: نبرهن أن $f(g^2)$ تابع كثافة احتمال إذا حقق الشرط الواحدي. لذا نجري التكامل على السرعة في المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

20

$$\int_0^{\infty} f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^{\infty} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$\int_0^{\infty} f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1 \quad (3)$$

السرعة الأكثر احتمالاً g_H (Most probable speed):

نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(g^2)}{\partial g} = 0 \Rightarrow 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} (2g e^{-\alpha g^2} - 2\alpha g^3 e^{-\alpha g^2}) = 0 \Rightarrow 2g e^{-\alpha g^2} (1 - \alpha g^2) = 0$$

الحلول الناتجة عندما $g = 0$ هي $g = \infty$ وهي غير مقبولة. وعندما $1 - \alpha g^2 = 0$ نجد:

$$g_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} ; \alpha = \frac{m}{2kT}$$

القيمة الوسطى للسرعة المطلقة \bar{g} (Average molecular speed): نجدها باتتباع طريقة القيمة الوسطى (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{g} = \frac{\int_0^{\infty} g f(g^2) dg}{\int_0^{\infty} f(g^2) dg} ; \int_0^{\infty} f(g^2) dg = 1$$

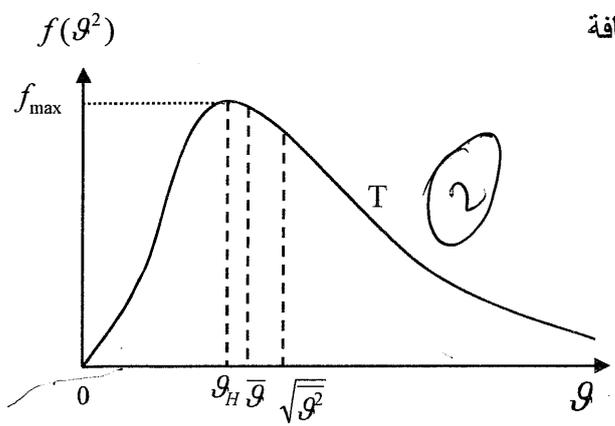
$$\bar{g} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^3 e^{-\alpha g^2} dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} g_H \approx 1,13 g_H \quad (3)$$

القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\overline{g^2}$ (Mean - Square speed):

نجدها باتتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^{\infty} f(g^2) dg = 1$ نجد:

$$\overline{g^2} = \int_0^{\infty} g^2 f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^4 e^{-\alpha g^2} dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{31}{2\alpha} = \frac{3}{2} g_H^2 = \frac{3kT}{m} \Rightarrow \sqrt{\overline{g^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} g_H \approx 1,22 g_H \quad (3)$$

تمثيل السرع المستنتجة g_H و \bar{g} و $\sqrt{\overline{g^2}}$ على منحنى تابع الكثافة



الطاقة الأكثر احتمالاً $(\epsilon_H)_{Clas}$

نفرض الطاقة الإجمالية لجسيم الغاز الكلاسيكي طاقة حركية فقط.

$$\epsilon_H = m g_H^2 / 2$$

$$(g_H)_{Clas} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (\text{السرعة الأكثر احتمالاً})$$

$$(\varepsilon_H)_{Clas} = \frac{m 2KT}{2 m} \Rightarrow (\varepsilon_H)_{Clas} = KT \quad (3)$$

الطاقة الوسطى $(\bar{\varepsilon})_{Clas}$:

باعتبار السرعة المميزة (القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\overline{v^2} = 3 \frac{KT}{m}$)، نجد:

$$(\bar{\varepsilon})_{Clas} = \overline{m v^2 / 2} = \frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{m}{2} 3 \frac{KT}{m} \Rightarrow$$

$$(\bar{\varepsilon})_{Clas} = \frac{3}{2} KT \quad (3)$$

2- نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_o(0 \rightarrow v_o) = N \left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} \right] \quad (2)$$

$$N_o(\mathcal{G}_H \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) = N_o(0 \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) - N_o(0 \rightarrow \mathcal{G}_H) \quad (5)$$

نستخدم (*) في التعبير عن قيمة كل من $N_o(0 \rightarrow \mathcal{G}_H)$ و $N_o(0 \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H)$ كما يلي:

$$N_o(\mathcal{G}_H \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) = N \left[E_r(1,6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} 1,6 e^{-(1,6)^2} \right] - N \left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} 1 e^{-(1)^2} \right]$$

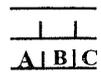
$$N_o(\mathcal{G}_H \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) = N \left[E_r(1,6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1,6}{e^{(1,6)^2}} - E_r(1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{e} \right]$$

وبإجراء الحسابات والتعويض عن $E_r(1)$ و $E_r(1,6)$ بقيمتهما من جدول الخطأ نجد:

$$N_o(\mathcal{G}_H \rightarrow 1,6 \mathcal{G}_H) = N [0,9763 - 0,1396 - 0,8427 + 0,4151] = 0,4091 N = 40,91 \% N \quad (3)$$

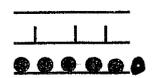
3: درجة حرارة وطاقة جميع الجمل منخفضة (بجوار الصفر المطلق)، لأن جسيماتها تحتل السويات الدنيا للطاقة.

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(3, 0, 0)$ ،
الوزن الإحصائي



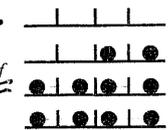
$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(3,0,0)} = 3! \left(\frac{3^3}{3!} \frac{3^0}{0!} \frac{1^0}{0!} \right) = 27 \quad (5)$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(5, 0, 0)$ ،
الوزن الإحصائي



$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(5,0,0)} = \frac{(6+1-1)!}{6! 0!} \frac{(0+4-1)!}{0! 3!} \frac{(0+1-1)!}{0! 0!} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (5)$$

الجملة فيرميونات حصراً والحالة الأم هي $(4, 4, 2, 0)$ ،
الوزن الإحصائي



$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(4,4,2,0)} = \frac{4!}{4! (4-4)!} \frac{4!}{4! (4-4)!} \frac{4!}{2! (4-2)!} \frac{4!}{0! (4-0)!} = 1 \times 1 \times 6 \times 1 = 6 \quad (5)$$

1 تخضع البوزونات لحالة تكاثف آينشتين عند درجة الصفر المطلق.

2 تعريف سوية فيرمي: هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات (عند درجة الصفر المطلق)،

حيث تكون السويات الدنيا $\varepsilon < \varepsilon_f$ مشغولة بالكامل (ممتلئة)، أما العليا $\varepsilon > \varepsilon_f$ فتكون فارغة تماماً.

1 } تشغل سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$ السوية الثالثة (المشغولة جزئياً بالفيرميونات) كما هو موضح في الشكل السابق.



امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البنود التالية: (55 درجة)

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من جسيمين متميزين موزعين على ثلاث سويات للطاقة $\epsilon_1 = KT$ ، $\epsilon_2 = 2KT$ ، $\epsilon_3 = 3KT$ السويات متحللة بالشكل: $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزيع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاسي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقم الجملة

- أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(1, 1, 0)$ في الحالات التالية:
1- الجسيمان متميزان A و B 2- الجسيمان بوزونان. 3- الجسيمان فيرميونان.

3- تعطى عبارة الكثافة السطحية للتيار الإلكتروني بالعلاقة $J_x = \frac{2q}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\epsilon - \epsilon_f(T)]} dP_y dP_z$ فإذا علمت أن فرق الطاقة $\epsilon - \epsilon_f(T) = \phi + P^2/2m$ استنتج صيغة ريتشاردسون - دخمان لكثافة التيار.

س2- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة)

1- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(v^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$). ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

2- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها
ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	C
$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	A B

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي)

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{n! 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد 2021 / 2 / 7

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2020 - 2021 (تسعون درجة)

ج 1: [55]

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{i(M-B)}$ max

نطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $\ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{M-B}) = \ln N! + \sum_i [N_i \ln g_i - \ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x - x$ نجد:

$$\ln(W_{M-B}) \approx N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{M-B}) = \frac{\partial \ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (\ln g_i - \ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i}} \Leftrightarrow \boxed{N_{i(M-B)} = e^\alpha g_i e^{\beta \varepsilon_i}}$$

2- المسألة:

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(2 + 3 - 1)!}{2!(3 - 1)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

• حالات التوزع الماكروي: [25]

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الستة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

• نحسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^\alpha g_i e^{\beta \varepsilon_i}}{e^\alpha g_j e^{\beta \varepsilon_j}} = \frac{g_i e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j e^{-\varepsilon_j/KT}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2e^{-KT/KT}}{2e^{-2KT/KT}} = \frac{2e^{-1}}{2e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{2e^{-KT/KT}}{1e^{-3KT/KT}} = \frac{2e^{-1}}{1e^{-3}} = 2e^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_3$$

$$\frac{N_2}{N_3} = \frac{2e^{-2KT/KT}}{1e^{-3KT/KT}} = \frac{2e^{-2}}{1e^{-3}} = 2e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3$$

(3)

والتوزيع طبيعي

• تحاص الجملة:

$$Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3}$$

$$Z_\Omega = Z^N = (2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3})^2 = 4e^{-2} + 4e^{-4} + e^{-6} + 8e^{-3} + 4e^{-4} + 4e^{-5}$$

تحاص الطاقم:

نقارنه بالعباره:

$$Z_\Omega = \sum_i W_i e^{-U_i/KT} = W_{(2,0,0)} e^{-2} + W_{(0,2,0)} e^{-4} + W_{(0,0,2)} e^{-6} + W_{(1,1,0)} e^{-3} + W_{(1,0,1)} e^{-4} + W_{(0,1,1)} e^{-5}$$

$$Z_\Omega = 4e^{-2} + 4e^{-4} + e^{-6} + 8e^{-3} + 4e^{-4} + 4e^{-5}$$

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزيع الماكروي بالشكل:

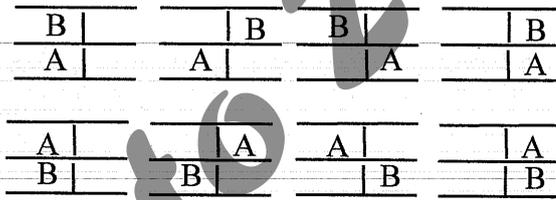
$$W_{(2,0,0)} = 4, \quad W_{(0,2,0)} = 4, \quad W_{(0,0,2)} = 1, \quad W_{(1,1,0)} = 8, \quad W_{(1,0,1)} = 4, \quad W_{(0,1,1)} = 4$$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (1,1,0)

$$\Omega = (\sum_i g_i)^N = 5^2 = 25 \quad \bullet \text{ للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة}$$

$$\Omega = \sum_i W_i = 4 + 4 + 1 + 8 + 4 + 4 = 25 \quad \bullet \text{ وهذا يتطابق مع الحسابات}$$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,1,0)} = 2! \left(\frac{2^1 2^1 1^0}{1! 1! 0!} \right) = 8 \quad \bullet \text{ 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)}$$



(3)

2- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} = \frac{(1+2-1)! (1+2-1)! (0+1-1)!}{1! (2-1)! 1! (2-1)! 0! (1-1)!} = 4$$

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1,1,0) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزيع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \frac{2!}{1! (2-1)!} \frac{2!}{1! (2-1)!} \frac{1!}{0! (1-0)!} = 4$$

-3

بما أن كمية الحركة المتبقية هي المتعلقة بالمركبتين y و z تصبح علاقة فرق الطاقة بالشكل

$$\epsilon - \epsilon_f(T) = \phi + \frac{P_y^2 + P_z^2}{2m}$$

بالتعويض في عبارة التكامل الأخيرة نجد

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\epsilon - \epsilon_f(T)]} dP_y dP_z \Rightarrow J_x = \frac{2q}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\phi + \frac{P_y^2 + P_z^2}{2m}]} dP_y dP_z$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{\beta\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_y^2}{2mKT}} dP_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_z^2}{2mKT}} dP_z$$

(5)

وبالاستفادة من تكاملات بواسون

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2 \left(\frac{0!}{0! 2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} ; n=0 \text{ (زوجي)}$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{-\phi/KT} \sqrt{2\pi mKT} \sqrt{2\pi mKT} \quad (15)$$

وباعتبار $\beta = |1/KT|$ نجد صيغة ريتشاردسون - ديمان المطلوبة

$$J_x = \frac{4\pi m q}{\beta^2 h^3} e^{-\phi/KT} = \frac{4\pi m q}{h^3} (KT)^2 e^{-\phi/KT}$$

أو بالشكل

$$J_x = \frac{4\pi m K^2 q}{h^3} T^2 e^{-\phi/KT} = \lambda T^2 e^{-\phi/KT} ; \lambda = \frac{4\pi m_e K^2 q_e}{h^3} \approx 1,2 \times 10^6 \text{ A/m}^2 \text{ k}^2 \quad (15)$$

ج 2: 35

1: لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 20

ننتقل من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعتها المطلقة وفق توزيع M-B في مجال السرعات $[g, g + dg]$.

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta m g^2/2} g(g) dg \quad (2)$$

ونعوض عن المقدار $g(g) dg$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = CV 4\pi m^3 g^2 dg \quad (3)$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV (2\pi mKT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m g^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi mKT)^{3/2}} e^{-m g^2/2KT} CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

نعتبر أن $\alpha = m/2KT$

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg \quad (15)$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزيع السرعة بدلالة تابع كثافة السرعة كما يلي:

$$dF(g) = \frac{dN(g)}{N} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = f(g^2) dg$$

حيث يعبر $f(g^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} \quad (15)$$

للبرهان على أن $f(g^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $[0 \rightarrow \infty[$.

$$\int_0^{\infty} f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

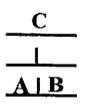
نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^{\infty} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(g) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1 \quad (15)$$

:2

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^0}{0!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12$$



(15)

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)



$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)



$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{2})$

الوزن الإحصائي



$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

A



امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2019 - 2020

س1- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (60 درجة)

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متميزة موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = kT$ و $\epsilon_2 = 2kT$ ، متحللتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزيع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقم الجملة

• أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية (1, 2) في الحالات التالية:
1- الجسيمات متميزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

3- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(v^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$). ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية (بحالة n زوجي)

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2^{n+1} n!} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}}$$

س2- أجب عن النقطتين التاليتين: (30 درجة)

11 • أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

$\frac{C}{A B}$	$\frac{A}{B C}$	$\frac{B}{C A}$
$\frac{A}{B C}$	$\frac{B}{C A}$	$\frac{C}{A B}$
$\frac{B}{C A}$	$\frac{C}{A B}$	$\frac{A}{B C}$

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

19 • استنتج علاقة كثافة الطاقة الطيفية $\rho(\epsilon)$ لماكس بلانك في تفسير إشعاع الجسم الأسود (الغاز الفوتوني)، ثم ضع العبارة الحاصلة بدلالة التردد والطول الموجي، ثم مثل بيانياً $\rho(\lambda)$ عند ثلاث درجات حرارة مختلفة، ماذا تستنتج؟

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الثلاثاء 20 / 10 / 2020

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

أجوبة بنود السؤال الأول: (60 درجة)

1ج- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{i(M-B)}$ max

20

نتطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln N! + \sum_i [N_i Ln g_i - Ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $Ln x! \approx x Ln x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \quad (7)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln g_i - Ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \quad (6)$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

$$\sum_i (Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad (7)$$

2ج- المسألة:

20

$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N!(N_e - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{3!(2 - 1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

• حالات التوزيع الماكروي:

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزيع الماكروي الأربعة.

$$(4) \cdot \left\{ \begin{array}{ll} (3, 0) & U=3kT \\ (0, 3) & U=6kT \\ (2, 1) & U=4kT \\ (1, 2) & U=5kT \end{array} \right\} \text{ ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي:}$$

• نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i}}{e^{\alpha} g_j e^{\beta \varepsilon_j}} = \frac{g_i e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j e^{-\varepsilon_j/KT}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1e^{-\frac{KT}{KT}}}{2e^{-\frac{2KT}{KT}}} = \frac{1}{2e^{-1}} = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow N_1 > N_2 \quad (2)$$

والتوزيع الطبيعي

$$Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = e^{-1} + 2e^{-2} \quad \bullet \text{ تحاص الجملة:}$$

$$Z_{\Omega} = Z^N = (e^{-1} + 2e^{-2})^3 = e^{-3} + 6e^{-4} + 12e^{-5} + 8e^{-6} \quad \bullet \text{ تحاص الطاقم:}$$

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{-U_i/kT} = W_{(3,0)} e^{-3} + W_{(2,1)} e^{-4} + W_{(1,2)} e^{-5} + W_{(0,3)} e^{-6} \quad \text{نقارنه بالعبارة:}$$

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزيع الماكروي بالشكل:

$$(c) \quad W_{(3,0)} = 1 \quad \text{و} \quad W_{(2,1)} = 6 \quad \text{و} \quad W_{(1,2)} = 12 \quad \text{و} \quad W_{(0,3)} = 8$$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (1,2)

$$\bullet \quad \text{للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة} \quad \Omega = (\sum_i g_i)^N = 3^3 = 27$$

$$\text{وهذا يتطابق مع الحسابات} \quad \Omega = \sum_i W_i = 1 + 6 + 12 + 8 = 27$$

$$\bullet \quad 1- \text{الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)} \quad W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3! \left(\frac{1!}{1!} \frac{2^2}{2!} \right) = 12$$

$\frac{BC }{A}$	$\frac{ BC}{A}$	$\frac{B C}{A}$	$\frac{C B}{A}$
$\frac{AC }{B}$	$\frac{ AC}{B}$	$\frac{A C}{B}$	$\frac{C A}{B}$
$\frac{AB }{C}$	$\frac{ AB}{C}$	$\frac{A B}{C}$	$\frac{B A}{C}$

$$2- \text{الجسيمات بوزونات} \quad W_{B-E} = \prod_{i=1}^2 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(1+1-1)! (2+2-1)!}{1! (1-1)! 2! (2-1)!} = 3$$



3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1,2) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزيع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^2 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{1!}{1! (1-1)!} \frac{2!}{2! (2-2)!} = 1$$



3- لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:

$$\text{يقصد بالسرعة المطلقة العبارة التالية} \quad g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}$$

ننتقل من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعتها المطلقة وفق توزيع M-B في مجال السرعات $[g, g + dg]$

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta m g^2/2} g(g) dg$$

ونعوض عن المقدار $g(g) dg$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\epsilon = m g^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-m g^2/2KT} CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

$$\alpha = m/2KT \quad \text{نعتبر أن}$$

$$dN(\mathcal{G}) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2} d\mathcal{G}$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزيع السرعة بدلالة تابع كثافة السرعة كما يلي:

$$dF(\mathcal{G}) = \frac{dN(\mathcal{G})}{N} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2} d\mathcal{G} = f(\mathcal{G}^2) d\mathcal{G}$$

حيث يعبر $f(\mathcal{G}^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\mathcal{G}^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2}$$

