كلية **العلوم**

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الأولى**

أسئلة دورات محلولة

الهندسة التحليلية

جامعة طرطوس — امتحان مقرر الهندسة التحليلية

كلية العلوم — الدورة الامتحانية الثانية/ 2024 -2025 — اسم الطالب :

قسم الفيزياء — للسنة الأولى (فيزياء) — المدة: ساعتان

السؤال الأول (20 درجة): في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

لتكن النقاط $M_1(1,1,-2), M_2(-1,-1,0), M_3(0,0,-1), M_4(2,2,-3)$

وليكن المستوي $Q: 4x+2y+6z+6=0$. و المطلوب :

1. أثبت أن النقاط تقع في مستو واحد.
2. اكتب معادلة المستوي P المار بـ M_1, M_2, M_3
3. بين أن المستويان P,Q متوازيان ، ثم احسب البعد بينهما.

السؤال الثاني (20 درجة) :

ليكن المستوي P المار بـ $M(1,2,-1)$ ويقبل الشعاع $\vec{n}(2,1,1)$ ناظما له. والمطلوب:

1) اكتب معادلة المستوي P ثم أوجد إحداثيات نقاط تقاطعه مع المحاور الاحداثية
2) اكتب معادلة المستوي P بدلالة الأجزاء المقتطعة من المحاور الإحداثية .
3) حدد موضع النقطتين $R(3,2,2), S(3,-2,5)$ بالنسبة للمستوي P

السؤال الثالث (25 درجة)

ليكن المستويان P,Q: $\begin{cases} P: 2x+y+3z-4=0 \\ Q: 3x+2y+z-9=0 \end{cases}$

1. اكتب معادلة كل من المنصف الخارجي والداخلي للزاوية بين المستويين P,Q
2. اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لهما

السؤال الرابع (25 درجة):

أوجد معادلة العمود المشترك للمستقيمين التاليين :

$D_1 \begin{cases} P: 2x-y+z+3=0 \\ Q: x-y+1=0 \end{cases}$ $\qquad D_2 \begin{cases} R: x+2z+1=0 \\ S: 3x-y+z-2=0 \end{cases}$

(الجزء العملي): (10 درجات) يجيب على هذا السؤال **فقط** الطلاب الذين ليس لديهم علامة عملي

اكتب المعادلة القطبية للمنحني الديكارتي $y = x\sqrt{\frac{x}{2R-x}}$ (حيث R عدد ثابت)

انتهت الأسئلة

طرطوس في 2025 / 8 / 3 — مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح — د. رنا محمد

سلم تصحيح مقرر هندسة تحليلية سنة أولى (فيزياء)

السؤال الأول: (20 درجة)

① $\overrightarrow{M_1M_2}(-2,-2,2)$ ، $\overrightarrow{M_1M_3}(-2,1,1)