للبرهان على أن $f(\mathcal{G}^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

$$\int_0^{\infty} f(\mathcal{G}^2) d\mathcal{G} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2} d\mathcal{G}$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^{\infty} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha \mathcal{G}^2} d\mathcal{G} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(\mathcal{G}) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

أجوبة نقاط السؤال الثاني: (30 درجة)

تحديد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) وحساب وزنها الإحصائي

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^0}{0!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12$$

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

الفوتونات هي جسيمات الطاقة الكهرطيسية (الإشعاع الكهرطيسي)، وهي تنتمي لطائفة البوزونات، وعددها داخل تجويف الجسم الأسود غير ثابت وذلك بسبب ظاهرتي الخلق Creation والإفناء Annihilation. أي:

$$N = \sum_i N_i \neq cte \Rightarrow dN \neq 0$$

ف نجد من شرط الحالة الأكثر احتمالاً: $d \ln(W_{B-E}) + \alpha dN + \beta dU = 0$ أن $\alpha = 0$. وبالتالي يكون: $e^{-\alpha} = 1$ ويصبح عدد الفوتونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ وفقاً لتوزيع بوز-أينشتين:

$$dN_{(B-E)} = \frac{dg(\epsilon)}{e^{-\alpha} e^{\epsilon/kT} - 1} = \frac{dg(\epsilon)}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (a)$$

نكتب درجة التحلل $dg(\epsilon)$ للسويات الواقعة في المجال $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$ بدلالة عنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma$ من العبارة

$$dg(\epsilon) = c d\Gamma(\epsilon) \quad ; \quad c = 1/h^3 \quad \rho \quad d\Gamma(\epsilon) = dq_v dp_v = V d\left(\frac{4}{3}\pi p^3\right) = V 4\pi p^2 dp$$

$$dg(\epsilon) = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} \quad (*)$$

وبما أن الفوتونات أشعة كهرومغناطيسية فهي تملك اتجاهين مستقلين للاستقطاب، ويحصل تضاعف لقيمة درجة التحلل. وحيث أن طاقة الفوتون ϵ مرتبطة بزخمه p بواسطة سرعة الضوء c وفق العلاقة:

$$\epsilon = cp \Rightarrow p = \frac{\epsilon}{c} \Rightarrow dp = \frac{d\epsilon}{c}$$

ف نجد بالتعويض في (*):

$$dg(\epsilon) = 2 \frac{V 4\pi \epsilon^2 d\epsilon}{h^3 c^3} \quad (**)$$

نعوض (***) في (a) فنجد:

$$dN_{(B-E)} = \frac{V 8\pi \epsilon^2 d\epsilon}{h^3 c^3 e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (b)$$

وبما أن طاقة الجملة في الحالة المستمرة

$$U = \int \epsilon dN \Rightarrow dU = \epsilon dN_{(B-E)} \quad (c)$$

نعوض (b) في (c) فنجد:

$$dU = \frac{V 8\pi \epsilon^3 d\epsilon}{h^3 c^3 e^{\epsilon/kT} - 1}$$

نحصل على كثافة الطاقة في وحدة الحجم ($V=1$) بالشكل:

$$du = \frac{dU}{V} = \frac{8\pi \epsilon^3 d\epsilon}{h^3 c^3 e^{\epsilon/kT} - 1} = \rho(\epsilon) d\epsilon \quad (d)$$

يمثل $\rho(\epsilon)$ كثافة طيف طاقة الإشعاع الصادر عن الجسم الأسود وفقاً لتفسير ماكس بلانك. (علاقة ماكس بلانك في الإشعاع)

$$\rho(\epsilon) = \frac{8\pi \epsilon^3}{h^3 c^3} \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (E)$$

- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\epsilon)$ بدلالة التردد ν ، باستخدام علاقة ماكس بلانك: $\epsilon = h\nu \Rightarrow d\epsilon = h d\nu$

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (F)$$

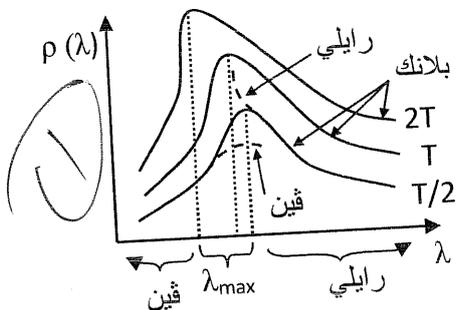
- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\nu)$ بدلالة طول الموجة λ ، باستخدام العلاقة: $|d\nu| = (c/\lambda^2) d\lambda$

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (G)$$

- نمثل بيانياً عبارة بلانك (G) لكثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بدلالة طول الموجة λ كما هو موضح بالشكل.

ونستنتج مايلي:

✓ لا تتعلق كثافة الإشعاع بكتلة الجسم m .
✓ يتحقق قانون فين في الإزاحة



- تنزاح القيمة العظمى للأطوال الموجية بارتفاع درجات الحرارة نحو الأطوال الموجية القصيرة (الطاقات العالية).

$$\lambda_{max} T = cte = 2,897 \times 10^{-3} \text{ mk}^0$$

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2019 - 2020

س 1- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (60 درجة)

16 - استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)}$ لتوزيع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

25 - مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$)، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\epsilon_1 = 0$ (J) و $\epsilon_2 = KT$ (J) و $\epsilon_3 = 2KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = N$ و $g_2 = g_3 = 1$ والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\bar{N}-1, \bar{1}, \bar{0})$ ، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية:

A- الجسيمات متميزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

(بفرض $N = 2$ ، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A,B,C)، ومثلها.)

3- بفرض أن الجسيمات متميزة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزيع الماكروي الأكثر احتمال (N_1, N_2, N_3) بدلالة

العدد N وتابع التخاص Z ، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1 + N_2 + N_3 = N$). ما نوع التوزيع الحاصل؟

4- إذا كانت الجسيمات بوزونات: ماذا يمكنك القول عن حالة ودرجة حرارة الجملة الواقعة بحالة التوزيع الماكروي

$(\bar{N}-1, \bar{1}, \bar{0})$ ، مثل بالرسم هذه الحالة (لا تتقيد بدرجة التحلل المعطاة).

5- إذا كانت الجسيمات فيرميونات: والجملة متعددة سويات الطاقة ومتعددة التحلل وواقعة عند درجة الصفر المطلق،

المطلوب: مثل بالرسم شكلاً توضح عليه توضع الفيرميونات على السويات، ثم اعط تعريفاً واحداً لسوية فيرمي.

20 - 3- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\epsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استند في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

س 2- أجب عن النقاط الثلاث التالية: (30 درجة)

1- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

10- اكتب العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي، ومثل بيانياً المشغولية عند الطاقات العالية والمنخفضة.

و استنتج عبارة تحاص الغاز الفونوني Z في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير أينشتين.

توجيه: سويات طاقة الفونونات $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ وهي غير متحللة، ودرجة أينشتين $\theta_E = \hbar\omega/K$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس الأحد 2020 / 8 / 16

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2019 - 2020 الدرجة العظمى: تسعون درجة

أجوبة بنود السؤال الأول: (60 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{(F-D)}$ max

15

نتطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D). المعطاة بالعلاقة:

$$W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i . أي $g_i \gg N_i$.
نوجد بدايةً $\ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{F-D}) \approx \ln \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{F-D}) \approx \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)] \quad (5)$$

بما أن W_{F-D} تابع لكل من g_i و N_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{F-D}) = \frac{\partial \ln(W_{F-D})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[-\ln N_i - 1 + \frac{g_i}{g_i - N_i} + \ln (g_i - N_i) - \frac{N_i}{g_i - N_i} \right] dN_i = \sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} - 1 + \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right) dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) \approx \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} dN_i \quad (5)$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1 \Rightarrow N_{i(F-D)}^{\max} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1} \quad (5)$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! (N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(N + 3 - 1)!}{N! (3 - 1)!} = \frac{(N + 2)!}{2N!} = \frac{(N + 2)(N + 1)N!}{2N!} = \frac{(N + 2)(N + 1)}{2} \quad (2)$$

2- طاقة الحالة الماكروية $(\vec{N} - 1, \vec{1}, \vec{0})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)} = \sum_i N_i \varepsilon_i = (N - 1) \times 0 + 1 \times KT + 0 \times 2KT = KT \quad (2)$$

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = N! \left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1^1}{1!} \frac{1^0}{0!} \right) = N N^{N-1} = N^N \quad (2)$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{(N-1+N-1)! (1+1-1)! (0+1-1)!}{(N-1)! (N-1)! 1! (1-1)! 0! (1-1)!} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} \quad (2)$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{N-1}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{N!}{(N-1)! (N-N+1)! 1! (1-1)! 0! (1-0)!} = N \quad (2)$$

الحسابات الرقمية والتمثيل: الحالة المطلوبة هي $(\overset{\varepsilon_1}{1}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ و $g_2 = g_3 = 1$ و $g_1 = 2$

Ⓚ $\frac{B}{A|} \quad \frac{B}{|A} \quad \frac{A}{B|} \quad \frac{A}{|B} \quad W_{M-B} = N^N = 2^2 = 4$ (كلاسيكية):

Ⓚ $\frac{\bullet}{|} \quad \frac{\bullet}{|} \quad W_{B-E} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} = \frac{2!}{1} = 2$

Ⓚ $\frac{\bullet}{\bullet|} \quad \frac{\bullet}{\bullet|} \quad W_{F-D} = N = 2$

٣- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i / kT} = N e^{-0} + 1 e^{-1} + 1 e^{-2} = N + e^{-1} + e^{-2} \quad (1)$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} = e^{\alpha} g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}$$

فيكون: $N_3 = \frac{N}{Z} 1 e^{-2} = \frac{N}{Z} e^{-2}$ و $N_2 = \frac{N}{Z} 1 e^{-1} = \frac{N}{Z} e^{-1}$ و $N_1 = \frac{N}{Z} N e^{-0} = \frac{N^2}{Z}$

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

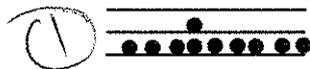
$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{N^2}{Z} + \frac{N}{Z} e^{-1} + \frac{N}{Z} e^{-2} = \frac{N}{Z} (N + e^{-1} + e^{-2}) = \frac{N}{Z} Z = N \quad (1)$$

لإيجاد نوع التوزيع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_1}{N_3} = N e^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_2}{N_3} = \frac{e^{-1}}{e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_1}{N_2} = N e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

نستنتج أن: $N_1 > N_2 > N_3$ فالتوزيع طبيعي Ⓚ

٤- عندما تكون الجسيمات بوزونات: فتكون الجملة الواقعة وفق التوزيع الماكروي $(\overset{\varepsilon_1}{N-1}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$ بحالة تكاتف،



ودرجة حرارتها هي درجة أينشتاين Ⓚ

٥- عندما تكون الجسيمات فيرميونات: تتوضع الفيرميونات عند درجة الصفر المطلق

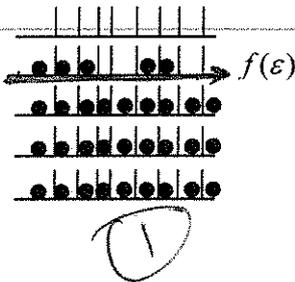
على كافة السويات الدنيا بمعدل فيرميون واحد لكل درجة تحلل.

- تكون كافة السويات الأدنى من سوية فيرمي $f(\varepsilon)$ مملوءة (مشغولة) بمعدل

فيرميون واحد لكل درجة تحلل والسويات الأعلى فارغة تماماً.

- سوية فيرمي هي أعلى سويات الطاقة المشغولة كلياً أو جزئياً بالفيرميونات

Ⓚ



37- لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:

20

نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقتها، في المجال الطاقى $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{فنجذ } e^\alpha = \frac{N}{Z} \quad \text{وباعتبار } N_{i(M-B)} = e^\alpha g_i e^{\beta\varepsilon_i} \quad \text{انشغال مكسويل}$$

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon) d\varepsilon$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = C d\Gamma(\varepsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته

$$Z = CV (2\pi m KT)^{3/2} \quad \text{، واعتبار أن } \beta = -1/KT \quad \text{نجد:}$$

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

بالاختزال والإصلاح.

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزيع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N} = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1)$$

حيث يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$f(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}$$

للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدى بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

$$F(\varepsilon) = \int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx \quad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{1/2} KT \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

أجوبة نقاط السؤال الثاني: (30 درجة)

• حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات في الجمل التالية

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{0})$

11

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2,0)} = 3! \left(\frac{2^1}{1!} \frac{2^2}{2!} \frac{1^0}{0!} \right) = 24$$

B I C
A I

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\hat{2}, \hat{2}, \hat{1})$

•
• I •
• I •

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+1-1)!}{1!(1-1)!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

① الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(0+2-1)!}{0!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 1 \times 1 = 3$$

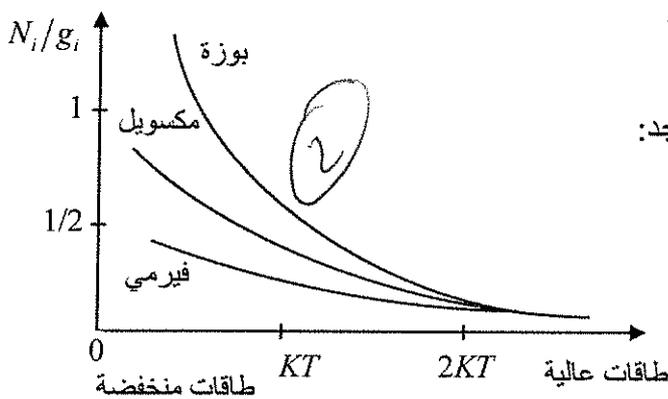
• تأخذ العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي الشكل

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} \pm m} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} \pm 1}$$

10

حيث يأخذ الثابت m القيمة صفر في توزيع مكسويل والقيمة واحد في توزيع بوزة وفيرمي، والإشارة السالبة لبوزة والموجبة لفيرمي.

عند الطاقات العالية $(\varepsilon_i - \mu) \gg KT$ يؤول توزيع بوزة وفيرمي إلى توزيع مكسويل (يُهمل الواحد في المقام)



شكل ()

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} \pm 1} \approx \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}}} \ll 1 \Rightarrow \frac{N_i}{g_i} \rightarrow 0$$

عند الطاقات المنخفضة $(\varepsilon_i - \mu) \ll KT$ يكون $e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} \geq 1$ فنجد:

$$\text{②} \quad \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}}} \leq 1 \text{ من أجل مكسويل}$$

$$\text{②} \quad \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} - 1} \gg 1 \text{ من أجل بوزة}$$

$$\text{②} \quad \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{KT}} + 1} \leq \frac{1}{2} \text{ من أجل فيرمي}$$

• تعطى طاقة الهزاز الكوانتي بالصيغة $\varepsilon_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$

أي أن للهزاز طاقة $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$ في السوية الأرضية $n=0$ عند درجة الصفر المطلق $T=0 K$

يعطى تابع تحاص سويات الطاقة غير المتحللة للفونونات بصيغته المعروفة

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{\beta \varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega} = e^{\frac{\beta \hbar \omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta n \hbar \omega} = e^{-\frac{\hbar \omega}{2KT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n \hbar \omega}{KT}} = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \frac{\theta_E}{T}}$$

حيث افترضنا درجة حرارة أينشتاين $\theta_E = \frac{\hbar \omega}{K}$ مقدار ثابت، وبكتابة المجموع نجد

$$Z = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} (1 + e^{-\frac{\theta_E}{T}} + e^{-2\frac{\theta_E}{T}} + e^{-3\frac{\theta_E}{T}} + \dots)$$

السلسلة هندسية حدها الأول واحد وأساسها $e^{-\frac{\theta_E}{T}} < 1$ فيكون مجموعها $\frac{1}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$ وبالتعويض

$$Z = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} / (1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}})$$

④

امتحان مقرر الفيزياء الاحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2019 - 2020

س1- اجب عن البنود الثلاثة التالية: (55 درجة)

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(M-H)}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمالاً. (بدلالة مضروب لاغرانج)

2- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متميزة موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = kT$ و $\epsilon_2 = 2kT$ متحلتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقت (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الاحصائية والحالات الممكنة.

• أوجد (مع التمثيل) الوزن الاحصائي للحالة الماكروية $(\hat{1}, \hat{2})$ في الحالات التالية:

- 1- الجسيمات متميزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات غير مبرونات.
- 3- استنتج عبارة السعة الحرارية C_V للغاز الفونوني في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير أينشتاين، ثم ناقش النتائج الحاصلة عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة.

س2- اجب عن البندين التاليين: (35 درجة)

1- أوجد بدلالة المعطيات $Z = \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i}$ و $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{-\beta \epsilon_i}$

- القيمة الوسطى $\bar{\epsilon}$ ، والانحراف المعياري $\overline{\epsilon^2}$ ، والتشتت $\overline{\Delta \epsilon^2}$ ، (بدلالة Z أو $\ln Z$ والمشتقة $\partial/\partial \beta$)
- استند من علاقة المشتقة $\partial/\partial \beta$ بالمشتقة $\partial/\partial T$ ومن عبارة تابع التحاص $Z = CV (2\pi m kT)^{3/2}$

في البرهان على أن صيغة طاقة الجملة (بثبات الحجم) هي $\bar{E} = N \bar{\epsilon} = N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = \frac{3}{2} NKT$

2- جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي موزعة على عدد محدود من سويات الطاقة غير المتعدالة ($g_i = 1$)،

وطاقتها تتبع العلاقة: $i = 0, 1, 2, 3, \dots$; $\epsilon_i = i \epsilon_0$. والمطلوب:

- 1- احسب تحاص الجملة Z بدلالة β .
- 2- احسب متوسط طاقة الجسيم $\bar{\epsilon}$.
- 3- احسب قيمة $\bar{\epsilon}$ إذا علمت أن: $\epsilon_0 \ll kT$ ، ماذا تستنتج؟

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد 2020 / 2 / 16

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2019 - 2020

س1- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (55 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(M, N)}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمالاً. (بدلالة مضروبى لاغرانج)

2- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متميزة موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = kT$ و $\epsilon_2 = 2kT$ متحلتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزيع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاغم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمالاً.

• أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(1, 2)$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متميزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

3- استنتج عبارة السعة الحرارية C_V للغاز الفونوني في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير أينشتاين، ثم ناقش النتيجة الحاصلة عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة.

س2- أجب عن البندين التاليين: (35 درجة).

1- أوجد بدلالة المعطيات $Z = \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i}$ و $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{-\beta \epsilon_i}$

القيمة الوسطى $\bar{\epsilon}$ ، والانحراف المعياري ϵ^2 ، والتشتت $\Delta \epsilon^2$ ، (بدلالة Z أو $\ln Z$ والمشتقة $\partial/\partial \beta$).

• استفد من علاقة المشتقة $\partial/\partial \beta$ بالمشتقة $\partial/\partial T$ ومن عبارة تابع التحاص $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$

في البرهان على أن صيغة طاقة الجملة (بثبات الحجم) هي $U = N \bar{\epsilon} = N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) = \frac{3}{2} NKT$

2- جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي موزعة على عدد محدود من سويات الطاقة غير المتحللة ($g_i = 1$)،

وطاقتها تتبع العلاقة: $\epsilon_i = i \epsilon_0$; $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ والمطلوب:

1- احسب تحاص الجملة Z بدلالة β .

2- احسب متوسط طاقة الجسيم $\bar{\epsilon}$.

3- احسب قيمة $\bar{\epsilon}$ إذا علمت أن: $\epsilon_0 \ll KT$ ، ماذا تستنتج؟

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: الأحد 2020 / 2 / 16

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر



سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2019 - 2020 (تسعون درجة)

ج 1: 55 درهماً

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{i(M-B)}$

نطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بداية $\ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{M-B}) = \ln N! + \sum_i [N_i \ln g_i - \ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x - x$ نجد:

$$\ln(W_{M-B}) \approx N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \quad (4)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i ، وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحليها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{M-B}) = \frac{\partial \ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (\ln g_i - \ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \quad (4)$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad (1) \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i \quad (1)$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^\alpha g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad (5)$$

2- المسألة: 20

$$N_0 = \frac{(N + N_c - 1)!}{N!(N_c - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{3!(2 - 1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

• حالات التوزيع الماكروي:

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزيع الماكروي الأربعة.

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (3, 0) \\ (0, 3) \\ (2, 1) \\ (1, 2) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} U=3kT \\ U=6kT \\ U=4kT \\ U=5kT \end{array}$$

• نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{e^\alpha g_1 e^{\beta \varepsilon_1}}{e^\alpha g_2 e^{\beta \varepsilon_2}} = \frac{g_1 e^{-\varepsilon_1/kT}}{g_2 e^{-\varepsilon_2/kT}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1e^{\frac{kT}{kT}}}{2e^{\frac{2kT}{kT}}} = \frac{1}{2e} = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

والتوزيع طبيعي

$$Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/kT} = e^{-1} + 2e^{-2} \quad \bullet \text{ تحاص الجملة:}$$

تحاص الطاقم: $Z_{\Omega} = Z^N = (e^{-1} + 2e^{-2})^3 = e^{-3} + 6e^{-4} + 12e^{-5} + 8e^{-6}$
 نقارنه بالعباره: $Z_{\Omega} = \sum W_i e^{-E_i/kT} = W_{(3,0)} e^{-3} + W_{(2,1)} e^{-4} + W_{(1,2)} e^{-5} + W_{(0,3)} e^{-6}$

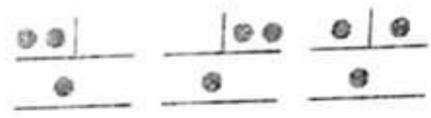
فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزيع الماكروي بالشكل:
 (5) $W_{(3,0)} = 1$ و $W_{(2,1)} = 6$ و $W_{(1,2)} = 12$ و $W_{(0,3)} = 8$
 الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (1, 2)

• 1- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية) $W_{(1,2)} = 3! \left(\frac{1!}{1!} \frac{2!}{2!} \right) = 12$

BC	BC	B C	C B
A	A	A	A
AC	AC	A C	C A
B	B	B	B
AB	AB	A B	B A
C	C	C	C

(3)

2- الجسيمات بوزونات $W_{(1,2)} = \frac{(1+1-1)! (2+2-1)!}{1! (1-1)! 2! (2-1)!} = 3$



(3)

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1, 2) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزيع مقبولة
 $W_{(1,2)} = \frac{1! 2!}{1! (1-1)! 2! (2-2)!} = 1$



(3)

3: تفسير أينشتين

افترض أينشتين (اعتمادا على مفاهيم النظرية الكوانتية) أن ذرات الشبكة البلورية عبارة عن هزازات مرونة توافقية بسيطة، ومستقلة، وتهتز في الأبعاد الثلاثة حول مواضع اتزانها فتصدر عنها أمواج مرنة بتردد ثابت. تعطى طاقة الهزاز الكوانتي بالصيغة

$$\epsilon_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

أي أن للهزاز طاقة $\epsilon_n = \frac{1}{2} \hbar \omega$ في السوية الأرضية $n=0$ عند درجة الصفر المطلق $T=0 K$ يعطى تابع تحاص سويات الطاقة غير المتحللة للفونونات بصيغته المعروفة

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{\beta \epsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega} = e^{\beta \frac{\hbar \omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta n \hbar \omega} = e^{-\frac{\hbar \omega}{2kT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n \hbar \omega}{kT}} = e^{-\frac{\theta_D}{2T}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \frac{\theta_D}{T}}$$

حيث افترضنا درجة حرارة أينشتين $\theta_D = \frac{\hbar \omega}{k}$ مقدار ثابت، وبكتابة المجموع نجد

$$Z = e^{-\frac{\theta_D}{2T}} (1 + e^{-\frac{\theta_D}{T}} + e^{-2\frac{\theta_D}{T}} + e^{-3\frac{\theta_D}{T}} + \dots)$$

السلسلة هندسية حدها الأول واحد وأساسها $e^{-\frac{\theta_D}{T}}$ ، فيكون مجموعها $\frac{1}{1 - e^{-\frac{\theta_D}{T}}}$

$$Z = \frac{e^{-\frac{\theta_E}{2T}}}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}} \quad (2)$$

نحسب الطاقة الوسطى للفونون (من أجل درجة حرية واحدة) من العلاقة $\bar{\epsilon} = KT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)$ لذا نوجد $\ln Z$

(1)

$$\ln Z = -\frac{\theta_E}{2T} - \ln \left| 1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}} \right|$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \left(\frac{0 - 2\theta_E}{4T^2} \right) \left[0 - \left(\frac{0 - \theta_E}{T^2} \right) e^{-\frac{\theta_E}{T}} \right] = \frac{\theta_E}{2T^2} + \frac{\theta_E e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{T^2 \left(1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}} \right)}$$

بالتعويض في عبارة الطاقة الوسطى للفونون

$$\bar{\epsilon} = \frac{K\theta_E}{2} + \frac{K\theta_E e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}} \Rightarrow \bar{\epsilon} = K\theta_E \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1} \right) \quad (1)$$

نحسب الطاقة الداخلية لمول واحد من الفونونات N_A وبثلاث درجات حرية لكل فونون (مع اعتبار $K = R$)

$$U = 3N_A \bar{\epsilon} = 3N_A K\theta_E \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1} \right) \Rightarrow U = 3R\theta_E \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1} \right) \quad (2)$$

نحسب السعة الحرارية من العلاقة

$$C_V = 3R\theta_E \left[0 + \frac{0 - \left(\frac{0 - \theta_E}{T^2} \right) e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{\left(1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}} \right)^2} \right] \Rightarrow C_V = 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{\left(1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}} \right)^2} \quad (3)$$

المناقشة:

أولاً: عند درجات الحرارة العالية (أكبر بكثير من درجة أينشتاين) $T \gg \theta_E$ نفقر التابع الأسّي في

$$C_V = 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{\left(1 - \frac{\theta_E}{T} + \dots \right)}{\left(1 + \frac{\theta_E}{T} - 1 \right)} = 3R \left(1 + \frac{\theta_E}{T} + \dots \right) \Rightarrow C_V \approx 3R \quad (2)$$

بـ ثانياً: عند درجات الحرارة المنخفضة $T \ll \theta_E$ نهمل الواحد في المقام ونحصل على القيمة

$$C_V = 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 e^{-\frac{\theta_E}{T}} \gg \lim_{T \rightarrow 0} C_V = 3R \lim_{T \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x} \rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} C_V = 0 \quad (2)$$

ج 2: 35 درج

1: بما أن $P_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta \epsilon_n}$ تابع كثافة احتمال فان القيمة الوسطى لاتي مقدار (الطاقة مثلا) تعطى بالعلاقة

$$\bar{\epsilon} = \sum \epsilon_n P_n = \frac{1}{Z} \sum \epsilon_n e^{-\beta \epsilon_n}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \text{بما ان } \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum \epsilon_n e^{-\beta \epsilon_n}$$

$$\bar{\epsilon} = \sum \epsilon_n P_n = \frac{1}{Z} \sum \epsilon_n e^{-\beta \epsilon_n} \quad \text{وبالمثل يكون الانحراف المعياري}$$

20

(5)

(5) $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$ نجد بالتعويض $\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \varepsilon_i^2 g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ يكون $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$

$$\Delta \varepsilon^2 = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

• نوجد لغارتنا تابع التحاص $Z = CV (2\pi mKT)^{3/2}$ ثم مشتقة اللغارتنا

$$\ln Z = \ln C + \ln V + \frac{3}{2} \ln(2\pi mK) + \frac{3}{2} \ln T \Rightarrow \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2T}$$

وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات $\frac{\partial}{\partial \beta} = -KT \frac{\partial}{\partial T}$ و باعتبار أن $\bar{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)$

وبالتعويض عن كل بقيمته في عبارة الطاقة نجد المطلوب كما يلي

$$U = N \bar{\varepsilon} = N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) = NKT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right) = \frac{3}{2} NKT$$

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i} = \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i} (1 + e^{-\beta \varepsilon_i} + e^{-2\beta \varepsilon_i} + \dots)$$

يمثل Z سلسلة هندسية أساسها $e^{-\beta \varepsilon_i}$ وحدودها متناقصة، لأن $\beta \varepsilon_i > 0$ وحدودها < 1

(5) $Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_i}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_i}}$ ، $(e^{-\beta \varepsilon_i})^0 = 1$ ، $(e^{-\beta \varepsilon_i})^1 = e^{-\beta \varepsilon_i}$ ، $(e^{-\beta \varepsilon_i})^2 = e^{-2\beta \varepsilon_i}$ ، ...

2- متوسط طاقة الجسيم نجد بتطبيق العلاقة $\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ على الحد أعلاه

$$\ln Z = \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_i}} \right) = -\ln(1 - e^{-\beta \varepsilon_i})$$

وبالتعويض

$$\bar{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\ln(1 - e^{-\beta \varepsilon_i}) \right) = \frac{\varepsilon_i e^{-\beta \varepsilon_i}}{1 - e^{-\beta \varepsilon_i}}$$

1- عندما $\beta \varepsilon_i \ll 1$ ، $e^{-\beta \varepsilon_i} \approx 1 - \beta \varepsilon_i$ ، $1 - e^{-\beta \varepsilon_i} \approx \beta \varepsilon_i$ ، $\bar{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon_i (1 - \beta \varepsilon_i)}{\beta \varepsilon_i} = \frac{1}{\beta} = KT$

(5)

مطلوب هذه الحالة ان العزم الفلاديمي يحدد بالدرجة الاولى بالدرجة الاولى

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة الصيفية للعام الدراسي 2018 - 2019

س ١- أجب عن البنود التالية (60 درجة)

- ١- استنتج علاقة ماكس بلانك في كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود في وحدة الحجم. ثم أجب عن ما يلي:
- ناقش علاقة بلانك الحاصلة (بدلالة التردد ν) في مجالي الطاقات المنخفضة $h\nu \ll kT$ والعالية $h\nu \gg kT$.
 - واستنتج علاقتي (رايلي - جينز) و (فين) الموافقتين.
 - اكتب عبارة بلانك الحاصلة بدلالة طول الموجة λ ومثلها بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة. ماذا تستنتج؟

٢- جملة مكونة من عدد لانهايي من الجسيمات غير المتميزة. موزعة على عدد لانهايي من السويات بالشكل:

$$\varepsilon_n = n\varepsilon_0 ; n=0,1,2,3,\dots$$

١- أوجد تحاص الجملة Z .

٢- أوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ في الحالات: $\varepsilon_0 \ll kT$ و $\varepsilon_0 = kT$ و $\varepsilon_0 \gg kT$.

٣- أوجد نسب أرقام انشغال السويات العليا للطاقة، وحدد نوع التوزيع بهذه الحالة.

٣- عرف تابع فيرمي $f(\varepsilon)$ ، ومثله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f(T=0k^0)$.

ثم مثله في جوارها من أجل $T \neq 0$ (عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm kT$).

- اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$.

س ٢- أجب عن البندين التاليين (30 درجة)

١- اكتب العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي، ومثل بيانياً المشغولية عند الطاقات العالية والمنخفضة.

٢- يُعطى تابع كثافة الطاقة بالشكل $f(\varepsilon) = \frac{1}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\varepsilon)$ حيث $\beta = -1/kT$ ، والمطلوب:

١- برهن أن علاقة درجة التحلل بعنصر فراغ الطاقة الطوري من الشكل: $g(\varepsilon)d\varepsilon = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$.

٢- استند من النتيجة السابقة ومن تعريف Z في الحالة المستمرة في البرهان أن لتابع التحاص Z بدلالة متحولات الجملة

$$Z = CV (2\pi m kT)^{3/2}$$

٣- عوض عن المقادير السابقة في تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ ، وبرهن أنه تابع كثافة احتمال.

٤- أوجد (باستخدام طريقة الوسطي الإحصائية) قيم المقادير التالية: $\bar{\varepsilon}$ و $\overline{\varepsilon^2}$ و $\overline{\Delta\varepsilon^2}$ (بدلالة الطاقة الحرارية kT).

ملاحظة: استند في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس، لأص 18 / 8 / 2019

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الدورة الصيفية للعام الدراسي 2018 - 2019

الدرجة العظمى : تسعون درجة (توزيع الدرجات: 60 درجة للسؤال الأول و 30 للثاني)

أجوبة بنود السؤال الأول: (60 درجة)

ج 1: 10

الفوتونات هي بوزونات، تخضع لتوزيع بوزه - أينشتين $N_i = \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\epsilon_i)} - 1}$

وبما أن عدد الفوتونات داخل تجويف الجسم الأسود غير ثابت فيكون $dN \neq 0$. فنجد من شرط الحالة الأكثر احتمالاً:

$$A = e^\alpha \Rightarrow A = 1 \text{ يكون } \alpha = 0 \text{ وبالتالي يكون } d \ln(W_{B-E}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

فيصبح عدد الفوتونات التي تملك طاقة في المجال $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$ وفقاً لتوزيع بوزه- أينشتين:

$$dN_{(B-E)} = \frac{dg(\epsilon)}{e^{-\alpha} e^{\epsilon/kT} - 1} = \frac{dg(\epsilon)}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (a)$$

نكتب درجة تحلل سويات المجال الطاقى $dg(\epsilon)$ بدلالة الطاقة من العبارة

$$dg(\epsilon) = c_o d\Gamma \quad ; \quad c_o = 1/h^3 \quad (b)$$

وباستخدام مفهوم عنصر الفراغ الطوري $d\Gamma$ حيث:

$$d\Gamma = dq dp = V d\left(\frac{4}{3}\pi p^3\right) = V 4\pi p^2 dp$$

$$d\Gamma = V 4\pi p^2 dp$$

بالتعويض في (b) عن كلٍ بقيمته نكتب درجة التحلل بالشكل:

$$dg(\epsilon) = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} \quad (*)$$

وبما أن الفوتونات أشعة كهرومغناطيسية فهي تملك اتجاهين مستقلين للاستقطاب، وبالتالي تتضاعف قيمة درجة التحلل. وحيث أن طاقة الفوتون ϵ مرتبطة بزخمه p بواسطة سرعة الضوء c وفق العلاقة:

$$\epsilon = cp \Rightarrow p = \frac{\epsilon}{c} \Rightarrow dp = \frac{d\epsilon}{c}$$

فنجد بالتعويض في (*):

$$dg(\epsilon) = 2 \frac{V 4\pi \epsilon^2 d\epsilon}{h^3 c^3} \quad (**)$$

نعوض (***) في (a) فنجد:

$$dN_{(B-E)} = \frac{V 8\pi \epsilon^2 d\epsilon}{h^3 c^3} \frac{d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (c)$$

وبما أن طاقة الجملة $U = \sum_i \epsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \epsilon_i dN_i$. وحيث أن التوزيع في حالة الفوتونات يكون مستمر، فنكتب:

$$dU = \epsilon dN_{(B-E)} \Rightarrow dU = \frac{V 8\pi \epsilon^3 d\epsilon}{h^3 c^3} \frac{d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1}$$

نحصل على كثافة الطاقة في وحدة الحجم ($V=1$) بالشكل:

$$u = \frac{dU}{V} = \frac{8\pi \epsilon^3 d\epsilon}{h^3 c^3} \frac{d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = \rho(\epsilon) d\epsilon \quad (d)$$

وبما أن طاقة الفوتون ϵ مرتبطة بتردد الموجة ν بواسطة ثابتة بلانك h وفق علاقة ماكس بلانك:

$$\epsilon = h\nu \Rightarrow d\epsilon = h d\nu$$

فنكتب علاقة بلانك في كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بدلالة التردد بالشكل:

$$u = \frac{8\pi h^3 \nu^3 d\nu}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \rho(\nu) d\nu$$

• المناقشة:

1- نحصل على علاقة (رايلي - جينز) في مجال الطاقات المنخفضة $h\nu \ll kT$ ، حيث يؤول التابع النيبيري إلى

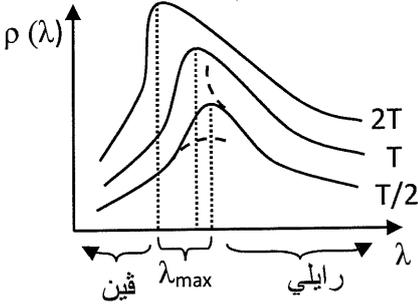
الشكل: $e^{h\nu/kT} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$ وتصبح عبارة كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بالشكل:

$$u = \frac{8\pi kT}{c^3} v^2 dv = \rho(v) dv$$

٢- نحصل على علاقة (فين) في مجال الطاقات العالية $h\nu \gg kT$ ، حيث يكون $e^{h\nu/kT} \gg 1$ ويمكن إهمال الواحد في مقام العلاقة. وتصبح عبارة كثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بالشكل:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT} dv = \rho(v) dv$$

• باستخدام العلاقة



$$v = c/\lambda \Rightarrow |dv| = (c/\lambda^2) d\lambda$$

تصبح عبارة بلانك الحاصلة بدلالة طول الموجة λ بالشكل:

$$u = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} = \rho(\lambda) d\lambda$$

ونستنتج مايلي:

- لا تتعلق كثافة الإشعاع بكتلة الجسم m .

- يتحقق قانون فين في الإزاحة $\lambda_{\max} T = cte$

- تنزاح القيمة العظمى للأطوال الموجية بارتفاع درجات الحرارة نحو الأطوال الموجية القصيرة (الطاقات العالية).

٢٣
١/٢

نحسب Z من صيغة التجميع في المجال $[0 \rightarrow \infty]$ كما يلي:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{\beta \varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{n\beta \varepsilon_0}$$

نفرض $x = e^{\beta \varepsilon_0} < 1$

لأن $e^{\beta \varepsilon_0} = e^{-\varepsilon_0/KT} = (1/e^{\varepsilon_0/KT}) < 1$ حيث يكون $e^{\varepsilon_0/KT} > 1$ في الحالتين $\varepsilon_0 > KT$ و $\varepsilon_0 < KT$:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

وبفرض $m = n+1$ يمكننا كتابة Z بدلالة مشتق سلسلة أخرى S_m كما يلي:

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d x^m}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

وبإيجاد عبارة الحد العام للسلسلة الجديدة S_m التي أساسها x :

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \dots = (1-x)^{-1}$$

$$Z = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx} (1-x)^{-1} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = (1-e^{\beta \varepsilon_0})^{-2}$$

٢- نوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

$$\ln Z = \ln(1-e^{\beta \varepsilon_0})^{-2} = -2 \ln(1-e^{\beta \varepsilon_0})$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -2 \frac{-\varepsilon_0 e^{\beta \varepsilon_0}}{1-e^{\beta \varepsilon_0}} = \frac{2\varepsilon_0}{e^{-\beta \varepsilon_0} - 1} = \frac{2\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/KT} - 1}$$

من أجل $\varepsilon_0 \ll KT$ ننشر التابع الأسّي ونكتفي بالحدين الأول والثاني وبالتعويض نجد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_0}{1 + \frac{\varepsilon_0}{KT}} \approx 2KT$$

من أجل $\varepsilon_0 = KT$ نجد: $\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_0}{e-1} \approx 1,16 KT \Rightarrow \bar{\varepsilon} > KT$

من أجل $KT \gg \varepsilon_0$ يصبح المقدار $e^{\varepsilon_0/KT} \gg 1$ ويهمل الواحد الموجود في المقام فنجد: $\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/KT}} \approx 0$

٣- بما أن الجسيمات غير متمايضة (كمية) فهي إما بوزونات أو فيرميونات وتخضع للتوزيع $(N_i)_{\max} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} \pm 1}$ وعند السويات العليا للطاقة يكون تعرض سويات الطاقة كبير، وتصبح الطاقة الإشعاعية عندئذ أكبر بكثير من الطاقة الحرارية $\varepsilon = \hbar\omega \gg KT$. فتتحول عبارة التوزيع الكمية إلى عبارة توزيع مكسويل الكلاسيكية، حيث يمكننا في هذه الحالة إهمال الواحد (± 1) الموجود في مقام عبارة التوزيع لأن $e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} \gg 1$ بالشكل التالي:

$$N_{\max}^{qua} = \frac{g}{e^{-\alpha} e^{KT} \pm 1} \approx \frac{g}{e^{-\alpha} e^{KT}} = g e^{\alpha} e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} = g e^{\alpha} e^{-\beta\varepsilon} = g e^{\alpha+\beta\varepsilon} = N_{\max}^{clas}$$

$$\frac{N_n}{N_{n+1}} = \frac{e^{\alpha} g_n e^{\beta\varepsilon_n}}{e^{\alpha} g_{n+1} e^{\beta\varepsilon_{n+1}}} = \frac{g_n e^{\beta\varepsilon_n}}{g_{n+1} e^{\beta\varepsilon_{n+1}}} = \frac{(n+1) e^{n\beta\varepsilon_0}}{(n+2) e^{(n+1)\beta\varepsilon_0}} = \frac{n+1}{n+2} e^{-\beta\varepsilon_0} = \frac{n+1}{n+2} e^{-\varepsilon_0/KT}$$

وعند السويات العليا للطاقة $n \gg 1$ نلاحظ أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+1/n)}{n(1+2/n)} = 1$ فنجد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{N_{n+1}} = e^{\hbar\omega/KT} > 1 \Rightarrow N_n > N_{n+1}$$

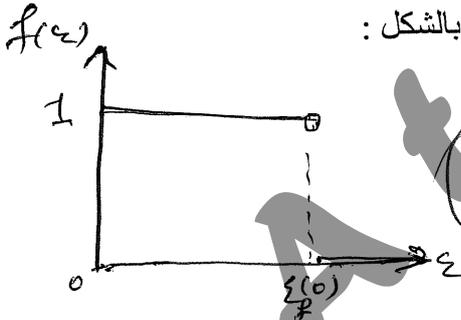
والتوزيع يكون توزيع طبيعي.

٣٤/٢٥

يعرف تابع فيرمي من عبارة توزيع (فيرمي - ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon \rightarrow \varepsilon + d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \rightarrow g + dg)$ بالشكل:

$$dN = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = f(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon ; f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1}$$

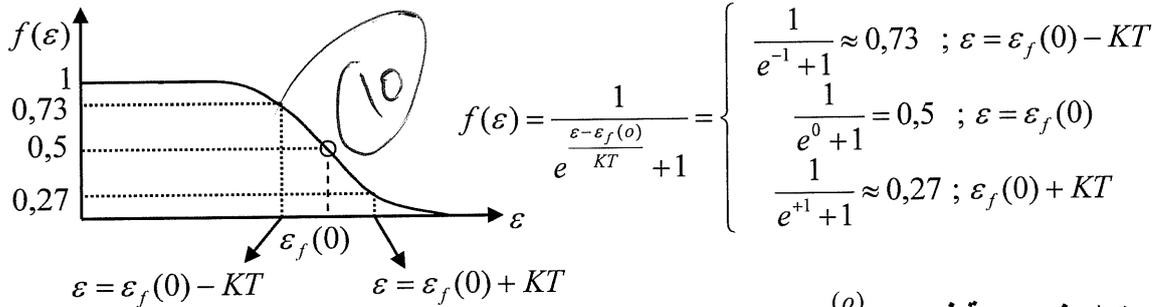
حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0k^0$ ، ونمثله بالشكل:



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 ; \varepsilon < \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = 0 ; \varepsilon > \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{0/0} + 1} = XX ; \varepsilon = \varepsilon_f \end{cases}$$

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال $[0 - 1]$.

وفي جوار سوية فيرمي، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-1} + 1} \approx 0,73 ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) - KT \\ \frac{1}{e^0 + 1} = 0,5 ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) \\ \frac{1}{e^{+1} + 1} \approx 0,27 ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) + KT \end{cases}$$

• تعريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$:

١- هي الطاقة الموافقة لتوزيع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^0$

٢- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^0$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(0)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i > \varepsilon_f^{(0)}$.

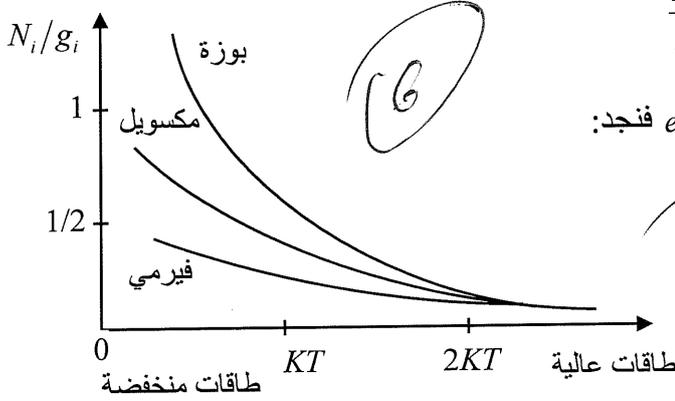
٣- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon) = 0,5$.

تأخذ العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي الشكل

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} \pm m} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} \pm 1}$$

حيث يأخذ الثابت m القيمة صفر في توزع مكسويل والقيمة واحد في توزع بوزة وفيرمي، والإشارة السالبة لبوزة والموجبة لفيرمي.

• عند الطاقات العالية $KT \gg (\epsilon_i - \mu)$ يؤول توزع بوزة وفيرمي إلى توزع مكسويل (يُهمل الواحد في المقام)



شكل ()

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} \pm 1} \approx \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}}} \ll 1 \Rightarrow \frac{N_i}{g_i} \rightarrow 0$$

• عند الطاقات المنخفضة $KT \ll (\epsilon_i - \mu)$ يكون $e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} \geq 1$ فنجد:

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}}} \leq 1 \text{ من أجل مكسويل}$$

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} - 1} \gg 1 \text{ من أجل بوزة}$$

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{KT}} + 1} \leq \frac{1}{2} \text{ من أجل فيرمي}$$

1- تعطى علاقة درجة التحلل بعنصر فراغ الطاقة الطوري بالشكل:

$$g(\epsilon) d\epsilon = C d\Gamma = C dq_V dp_V = CV d\left(\frac{4}{3}\pi P^3\right) = CV 4\pi P^2 dP$$

ومن علاقة الاندفاع بالطاقة: $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{P^2}{2m}$ نجد أن $dP = \frac{m d\epsilon}{\sqrt{2m\epsilon}}$

$$g(\epsilon) d\epsilon = CV 4\pi 2m\epsilon \frac{m d\epsilon}{\sqrt{2m\epsilon}} = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

وبالتعويض نجد المطلوب:

$$Z = \int_0^{\infty} e^{\beta\epsilon} g(\epsilon) d\epsilon \quad \text{2- من عبارة تابع التحاص في الحالة المستمرة}$$

وبالاستفادة من العلاقة التي تربط درجة التحلل $g(\epsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\epsilon)$

$$g(\epsilon) d\epsilon = C d\Gamma(\epsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

وبالتعويض وإخراج المقدار الثابت $CV 2\pi (2m)^{3/2}$ خارج عبارة التكامل، واعتبار $\beta = -1/KT$:

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/KT} d\epsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \epsilon/KT$ فنجد:

$$\epsilon = KT x \Rightarrow d\epsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \epsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} (KT)^{1/2} KT \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}}$$

3- للبرهان على أن $f(\epsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي.

وذلك بالتعويض عن كلٍ بقيمته في تابع الكثافة، وإجراء التكامل على الطاقة في المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{CV 2\pi (2m)^{3/2}}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{1/2} KT \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

٤- حساب قيم المقادير $\bar{\varepsilon}$ و ε^2 و $\overline{\Delta\varepsilon^2}$ باستخدام طريقة الوسطي الإحصائية (بدلالة الطاقة الحرارية KT).
- نحسب الطاقة الوسطي $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل من تابع غاما

نفرض $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT x \Rightarrow \varepsilon^{3/2} = (KT)^{3/2} x^{3/2}$ فنكون $d\varepsilon = KT dx$ وبالتعويض:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = (KT)^{3/2} KT \int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} dx = (KT)^{5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = (KT)^{5/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{2}$$

بالتعويض نجد المطلوب

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{5/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{2} KT$$

وعليه يكون مربع القيمة الوسطي $\bar{\varepsilon}^2 = \frac{9}{4} (KT)^2$

- نحسب وسطى القيمة التربيعية للطاقة ε^2

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_0^{\infty} \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{5/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx$ و $\varepsilon^{5/2} = (KT)^{5/2} x^{5/2}$ وبالتعويض

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{5/2} KT \int_0^{\infty} x^{5/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^2 \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^2 \frac{531}{222} \sqrt{\pi} = \frac{15}{4} (KT)^2$$

- نحسب تشتت الطاقة الحركية من العلاقة $\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2$

وذلك بالتعويض عن كل مقدار بقيمته فنجد

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{15}{4} (KT)^2 - \frac{9}{4} (KT)^2 = \frac{3}{2} (KT)^2$$

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء

الفصل الثاني للعام الدراسي 2018 - 2019

س1- أجب عن البند الأول، ثم أجب عن أحد البندين 2 أو 3 فقط: (20 درجة)

- 1- اكتب العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي، ومثل بيانياً المشغولية عند الطاقات العالية والمنخفضة.
2- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمالاً. (بدلالة مضروبي لاغرانج).
3- جملة مكونة من N جسيم، حجمها V وتحاصها $Z = \lambda VT^3$ ، حيث λ ثابت. أوجد القيمة الوسطى لطاقة الجسيم $\bar{\epsilon}$ ، وطاقة هلمهولتز الحرة F_{\min} ، والضغط P ، والأنتروبية S_{\max} ، والطاقة الداخلية U ، والسعة الحرارية C_V .

س2- أجب عن البندين التاليين: (50 درجة)

- 1- أوجد العدد النسبي للوزونات المثارة N_E وغير المثارة N_0 إلى العدد الكلي N عند درجات الحرارة العالية $T > T_B$ والمنخفضة $T < T_B$ ، ثم مثل النتائج الحاصلة N_E/N و N_0/N بيانياً بدلالة T/T_B .

• برهن أن طاقة الجملة في الحالة $T \leq T_B$ تأخذ الصيغة التالية KT $U_{\min} \approx 2V \left(\frac{2\pi mKT}{h^2} \right)^{3/2}$

علماء أن: $\int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(q)\zeta(q)$; $q > 1$ و $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2,612$ و $\zeta\left(\frac{5}{2}\right) = 1,341$

و $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n) = n!$

- 2- جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$)، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\epsilon_1 = 0$ (J) و $\epsilon_2 = KT$ (J) و $\epsilon_3 = 2KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = N$ و $g_2 = g_3 = 1$. والمطلوب:
1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(N-1, 1, 0)$ ، ثم أوجد وزنها الإحصائي (بدلالة N). في الحالات التالية:

A- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

• [بفرض $N = 2$ ، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات السابقة (A, B, C)، ومثلها.]

3- بفرض أن الجسيمات متمايضة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزيع الماكروي الأكثر احتمالاً (N_1, N_2, N_3) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z ، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1 + N_2 + N_3 = N$). ما نوع التوزيع الحاصل؟

• احسب النسبة المئوية لعدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة محصورة في المجال $(0 \rightarrow \vartheta_0 = \vartheta_H)$ N_0

ثم أعد الحساب لذات العينة عندما تتحرك وفق اتجاه ما كالمحور ox مثلاً. علماً أن: $E_r(1) = 0,8427$

س3- أجب عن أحد البندين التاليين فقط: (20 درجة)

1- تنتقل الإلكترونات (عند الدرجة T) في أشباه الموصلات من قطاع التكافؤ VB إلى قطاع التوصيل CB والمطلوب:

استنتج (بالاعتماد على تابع فيرمي الاحتمالي) عبارة الكثافة الإلكترونية n_e في قطاع التوصيل، علماً أن طاقة

الإلكترون في هذا القطاع هي $(\epsilon - \epsilon_c)$. ما هو التناسب القائم بين n_e و T .

2- استنتج علاقة كثافة التيار الإلكتروني السطحية $J_x = \lambda T^2 e^{-\phi/KT}$ المنبعث حرارياً من سطح موصل أو شبه موصل

والمعروفة بصيغة ريتشاردسون - ديمان. (مع الرسم اللازم). (اعتبر $\frac{1}{\beta} e^{\beta(\epsilon - \epsilon_f(T))}$)

$$\int_0^{\infty} \frac{d\epsilon}{e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_f(T))} + 1} \approx \frac{1}{\beta} e^{\beta(\epsilon - \epsilon_f(T))}$$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس الأحد 30 / 6 / 2019

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

أجوبة بنود السؤال الأول: (20 درجة)

1ج- (اجباري) 5

تأخذ العبارة العامة لأرقام انشغال مكسويل وبوزة وفيرمي الشكل

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} \pm m} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}} \pm 1}$$

حيث يأخذ الثابت m القيمة صفر في توزيع مكسويل والقيمة واحد في توزيع بوزة وفيرمي، والإشارة السالبة لبوزة والموجبة لفيرمي.

• عند الطاقات العالية $KT \gg (\varepsilon_i - \mu)$ يؤول توزيع بوزة وفيرمي إلى توزيع مكسويل (يُهمل الواحد في المقام)

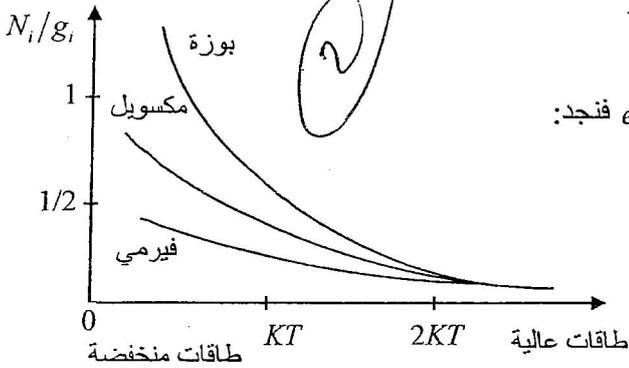
$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}} \pm 1} \approx \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}}} \ll 1 \Rightarrow \frac{N_i}{g_i} \rightarrow 0$$

• عند الطاقات المنخفضة $KT \ll (\varepsilon_i - \mu)$ يكون $e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}} \geq 1$ فنجد:

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}} \pm 1} \leq 1 \text{ من أجل مكسويل}$$

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}} - 1} \gg 1 \text{ من أجل بوزة}$$

$$\frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{KT}} + 1} \leq \frac{1}{2} \text{ من أجل فيرمي}$$



شكل ()

2ج- (اختياري) 15

ننتقل من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $\ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{M-B}) = \ln N! + \sum_i [N_i \ln g_i - \ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x - x$ نجد:

$$\ln(W_{M-B}) \approx N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{M-B}) = \frac{\partial \ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (\ln g_i - \ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \quad (10)$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فتحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^\alpha g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad (15)$$

ج3- (اختياري) 15 بما أن $Z = \lambda V T^3$ نجد $\ln Z = \ln \lambda + \ln V + 3 \ln T$ نوجد المشتقات لاستخدامها في الطلبات اللاحقة:

$$\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{T} \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{V}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = KT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V = KT^2 \frac{3}{T} = 3KT \quad (2)$$

القيمة الوسطى لطاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ نجدها من العلاقة:

$$F_{\min} = -NKT \ln Z = -NKT (\ln \lambda + \ln V + 3 \ln T) \quad (2)$$

الطاقة الحرة F :

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = NKT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T = NKT \frac{1}{V} \quad (2)$$

الضغط P :

أي أن الجملة تحقق معادلة الحالة للغاز المثالي $PV = NKT$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = NK \left[\ln Z + T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \right] = NK [\ln \lambda + \ln V + 3 \ln T + 3] \quad (2)$$

الأنترودية S :

$$U = F + TS = NKT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V = 3NKT \quad (2)$$

الطاقة الداخلية U :

المعة الحرارية للغاز C_V من العبارة:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V = T \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial T} NKT (\ln \lambda + \ln V + 3 \ln T) \right]$$

$$C_V = T \frac{\partial}{\partial T} [NK (\ln \lambda + \ln V + 3 \ln T) + 3NK] = 3NK \quad (2)$$

أجوبة بنود السؤال الثاني: (50 درجة)

ج1- (اجباري) 20

العدد النسبي للبوزونات المثارة وغير المثارة عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة:

عند درجات الحرارة العالية $T > T_B$: تكون معظم البوزونات البالغ عددها N_E في الحالة المثارة، وعدد قليل جداً منها

N_0 في السوية الأرضية. أي $N_E \gg N_0$ و $N = N_E + N_0$. أي يمكننا اعتبار $N \approx N_E$

لإيجاد عدد البوزونات المثارة N_E (الموزعة على سويات الطاقة فوق الأرضية) نستخدم عبارة رقم الانشغال (في الحالة

الأكثر احتمالاً)، (بعد إهمال N_0 لأنه رقم صغير جداً عند $T > T_B$ في حين لا يجوز إهماله عند $T \leq T_B$)

$$N_E = \sum_i N_{i(B-E)} = \sum_i \frac{g_i}{e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} - 1}$$

وبالانتقال من عبارة المجموع \sum إلى التكامل \int ، واعتبار $e^{-\alpha} = 1$ ، والاستفادة من علاقة درجة التحلل $g(\varepsilon)$ بعنصر

فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$ التالية: $g(\varepsilon) d\varepsilon = C d\Gamma(\varepsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$ نكتب:

$$N_E = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{-\alpha - \beta \varepsilon} - 1} = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^\alpha e^{-\beta \varepsilon} - 1} = V 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\varepsilon/KT} - 1} \quad ; \quad C = \frac{1}{h^3}$$

لحل التكامل نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

بالتعويض في عبارة التكامل والضرب والقسمة على $\sqrt{\pi}$:

$$N_E = V 2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (KT)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = V \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m KT}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1}$$

وبملاحظة أن قيمة التكامل $\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 1,306\sqrt{\pi}$ نجد بالتعويض:

$$N_E = 2,612V \left(\frac{2\pi m KT}{h^2}\right)^{3/2} \quad (1)$$

فيكون عدد البوزونات غير المثارة N_o الموجودة أصلاً في السوية الأرضية:

$$N_o = N - N_E \quad (2)$$

أما عند درجات الحرارة المنخفضة $T \leq T_B$: فيحدث تكاثف للبوزونات المثارة، وتهبط جميعها لتستقر النسبة العظمى منها في السوية الأرضية، إلا النذر اليسير الذي نعتبره مهملًا $N_E \approx 0$ فيهبط ليستقر في السويات الأعلى القريبة من الأرضية، أي نعتبر عدد البوزونات المثارة شبه معدوم $N_E \approx 0$.

أما العدد الإجمالي فهو حقيقةً الموجود في السوية الأرضية $N = N_o + N_E \approx N_o$.

نحصل على عبارة العدد الإجمالي للبوزونات المتكثفة بالتعويض عن $T \rightarrow T_B$ ، وعن $N_E \rightarrow N$ ، في (1) فنجد:

$$N = 2,612V \left(\frac{2\pi m KT_B}{h^2}\right)^{3/2} \quad (3)$$

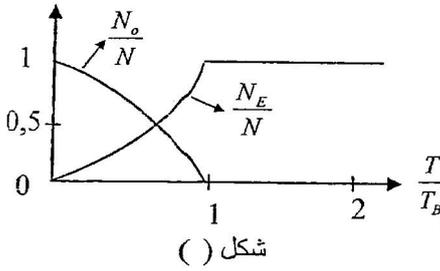
لمعرفة نسبة عدد البوزونات المثارة إلى العدد الكلي بدلالة درجة الحرارة نقسم (1) على (3) فنجد:

$$\frac{N_E}{N} = \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \quad (4)$$

أما نسبة عدد البوزونات غير المثارة N_o (الموجودة أصلاً في السوية الأرضية) إلى العدد الكلي N بدلالة درجة الحرارة فنجد بالتعويض (4) في (2) كما يلي:

$$\frac{N_o}{N} = 1 - \frac{N_E}{N} \Rightarrow \frac{N_o}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \quad (5)$$

يمكن تمثيل العلاقتين (4) و (5) بيانياً كما في الشكل ().



شكل ()

• البرهان على أن طاقة الجملة في الحالة $T \leq T_B$ تأخذ الصيغة KT $U_{min} \approx 2V \left(\frac{2\pi m KT}{h^2}\right)^{3/2} KT$

من أجل $T \leq T_B$: يحصل تكاثف للبوزونات نعتبر فيه $\mu \approx 0$. فتكون الطاقة الداخلية للجملة:

$$U_{min} = N \varepsilon = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/KT} - 1} ; g(\varepsilon) d\varepsilon = C d\Gamma(\varepsilon) = V 2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

$$U_{min} = V 2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\varepsilon/KT} - 1}$$

لحل التكامل نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \varepsilon^{3/2} = (KT)^{3/2} x^{3/2}$$

بالتعويض في عبارة التكامل والضرب والقسمة على $\sqrt{\pi}$:

$$U_{min} = V 2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (KT)^{3/2} KT \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} = V \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m KT}{h^2}\right)^{3/2} KT \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1}$$

نستنتج أن: $N_1 > N_2 > N_3$ فالتوزيع طبيعي.

• لإيجاد النسبة المئوية لعدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة محصورة في المجال $N_o(0 \rightarrow \vartheta_o = \vartheta_H)$

نوجد قيمة الوسيط x بالاستفادة من تعريف السرعة الأكثر احتمالاً $\vartheta_o = \vartheta_H = 1/\sqrt{\alpha}$

فنجد من تعريف الوسيط $x = \sqrt{\alpha} \vartheta_o \Rightarrow x = \sqrt{\alpha} \vartheta_H = 1$

بالتعويض في العلاقة $N_o(0 \rightarrow \vartheta_o) = N \left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} \right]$ والتعويض عن $E_r(1)$ بقيمتيهما نجد:

$$N_o(0 \rightarrow \vartheta_H) = N \left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi} e} \right] = N \left[0,8427 - \frac{2}{\sqrt{3,14 \times 2,718}} \right] = N [0,8427 - 0,4153] = 0,4274 N$$

أي أن عدد الجسيمات N_o التي تقع سرعتها المطلقة في المجالات المعطاة بدلالة السرعة المميزة ϑ_H هو نسبة مئوية من التعداد الكلي للجسيمات N :

$$N_o(0 \rightarrow \vartheta_H) = \frac{42,74}{100} N = 42,74 \% N$$

- لإيجاد النسبة المئوية لذات العينة عندما تتحرك وفق اتجاه ما كالمحور ox مثلاً. نطبق العلاقة

$$N_o(0 \rightarrow \vartheta_o = \vartheta_H) = \frac{N}{2} E_r(x) = \frac{N}{2} E_r(1) = \frac{N}{2} 0,8427 = 0,4214 N = 42,14 \% N$$

أجوبة بنود السؤال الثالث: (20 درجة)

1ج- (اختياري) (20) يُعطى احتمال انشغال سوية الطاقة \mathcal{E} في قطاع التوصيل بالإلكترون (في الدرجة T) وفق تابع فيرمي الاحتمالي التالي

$$f_e(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_f(T)}{kT}} + 1}$$

بما أن طاقة الإلكترون في قطاع التوصيل $(\mathcal{E} - \mathcal{E}_C)$. فتكون درجة تحلل السوية \mathcal{E} (بعد الضرب بـ 2 لأنها إلكترونات)

$$g_e(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = C d\Gamma(\mathcal{E}) = 4\pi V \left(\frac{2m_e}{h^2} \right)^{3/2} (\mathcal{E} - \mathcal{E}_C)^{1/2} d\mathcal{E}$$

نحسب الكثافة الإلكترونية $n_e = N_e/V$ في قطاع التوصيل في المجال $[\mathcal{E}_C \rightarrow \infty]$ بتطبيق توزيع فيرمي - ديراك التالي ومن ثم التعويض عن كل بقيمته

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{E}_C}^{\infty} f_e(\mathcal{E}) g_e(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2} \right)^{3/2} \int_{\mathcal{E}_C}^{\infty} \frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_C)^{1/2}}{e^{\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_f(T)}{kT}} + 1} d\mathcal{E}$$

وبما أن فارق الطاقة $\mathcal{E} - \mathcal{E}_f(T) \gg kT$ يمكن إهمال الواحد في المقام

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2} \right)^{3/2} \int_{\mathcal{E}_C}^{\infty} \frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_C)^{1/2}}{e^{\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_f(T)}{kT}}} d\mathcal{E}$$

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\mathcal{E}_f(T)}{kT}} \int_{\mathcal{E}_C}^{\infty} (\mathcal{E} - \mathcal{E}_C)^{1/2} e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} d\mathcal{E}$$

وبطرح وإضافة المقدار \mathcal{E}_C في أس التابع التبريري (الموجود داخل التكامل).

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\mathcal{E}_f(T)}{kT}} \int_{\mathcal{E}_C}^{\infty} (\mathcal{E} - \mathcal{E}_C)^{1/2} e^{-\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_C}{kT}} d\mathcal{E}$$

وبإخراج المقدار $e^{-\mathcal{E}_C/kT}$ خارج التكامل

وبملاحظة أن قيمة التكامل $\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{5/2-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1,341$ نجد بالتعويض:

$$U_{\min} \approx 2V \left(\frac{2\pi mKT}{h^2} \right)^{3/2} KT$$

ج2- (اجباري) 30
1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_0 = \frac{(N+N_e-1)!}{N!(N_e-1)!} = \frac{(N+3-1)!}{N!(3-1)!} = \frac{(N+2)!}{2N!} = \frac{(N+2)(N+1)N!}{2N!} = \frac{(N+2)(N+1)}{2} \quad (3)$$

2- طاقة الحالة الماكروية $(\overset{\epsilon_1}{N-1}, \overset{\epsilon_2}{1}, \overset{\epsilon_3}{0})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1,0)} = \sum_i N_i \epsilon_i = (N-1) \times 0 + 1 \times KT + 0 \times 2KT = KT \quad (3)$$

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = N! \left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1^1}{1!} \frac{1^0}{0!} \right) = N N^{N-1} = N^N \quad (3)$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{(N-1+N-1)! (1+1-1)! (0+1-1)!}{(N-1)! (N-1)! 1! (1-1)! 0! (1-1)!} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} \quad (3)$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overset{\epsilon_1}{N-1}, \overset{\epsilon_2}{1}, \overset{\epsilon_3}{0})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{N!}{(N-1)! (N-N+1)! 1! (1-1)! 0! (1-0)!} = N \quad (3)$$

• الحسابات الرقمية والتمثيل: الحالة المطلوبة هي $(\overset{\epsilon_1}{1}, \overset{\epsilon_2}{1}, \overset{\epsilon_3}{0})$ و $g_1 = 2$ و $g_2 = g_3 = 1$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B & B \\ \hline A & A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline A & A \\ \hline B & B \\ \hline \end{array} \quad W_{M-B} = N^N = 2^2 = 4 \quad \text{A- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية):} \quad (2)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad W_{B-E} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} = \frac{2!}{1} = 2 \quad \text{B- الجسيمات بوزونات:} \quad (2)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad W_{F-D} = N = 2 \quad \text{C- الجسيمات فيرميونات:} \quad (2)$$

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \epsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = Ne^0 + 1e^{-1} + 1e^{-2} = N + e^{-1} + e^{-2}$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i = g_i e^{\alpha + \beta \epsilon_i} = e^{\alpha} g_i e^{-\epsilon_i/KT} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\epsilon_i/KT}$$

$$(3) \cdot N_3 = \frac{N}{Z} 1e^{-2} = \frac{N}{Z} e^{-2} \quad \text{و} \quad N_2 = \frac{N}{Z} 1e^{-1} = \frac{N}{Z} e^{-1} \quad \text{و} \quad N_1 = \frac{N}{Z} Ne^0 = \frac{N^2}{Z}$$

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{N^2}{Z} + \frac{N}{Z} e^{-1} + \frac{N}{Z} e^{-2} = \frac{N}{Z} (N + e^{-1} + e^{-2}) = \frac{N}{Z} Z = N$$

لإيجاد نوع التوزيع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

$$(3) \quad \frac{N_1}{N_3} = Ne^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_2}{N_3} = \frac{e^{-1}}{e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_1}{N_2} = Ne > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f(T)}{KT}} \int_{\varepsilon_c}^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon_c)^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{KT}} d\varepsilon \quad / (7)$$

نحل التكامل بتحويله لتكامل غاما وذلك بفرض

$$x = \frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{KT} \Rightarrow (\varepsilon - \varepsilon_c)^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2} \quad \& \quad d\varepsilon = KT dx$$

وإمراعاة حدود التكامل نجد

$$n_e \approx 4\pi \left(\frac{2m_e}{h^2} \right)^{3/2} (KT)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f(T)}{KT}} \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$n_e \approx 2 \underbrace{\left(\frac{2\pi m_e KT}{h^2} \right)^{3/2}}_{n_{CB}} e^{-\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f(T)}{KT}} \approx n_{CB} e^{-\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f(T)}{KT}} \quad (6)$$

يدعى المقدار $n_{CB} = 2 \left(\frac{2\pi m_e KT}{h^2} \right)^{3/2}$ التركيز الكمي للإلكترونات في قطاع التوصيل CB في الدرجة T - تشير النتيجة إلى أن الكثافة الإلكترونية في قطاع التوصيل متناسبة طردياً مع $T^{3/2}$ (تابعة لدرجة الحرارة).

ج2- (اختياري) 20

تُحسب الكثافة السطحية للتيار الإلكتروني J_x من العلاقة المعروفة في الكهرباء

$$J_x = \frac{N_e}{V} q v_x = n_e v_x q \quad (*)$$

حيث N_e عدد الإلكترونات في الحجم V (شحنة كل منها q) وتتحرك وفق المحور ox عمودياً على السطح S بسرعة v_x نحسب الكثافة الإلكترونية $n_e = N_e/V$ الواردة في (*) بتطبيق توزيع فيرمي - ديراك

$$n_e = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \int f(P) g(P) dP \quad (**)$$

$$\beta = -1/KT \quad \text{تابع فيرمي واعتبار} \quad f(P) = f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(T)}{KT}} + 1} = \frac{1}{e^{-\beta[\varepsilon - \varepsilon_f(T)]} + 1} \quad \text{حيث}$$

كما توجد درجة التحال $g(P) dP$ بدلالة عنصر فراغ الاندفاع الطوري $d\Gamma(P)$. ونضربه بـ 2 نظراً لتمتع الفيرميون بسبين مزدوج $S = \pm \hbar/2$ ، (يعبر الرقم 2 عن تحال سبين الإلكترون $g_s = 2S + 1 = 2$) واعتبار أن $C = 1/h^3$ (لأن الجسيمات كمية) بالشكل:

$$g(P) dP = C d\Gamma(P) = 2C dq_v dp_v = \frac{2V}{h^3} dp_v = \frac{2V}{h^3} dP_x dP_y dP_z$$

بالتعويض في (**) عن كل بقيمته واعتبار التكامل على الحجم (الأبعاد الثلاثة) نجد

$$n_e = \frac{2}{h^3} \iiint_{P_x, P_y, P_z} \frac{1}{e^{-\beta[\varepsilon - \varepsilon_f(T)]} + 1} dP_x dP_y dP_z \quad / (7)$$

واعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المقنع هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon = m^2 g^2 / 2 = p^2 / 2m \Rightarrow p^2 = 2m\varepsilon \quad \& \quad p = \sqrt{2m\varepsilon}$$

وهذا يعني أن كمية الحركة وفق المحور ox (باتجاه سطح الانبعاث) ستكون في المجال $p_x \in [\sqrt{2m\varepsilon} \rightarrow \infty[$

أما المركبات الأخرى لكمية الحركة فستكون في المجال $p_{y,z} \in [-\infty \rightarrow +\infty[$

وبالعودة لـ (*) تُجد كثافة التيار الإلكتروني وفق المحور ox

$$J_x = n_e v_x q = \frac{2q}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\sqrt{2m\varepsilon}}^{+\infty} \frac{v_x}{e^{-\beta[\varepsilon - \varepsilon_f(T)]} + 1} dP_x dP_y dP_z$$

لانجاز التكامل على المحور ox (الذي يجري عليه تغير في كمية حركة الإلكترون) نلاحظ من تعريف الطاقة بدلالة مركبات كمية الحركة أن تفاضل الطاقة يكون فقط بالنسبة للمركبة P_x لأن بقية المركبات تعتبر ثوابت

$$\varepsilon = \frac{P^2}{2m} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} \Rightarrow d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial P_x} dP_x = \frac{P_x}{m} dP_x = \frac{mv_x}{m} dP_x = v_x dP_x$$

وباعتبار أن المقدار $\varepsilon' = \sqrt{2m\varepsilon}$ هو طاقة والتعويض نجد

$$J_x = \frac{2q}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon'}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{-\beta[\varepsilon - \varepsilon_f(T)]} + 1} dP_y dP_z$$

$$\int_{\varepsilon'}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{-\beta[\varepsilon - \varepsilon_f(T)]} + 1} \approx \frac{1}{\beta} e^{\beta[\varepsilon' - \varepsilon_f(T)]} \quad \text{نعوض عن قيمة التكامل المتعلقة بالطاقة المعطاة}$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\varepsilon' - \varepsilon_f(T)]} dP_y dP_z$$

لحساب كثافة التيار الإلكتروني J_x المنبعث بفعل التأثيرات الحرارية من سطح معدن S نفرض بئر كموني عميق كما بالشكل (1)، وعلى الإلكترون القادر على الوصول إلى السطح امتلاك طاقة حرارية ε كافية لتحريره من ذرته (تساوي على الأقل طاقة ارتباط الإلكترون بالذرة) وتكسبه طاقة حركية لاجتياز البئر والوصول إلى السطح. تدعى طاقة التحرير هذه وفقاً لاينشتين (في المفعول الكهروضوئي) تابع العمل ϕ *Work function*، عندما تمتلك الإلكترونات طاقة قريبة من متوية فيرمي $\varepsilon_f(T)$ (في الدرجة T)، ونكتب هذه العلاقة بالشكل

$$\varepsilon = \varepsilon_f(T) + \phi + \frac{P^2}{2m} \Leftrightarrow \varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + \frac{P^2}{2m}$$

وبما أن كمية الحركة المتبقية هي المتعلقة بالمركبتين y و z أي أن علاقة فرق الطاقة

$$\varepsilon - \varepsilon_f(T) = \phi + \frac{P_y^2 + P_z^2}{2m}$$

بالتعويض في عبارة التكامل الأخيرة نجد

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta[\phi + \frac{P_y^2 + P_z^2}{2m}]} dP_y dP_z$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{\beta\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_y^2}{2mKT}} dP_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{P_z^2}{2mKT}} dP_z$$

وبالاستفادة من تكاملات يولامون

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = 2 \left(\frac{0!}{0! 2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad ; n=0 \text{ (زوجي)}$$

$$J_x = \frac{2q}{\beta h^3} e^{-\phi/KT} \sqrt{2\pi mKT} \sqrt{2\pi mKT}$$

وباعتبار $\beta = 1/KT$ نجد صيغة ريتشاردسون - ديمان المطلوبة

$$J_x = \frac{4\pi m q}{\beta^2 h^3} e^{-\phi/KT} = \frac{4\pi m q}{h^3} (KT)^2 e^{-\phi/KT}$$

$$J_x = \frac{4\pi m K^2 q}{h^3} T^2 e^{-\phi/KT} = \lambda T^2 e^{-\phi/KT} \quad ; \lambda = \frac{4\pi m_e K^2 q_e}{h^3} \quad \text{أو بالشكل (6)}$$

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2017 - 2018

س1- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة)

1- أوجد بدلالة المعطيات $Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ و $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \varepsilon_i}$:

القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ ، والانحراف المعياري $\overline{\varepsilon^2}$ ، والتشتت $\Delta \varepsilon^2$ ، (بدلالة Z أو $\ln Z$ والمشتقة $\partial/\partial \beta$).
• استند من علاقة المشتقة $\partial/\partial \beta$ بالمشتقة $\partial/\partial T$ ومن عبارة تابع التحاص $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$

في البرهان على أن صيغة طاقة الجملة (بثبات الحجم) هي $U = N \bar{\varepsilon} = N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = \frac{3}{2} NKT$

2- استنتج عبارة السعة الحرارية C_V للغاز الفونوني في الأجسام الصلبة وفقاً لتفسير أينشتاين، ثم ناقش النتيجة الحاصلة عند درجات الحرارة العالية والمنخفضة.

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة)

1- جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$)، موزعة على ثلاث سويات للطاقة، $\varepsilon_1 = 0$ (J) و $\varepsilon_2 = KT$ (J) و $\varepsilon_3 = 2KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = g_3 = N$. والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد طاقة الحالة الماكروية $(0, 1, N-1)$ ، ثم أوجد وزنها الإحصائي في الحالات التالية:

A- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

3- بفرض أن الجسيمات متمايضة، أوجد أرقام انشغال حالة التوزيع الماكروي الأكثر احتمال (N_1, N_2, N_3) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z ، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1 + N_2 + N_3 = N$). ما نوع التوزيع الحاصل؟

2- أوجد التحاص الكلاسيكي لجزيء ثنائي الذرة واقع في المستوي (x, y) ويدور حول المحور oz

3- إذا علمت أن الطاقة الداخلية لغاز البوزون عند درجات حرارة تفوق درجة التكاثف $T > T_B$ هي ذاتها

الطاقة الداخلية لغاز مكسويل الكلاسيكي $U_{\max} = \frac{3}{2} NKT = U_{\text{clas}}$.

وعند الدرجات الأقل $T \leq T_B$ تأخذ الصيغة $U_{\min} \approx 0,77 NKT \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}$. والمطلوب: أوجد السعات

الحرارية $C_{V_{\max}}$ و $C_{V_{\min}}$ لمجال الحرارة، وارسم الخط البياني لتحويلات C_V بدلالة T مع الشرح.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس الأحد 2018 / 7 / 15

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

أجوبة بنود السؤال الأول: (45 درجة)

1- بما أن $P_i = \frac{g_i}{Z} e^{\beta \epsilon_i}$ تابع كثافة احتمال فإن القيمة الوسطى لأي مقدار (الطاقة مثلاً) تعطى بالعلاقة

$$\bar{\epsilon} = \sum_i \epsilon_i P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \epsilon_i g_i e^{\beta \epsilon_i}$$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \epsilon_i g_i e^{\beta \epsilon_i}$ نجد بالتعويض

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

وبالمثل يكون الانحراف المعياري

$$\overline{\epsilon^2} = \sum_i \epsilon_i^2 P_i = \frac{1}{Z} \sum_i \epsilon_i^2 g_i e^{\beta \epsilon_i}$$

بما أن $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \epsilon_i g_i e^{\beta \epsilon_i}$ يكون $\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \sum_i \epsilon_i^2 g_i e^{\beta \epsilon_i}$ نجد بالتعويض

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon^2 &= \overline{\epsilon^2} - \bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial Z}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \end{aligned}$$

• نوجد لغارتنا تابع التحاص $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، ثم مشتقة اللغارتنا.

$$\ln Z = \ln C + \ln V + \frac{3}{2} \ln(2\pi m K) + \frac{3}{2} \ln T \Rightarrow \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2T}$$

وبالاستفادة من العلاقة بين المشتقات نجد $\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T}$

وبالتعويض عن كل بقيمته في عبارة الطاقة نجد المطلوب كما يلي

$$U = N \bar{\epsilon} = N \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_V = NKT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} NKT$$

2- تفسير أينشتين:

افترض أينشتين (اعتماداً على مفاهيم النظرية الكوانتية) أن ذرات الشبكة البلورية عبارة عن هزازات مرونة توافقية بسيطة، ومستقلة، وتهتز في الأبعاد الثلاثة حول مواضع اتزانها فتصدر عنها أمواج مرنة بتردد ثابت. تعطى طاقة الهزاز الكوانتي بالصيغة

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

أي أن للهزاز طاقة $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$ في السوية الأرضية $n=0$ عند درجة الصفر المطلق $T=0$ يعطى تابع تحاص سويات الطاقة غير المتحللة للفونونات بصيغته المعروفة

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{g_n}_1 e^{\beta \epsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega} = e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta n\hbar\omega} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2KT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}} = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{\theta_E}{T}}$$

حيث افترضنا درجة حرارة آينشتاين $\theta_E = \frac{\hbar\omega}{K}$ مقدار ثابت، وبكتابة المجموع نجد

$$Z = e^{-\frac{\theta_E}{2T}} (1 + e^{-\frac{\theta_E}{T}} + e^{-2\frac{\theta_E}{T}} + e^{-3\frac{\theta_E}{T}} + \dots)$$

السلسلة هندسية حدها الأول واحد وأساسها $e^{-\frac{\theta_E}{T}} < 1$ فيكون مجموعها $S = 1 \frac{1 - (e^{-\frac{\theta_E}{T}})^n}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}} \approx \frac{1}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$ وبالتعويض

$$Z = \frac{e^{-\frac{\theta_E}{2T}}}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}}$$

نحسب الطاقة الوسطى للفونون (من أجل درجة حرية واحدة) من العلاقة $\bar{\epsilon} = KT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V$ لذا نوجد $\ln Z$

$$\ln Z = -\frac{\theta_E}{2T} - \ln[1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}]$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial T} = -\left(\frac{0-2\theta_E}{4T^2}\right) - \frac{[0 - (-\frac{0-\theta_E}{T^2})e^{-\frac{\theta_E}{T}}]}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}} = \frac{\theta_E}{2T^2} + \frac{\theta_E e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{T^2(1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}})}$$

بالتعويض في عبارة الطاقة الوسطى للفونون

$$\bar{\epsilon} = \frac{K\theta_E}{2} + \frac{K\theta_E e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}} \Rightarrow \bar{\epsilon} = K\theta_E \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1} \right) \quad (1)$$

نحسب الطاقة الداخلية لمول واحد من الفونونات N_A وبثلاث درجات حرية لكل فونون (مع اعتبار $R = N_A K$) نجد

$$U = 3N_A \bar{\epsilon} = 3N_A K\theta_E \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1} \right) \Rightarrow U = 3R\theta_E \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1} \right) \quad (2)$$

نحسب السعة الحرارية من العلاقة

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R\theta_E \left[0 + \frac{0 - \left(\frac{0-\theta_E}{T^2} e^{\frac{\theta_E}{T}} \right)}{\left(e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1 \right)^2} \right] \Rightarrow C_V = 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta_E}{T}}}{\left(e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1 \right)^2} \quad (3)$$

المناقشة:

أولاً: عند درجات الحرارة العالية (أكبر بكثير من درجة آينشتاين) $T \gg \theta_E$ ننشر التابع الأسّي في البسط والمقام

$$C_V \approx 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{(1 + \frac{\theta_E}{T} + \dots)}{(1 + \frac{\theta_E}{T} + \dots - 1)^2} = 3R \left(1 + \frac{\theta_E}{T} + \dots \right) \Rightarrow C_V \approx 3R$$

ثانياً: عند درجات الحرارة المنخفضة $T \ll \theta_E$ يُهمل الواحد في المقام ونحصل على القيمة

$$C_V \approx 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 e^{-\frac{\theta_E}{T}} \Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} C_V = 3R \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} C_V = 0$$

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(N + 3 - 1)!}{N!(3 - 1)!} = \frac{(N + 2)!}{2N!} = \frac{(N + 2)(N + 1)N!}{2N!} = \frac{(N + 2)(N + 1)}{2}$$

2- طاقة الحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{0}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{N-1})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(0,1,N-1)} = \sum_i N_i \varepsilon_i = 0 \times 0 + 1 \times KT + (N - 1) \times 2KT = (2N - 1)KT$$

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(0,1,N-1)} = N! \left(\frac{N^0}{0!} \frac{N^1}{1!} \frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \right) = N^2 N^{N-1} = N^{N+1}$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(0,1,N-1)} = \frac{(0 + N - 1)! (1 + N - 1)! (N - 1 + N - 1)!}{0! (N - 1)! 1! (N - 1)! (N - 1)! (N - 1)!} = N \frac{(2N - 2)!}{[(N - 1)!]^2}$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{0}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{N-1})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(0,1,N-1)} = \frac{N!}{0! (N - 0)!} \frac{N!}{1! (N - 1)!} \frac{N!}{(N - 1)! (N - N + 1)!} = 1 \times N \times N = N^2$$

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = Ne^{-0} + Ne^{-1} + Ne^{-2} = N(1 + e^{-1} + e^{-2})$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} = e^\alpha g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$

$$N_2 = \frac{N}{N(1 + e^{-1} + e^{-2})} Ne^{-1} = \frac{N^2}{Z} e^{-1} \quad \text{و} \quad N_1 = \frac{N}{N(1 + e^{-1} + e^{-2})} Ne^{-0} = \frac{N^2}{Z}$$

$$\text{و} \quad N_3 = \frac{N}{N(1 + e^{-1} + e^{-2})} Ne^{-2} = \frac{N^2}{Z} e^{-2}$$

ويمكن التحقق من ذلك بالجمع

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{N^2}{Z} + \frac{N^2}{Z} e^{-1} + \frac{N^2}{Z} e^{-2} = \frac{N^2}{Z} (1 + e^{-1} + e^{-2}) = \frac{N}{Z} N(1 + e^{-1} + e^{-2}) = \frac{N}{Z} Z = N$$

لإيجاد نوع التوزيع الحاصل (في الحالة الأكثر احتمال) نوجد نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_1}{N_3} = e^2 > 1 \Rightarrow N_1 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_2}{N_3} = \frac{e^{-1}}{e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3 \quad \text{و} \quad \frac{N_1}{N_2} = e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

نستنتج أن: $N_1 > N_2 > N_3$ وبالتالي فالتوزيع طبيعي.

ج2- تعطى طاقة الحركة الدورانية للجزيء ثنائي الذرة بالعلاقة:

$$\varepsilon_r = \frac{L_z^2}{2I}$$

حيث $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu r_d^2$ عزم عطالة الجزيء حول محور الدوران OZ
نكتب العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري
حيث نأخذه بدلالة الزاوية ϕ المقدر بالراديان وعزم كمية الحركة L المقدر بـ JS

$$dg(\varepsilon) = C d\Gamma(\varepsilon) = \frac{C}{1/h} \underbrace{dq_\phi}_{2\pi} dL_z = \frac{2\pi}{h} dL_z$$

نكتب تابع التحاص، ونعوض عن درجة التحلل بقيمتها، ونستخدم تكامل بواسون.

$$Z_{Cl} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta \varepsilon_r} dg(\varepsilon) = \frac{2\pi}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{L_z^2}{2IKT}} dL_z = \frac{1}{h} \cdot 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{L_z^2}{2IKT}} dL_z = \sqrt{\frac{2\pi IK}{h^2}} T = \sqrt{\frac{T}{\theta_r}}$$

حيث $\theta_r = \hbar^2 / 2\pi IK$ درجة الحرارة المميزة للحركة الدورانية.

ج3- حساب الحرارة النوعية (السعة الحرارية):

- من أجل $T > T_B$: تتوافق السعة الحرارية للبوزونات مع السعة الحرارية للغاز الكلاسيكي

$$C_{V \max} = \left(\frac{\partial U_{\max}}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} NK = C_{V \text{ Clas}}$$

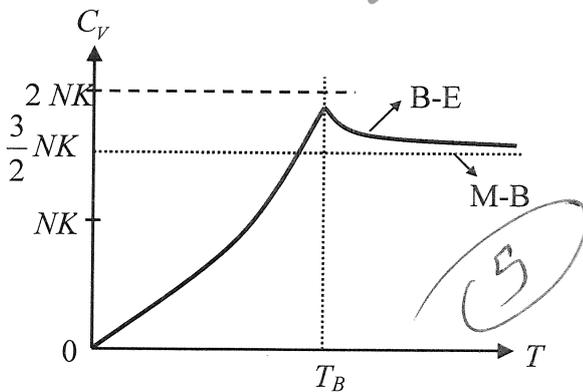
نلاحظ هنا أنه عند الطاقات العالية تكون $C_{V \max}$ غير تابعة لدرجة الحرارة T .

- من أجل $T \leq T_B$:

$$C_{V \min} = \left(\frac{\partial U_{\min}}{\partial T} \right)_V \approx \frac{5}{2} 0,77 NK T_B^{-3/2} T^{3/2} \Rightarrow C_{V \min} = 1,92 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}$$

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات المنخفضة تكون $C_{V \min}$ تابعة لتغيرات درجة الحرارة T .

يوضح الشكل تمثيل $C_{V \min}$ (السعة الحرارية لغاز البوزون عند الطاقات المختلفة)



- عند الطاقات المنخفضة: أي في المجال الواقع بجوار T_B

نلاحظ أن $C_V = 0$ عندما $T = 0 K$ ، وتزداد بازدياد T

بشكل يتناسب طردياً مع $T^{3/2}$ إلى أن تصل لقيمتها القصوى

$C_V = 1,92 NK$ عندما $T = T_B$.

- وعند الطاقات العالية: أي عندما $T > T_B$ تنخفض قيمة C_V

بازدياد T لتأخذ قيمة ثابتة $C_V = \frac{3}{2} NK$ ، كما هو الحال في

الغاز الكلاسيكي الخاضع لتوزيع M-B.

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018

س 1- أجب عن ثلاثة فقط من البنود الأربعة التالية: (60 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة (J) $\epsilon_1 = KT$ و $\epsilon_2 = 2KT$ ،
السويتان متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(N-1, 1)$ في الحالات التالية

A- الجسيمات متميزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقت Z_Q . ثم استنتج من ذلك

(حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

3- برهن أن لغارتم الوزن الإحصائي لكل من توزيعات مكسويل وبوزه وفيرمي يأخذ شكلاً واحداً في حالة الغاز المثالي شبه الكلاسيكي. ثم استنتج ما يلي:

• صيغة عبارة الوزن الإحصائي للغاز شبه الكلاسيكي في الحالة الأكثر احتمالاً.

• شكل الصيغة السابقة بدلالة تابع تحاص جملة الغاز شبه الكلاسيكي.

4- إذا علمت أن الطاقة الداخلية لغاز البوزون عند درجات حرارة تفوق درجة التكاثف $T > T_B$ هي ذاتها

$$U_{\max} = \frac{3}{2} NKT = U_{\text{clas}}$$

وعند الدرجات الأقل $T \leq T_B$ تأخذ الصيغة $U_{\min} \approx 0,77 NKT \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}$. والمطلوب: أوجد السعات

الحرارية $C_{V \min}$ و $C_{V \max}$ لمجالي الحرارة، وارسم الخط البياني لتحويلات C_V بدلالة T مع الشرح.

• برهن أن الأنترودية تعطى وفق الصيغة $S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$ ، ثم أوجد قيمتها عند الطاقات العالية والمنخفضة.

س 2- أجب عن السؤال التالي: (20 درجة).

تُعبّر الصيغة $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(\vartheta) d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تتحصر سرعتها المطلقة في

المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ ، وفقاً لتوزيع (M-B). والمطلوب:

• أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV (2\pi mKT)^{3/2}$.

• مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: الخميس 2018 / 2 / 1

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018 (ثمانون درجة)

ج 1: 60 درجة

1- نبتلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$ (احصائي) 20
نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln N! + \sum_i [N_i Ln g_i - Ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $Ln x! \approx x Ln x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \quad (5)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln g_i - Ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \quad (5)$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انخفاض عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0 \quad (5)$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad (5)$$

2- المسألة: (احصائي)

$$N_0 = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(N + 2 - 1)!}{N!(2 - 1)!} = \frac{(N + 1)!}{N!!} = \frac{(N + 1)N!}{N!!} = N + 1 \quad (3)$$

1- عدد حالات التوزيع الماكروي: 20

2- A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N! \left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!} \frac{2^1}{1!} \right) = 2N \quad (3)$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N - 1 + 1 - 1)! (1 + 2 - 1)!}{(N - 1)! (1 - 1)! 1! (2 - 1)!} = 2 \quad (3)$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة 1

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N=2$. نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 1e^{-1} + 2e^{-2} \quad (2)$$

تحاص الطاقم

$$Z_{\Omega} = Z^N = (1e^{-1} + 2e^{-2})^2 = 1e^{-2} + 4e^{-4} + 4e^{-3} \quad (*) \quad (2)$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U = \sum N_i \varepsilon_i$ كما يلي $(1,1)$ $(0,2)$ $(2,0)$ $U=2KT$ $U=4KT$ $U=3KT$

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{\beta U_{(2,0)}} + W_{(0,2)} e^{\beta U_{(0,2)}} + W_{(1,1)} e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta = -1/KT$ ، نجد:

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{-2} + W_{(0,2)} e^{-4} + W_{(1,1)} e^{-3} \quad (2)$$

نطبق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة.

$$W_{(1,1)} = 4 \quad \text{و} \quad W_{(0,2)} = 4 \quad \text{و} \quad W_{(2,0)} = 1. \quad (2)$$

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(1,1)} = 4$ و $W_{(0,2)} = 4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)} = 3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$

$$\begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

3/20 (امباري)

بما أن جسيمات الغاز المثالي شبه الكلاسيكي هي بوزونات أو فيرميونات (فهي غير متميزة). فإننا نطبق الشروط التالية عند التعامل مع هذه الجسيمات:

الشرط: $(N_i \approx 1)$ لإلغاء حالات التوزيع المتشابهة عند (M-B) من جانب.

الشرط: $(g_i \gg 1, N_i \gg 1)$ لتحقيق شرط توزيع الفيرميونات باعتبارها جسيمات كمية من جانب ثاني.

الشرط المتمثل بتقريب ستيرلنج: $(\ln x! \approx x \ln x - x)$ باعتبارها جسيمات كلاسيكية من جانب آخر.

A- التقريب المطبق على توزيع (M-B):

$$W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \approx \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$$

$$\ln W_{M-B} \approx \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \Rightarrow \boxed{\ln W_{M-B} = \sum_i (N_i \ln \frac{g_i}{N_i} + N_i)}$$

B- التقريب المطبق على توزيع (B-E):

$$W_{B-E} = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \approx \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i! g_i!}$$

$$\ln W_{B-E} \approx \sum_i [(\ln(N_i + g_i)! - \ln N_i! - \ln g_i!)]$$

$$\approx \sum_i [(N_i + g_i) \ln(N_i + g_i) - (N_i + g_i) - N_i \ln N_i + N_i - g_i \ln g_i + g_i]$$

$$\approx \sum_i (N_i \ln \frac{N_i + g_i}{N_i} + g_i \ln \frac{N_i + g_i}{g_i})$$

نستخدم التقريبات الرياضيين التاليين:

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_i}{N_i} \gg 1 &\Rightarrow \ln\left(\frac{g_i \pm N_i}{N_i}\right) = \ln\left(\frac{g_i}{N_i} \pm 1\right) \approx \pm \ln\frac{g_i}{N_i} \\ \frac{N_i}{g_i} \ll 1 &\Rightarrow \ln\left(\frac{g_i \pm N_i}{g_i}\right) = \ln\left(1 \pm \frac{N_i}{g_i}\right) \approx \pm \frac{N_i}{g_i} \end{aligned} \right\} (*)$$

$$\ln W_{B-E} \approx \sum_i \left(N_i \ln \frac{g_i}{N_i} + g_i \frac{N_i}{g_i} \right) \Rightarrow \boxed{\ln W_{B-E} = \sum_i \left(N_i \ln \frac{g_i}{N_i} + N_i \right)}$$

C- التقريب المطبق على توزيع (F-D):

$$W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$$

$$\ln W_{F-D} = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!]$$

$$\ln W_{F-D} \approx \sum_i [g_i \ln g_i - g_i - N_i \ln N_i + N_i - (g_i - N_i) \ln (g_i - N_i) + (g_i - N_i)]$$

$$\ln W_{F-D} \approx \sum_i \left[N_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + g_i \ln \frac{g_i}{g_i - N_i} \right] = \sum_i \left[N_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} - g_i \ln \frac{g_i - N_i}{g_i} \right]$$

نستخدم التقريبات الرياضيين الواردين في (*):

$$\ln W_{F-D} \approx \sum_i \left[N_i \ln \frac{g_i}{N_i} - g_i \left(-\frac{N_i}{g_i} \right) \right] \Rightarrow \boxed{\ln W_{F-D} \approx \sum_i \left[N_i \ln \frac{g_i}{N_i} + N_i \right]}$$

• لإيجاد صيغة عبارة الوزن الإحصائي للغاز شبه الكلاسيكي في الحالة الأكثر احتمالاً، نوجد قيمة المقدار $\ln \frac{g_i}{N_i}$

باعتبار أن $\frac{g_i}{N_i} \gg 1$ من عبارة رقم الانشغال العائد للتوزعات (M-B) و (B-E) و (F-D) كما يلي:

$$(N_i)_{\max}^{M-B} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)}} \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)}$$

$$(N_i)_{\max}^{B-E} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} - 1} \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} - 1 \approx e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} ; \frac{g_i}{N_i} \gg 1$$

$$(N_i)_{\max}^{F-D} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} + 1} \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} + 1 \approx e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} ; \frac{g_i}{N_i} \gg 1$$

مما سبق نستنتج أن أرقام الانشغال (في الحالة الأكثر احتمالاً) العائدة لكافة التوزعات تكون متساوية، ومساوية لرقم انشغال (M-B). وبأخذ اللوغارتم نجد:

$$\frac{g_i}{N_i} \approx e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} = e^{\frac{\epsilon_i}{kT} - \alpha} \Rightarrow \ln \frac{g_i}{N_i} \approx \frac{\epsilon_i}{kT} - \alpha$$

بالتعويض في الصيغة المشتركة للوغارتم الوزن الإحصائي للغاز المثالي شبه الكلاسيكي في الحالة الأكثر احتمالاً نجد:

$$\ln W_{\max} \approx \sum_i \left[N_i \left(\frac{\epsilon_i}{kT} - \alpha \right) + N_i \right] \approx \frac{1}{kT} \sum_i N_i \epsilon_i - \alpha \sum_i N_i + \sum_i N_i = \frac{U}{kT} - \alpha N + N$$

$$\boxed{\ln W_{\max} \approx \frac{U}{kT} - \alpha N + N}$$

• لإيجاد الصيغة السابقة لعبارة الوزن الإحصائي للغاز شبه الكلاسيكي في الحالة الأكثر احتمالاً، بدلالة تابع تحاص مكسويل الكلاسيكي Z. نلاحظ من تعريف Z:

$$Z = \frac{N}{A} ; A = e^\alpha \Rightarrow \alpha = \ln A$$

$$\ln W_{\max} \approx \frac{U}{kT} - N \ln A + N = \frac{U}{kT} - N \ln \frac{N}{Z} + N = \frac{U}{kT} + N \ln Z - (N \ln N - N)$$

$$\ln W_{\max} \approx \frac{U}{kT} + \ln Z^N - \ln N! = \frac{U}{kT} + \ln \frac{Z^N}{N!}$$

$$\ln W_{\max} \approx \frac{U}{kT} + \ln Z_S \quad ; \quad Z_S = \frac{Z^N}{N!}$$

يمثل Z_S تابع تحاص الغاز شبه المثالي

4/20 حساب الحرارة النوعية (السعة الحرارية):

- من أجل $T > T_B$: تتوافق السعة الحرارية للبوزونات مع السعة الحرارية للغاز الكلاسيكي

$$C_{V_{\max}} = \left(\frac{\partial U_{\max}}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} NK = C_{V_{\text{clas}}}$$

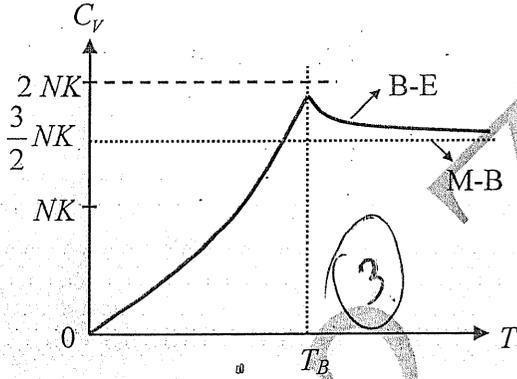
نلاحظ هنا أنه عند الطاقات العالية تكون $C_{V_{\max}}$ غير تابعة لدرجة الحرارة T .

- من أجل $T \leq T_B$:

$$C_{V_{\min}} = \left(\frac{\partial U_{\min}}{\partial T} \right)_V \approx \frac{5}{2} 0,77 NKT_B^{-3/2} T^{3/2} \Rightarrow C_{V_{\min}} = 1,92 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}$$

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات المنخفضة تكون $C_{V_{\min}}$ تابعة لتغيرات درجة الحرارة T .

يوضح الشكل تمثيل $C_{V_{\min}}$ (السعة الحرارية لغاز البوزون عند الطاقات المختلفة)



- عند الطاقات المنخفضة: أي في المجال الواقع بجوار T_B

نلاحظ أن $C_V = 0$ عندما $T = 0 K$ ، وتزداد بازدياد T

بشكل يتناسب طردياً مع $T^{3/2}$ إلى أن تصل لقيمتها القصوى

$C_V = 1,92 NK$ عندما $T = T_B$.

- وعند الطاقات العالية: أي عندما $T > T_B$ تنخفض قيمة C_V

بازدياد T لتأخذ قيمة ثابتة $C_V = \frac{3}{2} NK$ ، كما هو الحال في

الغاز الكلاسيكي الخاضع لتوزيع M-B.

• برهان صيغة الأنتروبية:

من المبدأ الأول في الترموديناميك يكون $\delta Q = dU$ ونحسب الأنتروبية من عبارة كلاوزيوس كما يلي:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} = C_V \frac{dT}{T} \quad ; \quad dU = C_V dT$$

وبالمكاملة نحصل على صيغة الأنتروبية

$$S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$$

حساب الأنتروبية:

$$S_{\max} = \int_0^T C_{V_{\max}} \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} NK \ln T$$

- عند الطاقات العليا:

$$S_{\min} = \int_0^T C_{V_{\min}} \frac{dT}{T}$$

- عند الطاقات المنخفضة:

$$S_{\min} = \int_0^T 1,92 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \frac{dT}{T} = 1,92 NKT_B^{-3/2} \int_0^T T^{1/2} dT = 1,92 NKT_B^{-3/2} \frac{2}{3} T^{3/2} = 1,28 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}$$

ج ٢: 20

لدينا صيغة $dN(\vartheta)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعتها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ بالشكل التالي:

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta \varepsilon} g(\vartheta) d\vartheta \quad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التخاص

$$Z = CV (2\pi m kT)^{3/2} \quad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p = m\vartheta \Rightarrow dp = m d\vartheta$$

$$g(\vartheta) d\vartheta = C d\Gamma(\vartheta) = C dq_x dq_y dq_z = CV 4\pi p^2 dp = CV 4\pi m^3 \vartheta^2 d\vartheta \quad (b) \quad / \quad (4)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon = m\vartheta^2 / 2 \quad (c)$$

بتعويض العبارات (a) و (b) و (c) في (*):

مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta = -1/kT$ نجد:

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{CV (2\pi m kT)^{3/2}} e^{-m\vartheta^2/2kT} CV 4\pi m^3 \vartheta^2 d\vartheta$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزيع السرعة المطلقة لجسيم واحد، بالشكل التالي:

$$dF(\vartheta) = \frac{dN(\vartheta)}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-m\vartheta^2/2kT} d\vartheta = f(\vartheta^2) d\vartheta$$

و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

$$dF(\vartheta) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha \vartheta^2} d\vartheta = f(\vartheta^2) d\vartheta$$

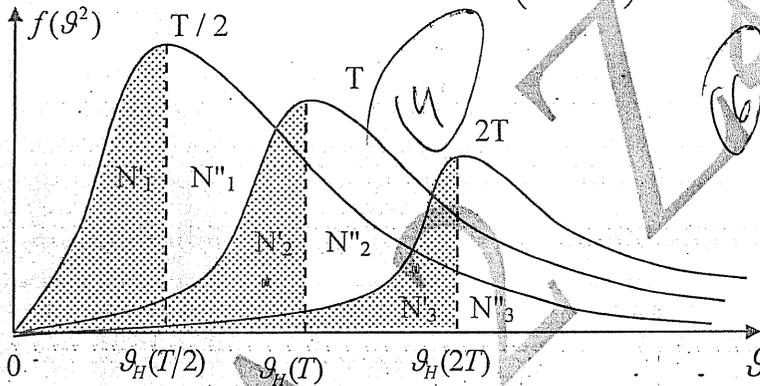
• نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات

حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي:

المناقشة والتفسير:

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات

$N = cte$ عند كل درجة حرارة.



فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث $N = N' + N''$

حيث N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H .

و N'' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من ϑ_H .

حيث ϑ_H السرعة الموافقة لقيمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية)، (السرعة الأكثر احتمالاً).

النتائج:

١- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات

٢- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N'' على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$).

٣- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي

تقع سرعتها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة الإضافية (الصيفية) للعام الدراسي 2016 - 2017

س1- أجب عن النقطتين التاليتين (40 درجة)

- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)}$ لتوزيع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).
- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة
: $\epsilon_1 = KT$ (J) و $\epsilon_2 = 2KT$ (J)، السويتان متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:
1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

- 2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(N-1, 1)$ في الحالات التالية
A- الجسيمات متميزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
- 3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقت Z_0 . ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

س2- أجب عن البنتين التاليتين (40 درجة)

1- تُعبر الصيغة $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{-\beta \epsilon} g(\vartheta) d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تتحصر سرعها المطلقة في

المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ ، وفقاً لتوزيع (M-B). والمطلوب

- أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

2- جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي موزعة على عدد محدود من سويات الطاقة غير المتحللة ($g_i = 1$)،

- وطاقتها تتبع العلاقة: $\epsilon_i = i \epsilon_0$; $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. والمطلوب: 1- احسب تحاص الجملة Z بدلالة β .
- 2- احسب متوسط طاقة الجسيم $\bar{\epsilon}$.
- 3- احسب قيمة $\bar{\epsilon}$ إذا علمت أن: $\epsilon_0 \ll KT$ ، ماذا تستنتج؟

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس / 28 / 2017

د. محمد إبراهيم

مدرس المقرر

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الدورة الإضافية (الصيفية) للعام الدراسي 2016 - 2017
الدرجة العظمى: ثمانون درجة (توزيع الدرجات: 40 درجة للسؤال الأول و 40 للثاني)

1 ج (40 درجة)

• استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{(F-D)}$ max

20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التجلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i . أي $g_i \gg N_i$.
نوجد بدايةً $\ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{F-D}) \approx \ln \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{F-D}) \approx \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)]$$

بما أن W_{F-D} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{F-D}) = \frac{\partial \ln(W_{F-D})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[-\ln N_i - 1 + \frac{g_i}{g_i - N_i} + \ln (g_i - N_i) - \frac{N_i}{g_i - N_i} \right] dN_i = \sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} - 1 + \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right) dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) \approx \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$U = \sum_i \epsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \epsilon_i dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \epsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} + 1 \Rightarrow N_{i(F-D)} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} + 1}$$

المسألة: 20

$$N_0 = \frac{(N + N_e - 1)!}{N!(N_e - 1)!} = \frac{(N + 2 - 1)!}{N!(2 - 1)!} = \frac{(N + 1)!}{N!1!} = \frac{(N + 1)N!}{N!1!} = N + 1$$

1- عدد حالات التوزيع الماكروي: 2

2- A - الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N! \left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!} \frac{2^1}{1!} \right) = 2N$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N - 1 + 1 - 1)! (1 + 2 - 1)!}{(N - 1)! (1 - 1)! 1! (2 - 1)!} = 2$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (N-1,1) لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \epsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = 1e^{-1} + 2e^{-2} \quad (2)$$

تحاص الطاقم

$$Z_{\Omega} = Z^N = (1e^{-1} + 2e^{-2})^2 = 1e^{-2} + 4e^{-4} + 4e^{-3} \quad (*) \quad (2)$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U = \sum_i N_i \epsilon_i$ كما يلي $(\bar{1}, 1)$ $(\bar{0}, 2)$ $(\bar{2}, 0)$ $U=2KT$ $U=4KT$ $U=3KT$

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{\beta U_{(2,0)}} + W_{(0,2)} e^{\beta U_{(0,2)}} + W_{(1,1)} e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta = -1/KT$ ، نجد:

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{-2} + W_{(0,2)} e^{-4} + W_{(1,1)} e^{-3} \quad (2)$$

نطبق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة.

$$W_{(1,1)} = 4 \quad \text{و} \quad W_{(0,2)} = 4 \quad \text{و} \quad W_{(2,0)} = 1 \quad (2)$$

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(1,1)} = 4$ و $W_{(0,2)} = 4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)} = 3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$

B	B	A	A
A	A	B	B

-2 ج (40 درجة)

-1

20

لدينا صيغة $dN(\mathcal{G})$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تتحصر سرعتها المطلقة في المجال $[\mathcal{G}, \mathcal{G} + d\mathcal{G}]$ بالشكل التالي:

$$dN(\mathcal{G}) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(\mathcal{G}) d\mathcal{G} \quad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التحاص

$$Z = CV (2\pi m kT)^{3/2} \quad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p = m\mathcal{G} \Rightarrow dp = m d\mathcal{G}$$

$$g(\mathcal{G}) d\mathcal{G} = C d\Gamma(\mathcal{G}) = C dq_x dp_x = CV 4\pi p^2 dp = CV 4\pi m^3 \mathcal{G}^2 d\mathcal{G} \quad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\epsilon = m\mathcal{G}^2/2 \quad (c)$$

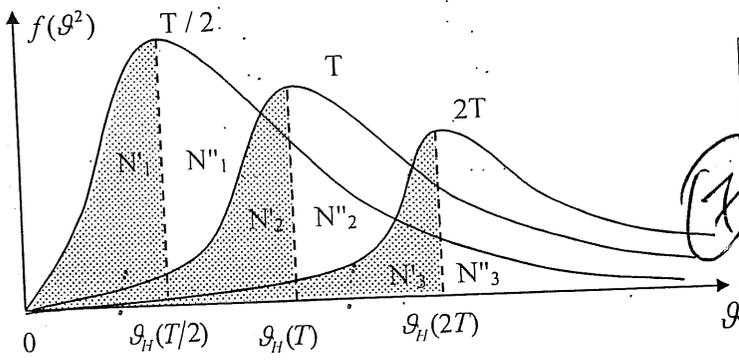
بتعويض العبارات (a) و (b) و (c) في (*)،

مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta = -1/kT$ نجد:

$$dN(\mathcal{G}) = \frac{N}{CV (2\pi m kT)^{3/2}} e^{-m\mathcal{G}^2/2kT} CV 4\pi m^3 \mathcal{G}^2 d\mathcal{G} \quad (7)$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزيع السرعة المطلقة لجسيم واحد، بالشكل التالي:

$$dF(g) = \frac{dN(g)}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} g^2 e^{-m g^2 / 2kT} dg = f(g^2) dg$$



و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

$$dF(g) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = f(g^2) dg$$

• تمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي: المناقشة والتفسير: تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات $N = cte$ عند كل درجة حرارة.

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث $N = N' + N''$ حيث N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً g_H و N'' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من g_H .

حيث g_H السرعة المرافقة لقيمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية)، (السرعة الأكثر احتمالاً). النتائج:

- 1- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات
- 2- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N'' على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$)
- 3- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(g^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعتها المطلقة في المجال $[g, g + dg]$.

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \epsilon_i} = \sum_i e^{\beta \epsilon_i} = 1 + e^{\beta \epsilon_0} + e^{2\beta \epsilon_0} + \dots \quad -1$$

يمثل Z سلسلة هندسية أساسها $e^{\beta \epsilon_0}$ وحدودها متناقصة، لأن $\beta = -1/KT$ وحدها الأول $= 1$ فيكون مجموعها: $(e^{\beta \epsilon_0})^n = 0$ ؛

$$Z = 1 \frac{1 - (e^{\beta \epsilon_0})^n}{1 - e^{\beta \epsilon_0}} \approx \frac{1}{1 - e^{\beta \epsilon_0}} ; (e^{\beta \epsilon_0})^n = 0$$

2- متوسط طاقة الجسيم: نجدها بتطبيق العلاقة: $\bar{\epsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ لها نوجد لغارتم Z :

$$\ln Z = \ln \left(\frac{1}{1 - e^{\beta \epsilon_0}} \right) = -\ln(1 - e^{\beta \epsilon_0})$$

وبالتعويض:

$$\bar{\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(1 - e^{\beta \epsilon_0}) = \frac{\epsilon_0 e^{\beta \epsilon_0}}{1 - e^{\beta \epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0}{e^{-\beta \epsilon_0} - 1} = \frac{\epsilon_0}{e^{\epsilon_0/KT} - 1}$$

3- عندما $\epsilon_0 \ll KT$. ننشر التابع الأسّي بالشكل: $e^{\epsilon_0/KT} = 1 + \frac{\epsilon_0}{KT} + \frac{\epsilon_0^2}{2!K^2T^2} + \frac{\epsilon_0^3}{3!K^3T^3} + \dots$

نهمل الحدود ذات المراتب العليا لأنها صغيرة. ونكتفي بالحددين الأول والثاني. ونعوض في عبارة $\bar{\epsilon}$

$$\bar{\epsilon} \approx \frac{\epsilon_0}{1 + \frac{\epsilon_0}{KT}} \approx KT$$

نستنتج بهذه الحالة أن الغاز الكلاسيكي يتحول إلى غاز مثالي لأن $\bar{\epsilon}_{Id} = KT$ و $\bar{\epsilon}_{Clas} = \frac{3}{2}KT$

امتحان مقرر الفيزياء الإحصائية - السنة الثالثة فيزياء
الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 - 2017

أجب عن الأسئلة التالية: (توزيع الدرجات: 20 درجة لكل سؤال)

س1- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة ($\epsilon_1 = KT$ (J) و $\epsilon_2 = 2KT$ (J) السويتين متحللتين بالشكل $g_1 = g_2 = N$. والمطلوب:

- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\frac{\epsilon_1}{N/2}, \frac{\epsilon_2}{N/2})$ ، بدلالة N ، في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
- بفرض $N = 6$ أوجد القيمة العددية لهذه الأوزان، أي للحالة الماكروية $(\frac{\epsilon_1}{3}, \frac{\epsilon_2}{3})$ في الحالات A و B و C.
- احسب نسب أرقام انشغال السويتات في حالة الجسيمات متمايزة، عند الدرجة T ، ورتبها، ما نوع التوزيع.
- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقت Z_Ω (بدلالة e). واستنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة، ثم حدد الحالة الأكثر احتمال ومثلها.

س2- إذا علمت أن الطاقة الداخلية لغاز البوزون عند درجات حرارة تفوق درجة التكاثف $T > T_B$ هي ذاتها

$$U_{\max} = \frac{3}{2} NKT = U_{\text{classical}}$$

وعند الدرجات الأقل $T \leq T_B$ تأخذ الصيغة $U_{\min} \approx 0,77 NKT \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}$. والمطلوب: أوجد السعات

الحرارية $C_{V \min}$ و $C_{V \max}$ لمجال الحرارة، وارسم الخط البياني لتحويلات C_V بدلالة T مع الشرح.

• برهن أن الأنتروبية تعطى وفق الصيغة $S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$ ، ثم أوجد قيمتها عند الطاقات العالية والمنخفضة.

س3- برهن صحة ما يلي:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad -1$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = KT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \quad -2$$

$$\bar{U} = \frac{\partial \ln Z_\Omega}{\partial \beta} \quad -4$$

$$U = \left[\frac{\partial (\beta F)}{\partial \beta} \right]_V \quad -3$$

5- بفرض $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، و $U = N \bar{\epsilon}$ ، برهن أن السعة الحرارية: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} = \frac{3}{2} NK$.

س4- جملة مكونة من N جسيم كلاسيكي موزعة على عدد محدود من سويتات الطاقة غير المتحللة ($g_i = 1$)، وطاقاتها تتبع العلاقة: $\epsilon_i = i \epsilon_0$; $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. والمطلوب: 1- احسب تحاص الجملة Z بدلالة β .

2- احسب متوسط طاقة الجسيم $\bar{\epsilon}$. 3- احسب قيمة $\bar{\epsilon}$ إذا علمت أن: $\epsilon_0 \ll KT$ ، ماذا تستنتج؟

• أوجد عبارة عدد الجسيمات N بدلالة سوية فيرمي $\epsilon_f^{(0)}$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس الخميس 2017 / 6 / 22

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

1 المسألة: 20

- إيجاد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$ ، بدلالة الحالات الكلية A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية):

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})} = N! \left(\frac{N^{N/2}}{(N/2)!} \frac{N^{N/2}}{(N/2)!} \right) = N! \left(\frac{N^{N/2}}{(N/2)!} \right)^2 = N! \frac{N^N}{[(N/2)!]^2} \quad (2)$$

B- الجسيمات بوزونات:

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})} = \frac{(\frac{N}{2} + N - 1)! (\frac{N}{2} + N - 1)!}{\frac{N}{2}! (N - 1)! \frac{N}{2}! (N - 1)!} = \frac{[(\frac{3N}{2} - 1)!]^2}{[\frac{N}{2}! (N - 1)!]^2} \quad (2)$$

- C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^M \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})} = \frac{N!}{\frac{N}{2}! (N - \frac{N}{2})!} \frac{N!}{\frac{N}{2}! (N - \frac{N}{2})!} = \frac{[N!]^2}{[(\frac{N}{2})!]^4} \quad (2)$$

- عندما $N = 6$ نحسب القيمة العددية لهذه الأوزان، أي للحالة الماكروية $(3, 3)$ في الحالات A و B و C.

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية):

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(3,3)} = 6! \left(\frac{6^3}{3!} \frac{6^3}{3!} \right) = 6! \frac{6^6}{6^2} = 720 \times 1296 = 933120 \quad (2)$$

$$W_{M-B} = N! \frac{N^N}{[(N/2)!]^2} = 6! \frac{6^6}{(3!)^2} = 6! \frac{6^6}{6^2} = 720 \times 1296 = 933120 \quad \text{أو بالتعويض في العبارة} \quad (2)$$

B- الجسيمات بوزونات:

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(3,3)} = \frac{(3+6-1)! (3+6-1)!}{3! (6-1)! 3! (6-1)!} = 3136 \quad (2)$$

$$W_{B-E} = \frac{[(\frac{3N}{2} - 1)!]^2}{[\frac{N}{2}! (N - 1)!]^2} = \frac{[8!]^2}{[3! 5!]^2} = \frac{1625702400}{720} = 3136 \quad \text{أو بالتعويض في العبارة} \quad (2)$$

- C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(3, 3)$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^M \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(3,3)} = \frac{6!}{3! (6-3)!} \frac{6!}{3! (6-3)!} = 400 \quad (2)$$

$$W_{F-D} = \frac{[N!]^2}{[(\frac{N}{2})!]^4} = \frac{[6!]^2}{[3!]^4} = \frac{518400}{1296} = 400 \quad \text{أو بالتعويض في العبارة} \quad (2)$$

- نحسب نسب أرقام انشغال السويات بتطبيق العلاقة

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^\alpha g_i e^{\beta \epsilon_i}}{e^\alpha g_j e^{\beta \epsilon_j}} = \frac{g_i e^{-\epsilon_i/KT}}{g_j e^{-\epsilon_j/KT}}$$

والتوزيع التالي $\frac{N_1}{N_2} = \frac{N e^{-1}}{N e^{-2}} = e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$ (1)

• بفرض أن الجسيمات كلاسيكية. نوجد تحاص الجملة Z (بفتح ليمد السوريت فتح)
 $Z = \sum_i g_i e^{\beta \epsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = N e^{-1} + N e^{-2} = 2e^{-1} + 2e^{-2}$

تحاص الطاقم $N=2$.

$Z_N = Z^N = (2e^{-1} + 2e^{-2})^2 = 4e^{-2} + 4e^{-4} + 8e^{-3}$ (*) (2)

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U = \sum N_i \epsilon_i$ كما يلي $(1,1)$ $(0,2)$ $(2,0)$.
 $U=2KT$ $U=4KT$ $U=3KT$

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$Z_\Omega = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{\beta U_{(2,0)}} + W_{(0,2)} e^{\beta U_{(0,2)}} + W_{(1,1)} e^{\beta U_{(1,1)}}$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta = -1/KT$ ، نجد:

$Z_\Omega = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{-2} + W_{(0,2)} e^{-4} + W_{(1,1)} e^{-3}$

نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة.

B		B		B		B
A		A		A		A
A		A		A		A
B		B		B		B

$W_{(1,1)} = 8$ و $W_{(0,2)} = 4$ و $W_{(2,0)} = 4$ (2)

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$.

20 ج2- حساب الحرارة النوعية (السعة الحرارية):

- من أجل $T > T_B$: تتوافق السعة الحرارية للبولونات مع السعة الحرارية للغاز الكلاسيكي

$C_{V \max} = \left(\frac{\partial U_{\max}}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} NK = C_{V \text{ Clas}}$ (3)

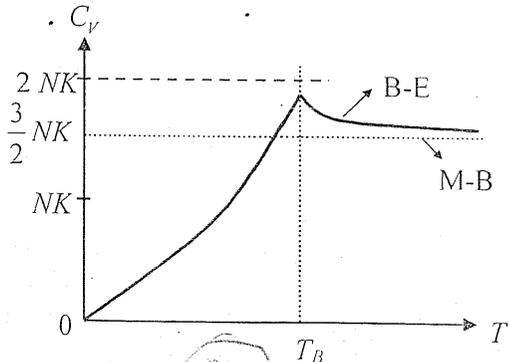
نلاحظ هنا أنه عند الطاقات العالية تكون $C_{V \max}$ غير تابعة لدرجة الحرارة T .

- من أجل $T \leq T_B$:

$C_{V \min} = \left(\frac{\partial U_{\min}}{\partial T} \right)_V \approx \frac{5}{2} 0,77 NK T_B^{-3/2} T^{3/2} \Rightarrow C_{V \min} = 1,92 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}$ (3)

نلاحظ هنا أنه عند الطاقات المنخفضة تكون $C_{V \min}$ تابعة لتغيرات درجة الحرارة T .

يوضح الشكل تمثيل $C_{V \min}$ (السعة الحرارية لغاز البولون عند الطاقات المختلفة)



- عند الطاقات المنخفضة: أي في المجال الواقع بجوار T_B

نلاحظ أن $C_V = 0$ عندما $T = 0 K$ ، وتزداد بازدياد T

بشكل يتناسب طردياً مع $T^{3/2}$ إلى أن تصل لقيمتها القصوى (2)

. $T = T_B$ عندما $C_V = 1,92 NK$

- وعند الطاقات العالية: أي عندما $T > T_B$ تنخفض قيمة C_V

بازدياد T لتأخذ قيمة ثابتة $C_V = \frac{3}{2} NK$ ، كما هو الحال في (2)

الغاز الكلاسيكي الخاضع لتوزيع M-B.

• برهان صيغة الانتروبية:

من المبدأ الأول في الترموديناميك يكون $\delta Q = dU$ ونحسب الانتروبية من عبارة كلاوزيوس كما يلي:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} = C_V \frac{dT}{T} \quad ; \quad dU = C_V dT$$

$$\textcircled{3} \quad S = \int_0^T C_V \frac{dT}{T}$$

حساب الانتروبية:

$$\textcircled{2} \quad S_{\max} = \int_0^T C_{V \max} \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} NK \ln T \quad \text{- عند الطاقات العليا:}$$

$$S_{\min} = \int_0^T C_{V \min} \frac{dT}{T} \quad \text{- عند الطاقات المنخفضة:}$$

$$S_{\min} = \int_0^T 1,92 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \frac{dT}{T} = 1,92 NK T_B^{-3/2} \int_0^T T^{1/2} dT = 1,92 NK T_B^{-3/2} \frac{2}{3} T^{3/2} = 1,28 NK \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad \textcircled{2}$$

3ج 20

1- للبرهان على صحة العبارة $\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T}$ نعلم أن قيمة مضروب لاغرانج هي $\beta = -\frac{1}{KT}$ فنجد:

$$T = -\frac{1}{K\beta} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{1}{K\beta^2} = KT^2$$

وحيث أنه يمكننا كتابة المشتقة بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial T}$$

بالتعويض عن $\partial T / \partial \beta$ بقيمتها نجد:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{KT^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \quad \textcircled{4}$$

2- للبرهان على صحة العبارة $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

بما أن رقم الانشغال معطى بدلالة β بالشكل $N_i = e^\alpha g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ فنجد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{U}{N} = \frac{\sum_i \varepsilon_i N_i}{\sum_i N_i} = \frac{e^\alpha \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}}{e^\alpha \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}} = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

نوجد (*) من تعريف تابع التحاص $Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$ وذلك بإيجاد مشتقة Z بالنسبة لـ β كما يلي:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_i \varepsilon_i g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

وبالتعويض في (*) عن عبارة المجموع بقيمتها نجد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = KT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right) \quad \textcircled{4}$$

3- للبرهان على صحة العبارة $U = \left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} \right]_V$

$$\left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} \right]_V = \left[F + \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \right]_V = F + \beta \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_V \quad \text{نبدأ من الطرف الأيمن للمساواة فنجد:}$$

نوجد قيمة $\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V$ بإدخال درجة الحرارة T كوسيط بالشكل التالي

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right)_V = -S \left(\frac{1}{K\beta^2}\right)_V ; S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \Rightarrow \beta = -\frac{1}{KT} \Rightarrow T = -\frac{1}{K\beta}$$

بالتعويض والاستفادة من معين الطاقات التالي نجد :

$$F + \beta \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_V = F - \beta S \left(\frac{1}{K\beta^2}\right)_V = F - \frac{S}{K\beta} = F + TS = U \quad (4)$$



$$\bar{U} = \frac{U_\Omega}{\Omega} = \frac{\sum_i W_i U_i}{\sum_i W_i} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sum_i W_i U_i e^{\beta U_i}}{\sum_i W_i e^{\beta U_i}} = \frac{1}{Z_\Omega} \frac{\partial Z_\Omega}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln Z_\Omega}{\partial \beta} \quad -4$$

(4)

$$Z_\Omega = \sum_i W_i e^{\beta U_i} \Rightarrow \frac{\partial Z_\Omega}{\partial \beta} = \sum_i W_i U_i e^{\beta U_i} \quad \text{لأن}$$

$$U = N \bar{\epsilon} = NKT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V \quad -5$$

نطبق عبارة السعة الحرارية المولية C_V

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = 2NKT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V + NKT^2 \left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_V \Rightarrow C_V = NKT \left[2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V + T \left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_V \right]$$

نوجد المشتقات من عبارة تابع التخص $Z = CV (2\pi mKT)^{3/2}$

$$\ln Z = \ln C + \ln V + \frac{3}{2} \ln(2\pi mK) + \frac{3}{2} \ln T$$

$$\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2T} \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_V = -\frac{3}{2T^2}$$

بالتعويض عن المشتقات بقيمها نجد:

$$C_V = NKT \left[2 \frac{3}{2T} - T \frac{3}{2T^2} \right] = NKT \left[\frac{3}{T} - \frac{3}{2T} \right] = \frac{3}{2} NK$$

وهي النتيجة ذاتها التي تعطيها النظرية الحركية للغازات.

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \epsilon_i} = \sum_i e^{\beta \epsilon_i} = 1 + e^{\beta \epsilon_0} + e^{2\beta \epsilon_0} + \dots \quad -1 \quad \text{الحل: } \underline{4ج}$$

يمثل Z سلسلة هندسية أساسها $e^{\beta \epsilon_0}$ وحدودها متناقصة، لأن $\beta = -1/KT$ وحدها الأول = 1

$$Z = 1 \frac{1 - (e^{\beta \epsilon_0})^n}{1 - e^{\beta \epsilon_0}} \approx \frac{1}{1 - e^{\beta \epsilon_0}} ; (e^{\beta \epsilon_0})^n = 0 \quad \text{فيكون مجموعها:}$$

2- متوسط طاقة الجسيم: نجدها بتطبيق العلاقة: $\bar{\epsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$. لذا نجد لغارتم Z :

$$\ln Z = \ln \left(\frac{1}{1 - e^{\beta \epsilon_0}} \right) = -\ln(1 - e^{\beta \epsilon_0})$$

وبالتعويض:

$$\bar{\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(1 - e^{\beta \epsilon_0}) = \frac{\epsilon_0 e^{\beta \epsilon_0}}{1 - e^{\beta \epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0}{e^{-\beta \epsilon_0} - 1} = \frac{\epsilon_0}{e^{\epsilon_0/KT} - 1} \quad (3)$$

3- عندما $\epsilon_0 \ll KT$. ننشر التابع الأسّي بالشكل: $e^{\epsilon_0/KT} = 1 + \frac{\epsilon_0}{KT} + \frac{\epsilon_0^2}{2!K^2T^2} + \frac{\epsilon_0^3}{3!K^3T^3} + \dots$

نهمل الحدود ذات المراتب العليا لأنها صغيرة. ونكتفي بالحددين الأول والثاني. ونعوض في عبارة $\bar{\epsilon}$

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon_0}{1 + \frac{\varepsilon_0}{KT}} \approx KT$$

نستنتج بهذه الحالة أن الغاز الكلاسيكي يتحول إلى غاز مثالي لأن $\varepsilon_{cl} = \frac{3}{2}KT$ و $\varepsilon_{cl} = \frac{3}{2}KT$

• توجد عبارة عدد الجسيمات N بدلالة سوية فيرمي $\varepsilon_f(0)$ بمكاملة العلاقة التالية في المجال $[0, \infty[$:

$$dN = f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & ; \varepsilon < \varepsilon_f^{(0)} \\ 0 & ; \varepsilon > \varepsilon_f^{(0)} \end{cases} \quad \text{واعتبار قيمة تابع فيرمي}$$

$$N = \int_0^{\infty} dN = \int_0^{\infty} f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_f} f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon + \int_{\varepsilon_f}^{\infty} f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_f} g(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_f} C d\Gamma(\varepsilon) \quad (*)$$

نوجد درجة التحلل $g(\varepsilon)d\varepsilon$ بدلالة عنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$. ونضربه بـ 2 نظراً لتمتع الفيرميون بسببين مزدوج $S = \pm \hbar/2$ ، واعتبار أن $C = 1/h^3$ (لأن الجسيمات كمية) بالشكل:

$$C d\Gamma(\varepsilon) = 2C dq_v dp_v = \frac{2V}{h^3} d\left(\frac{4}{3}\pi p^3\right) = \frac{2V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (**)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon = m\dot{q}^2/2 = p^2/2m \Rightarrow p^2 = 2m\varepsilon \quad \text{و} \quad p = \sqrt{2m\varepsilon} \Rightarrow dp = m d\varepsilon / \sqrt{2m\varepsilon}$$

بالتعويض في (**)

$$C d\Gamma(\varepsilon) = \frac{2V}{h^3} 4\pi 2m\varepsilon \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

بالتعويض في (*)

$$N = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \Rightarrow N = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \varepsilon_f^{3/2}$$

تشير العبارة الحاصلة إلى توزيع الجسيمات بدلالة سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$ عند درجة الصفر المطلق.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
X
Y
Z



مع التمنيات



بالتوفيق والنجاح

مكتبة

A to Z

A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
X
Y
Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z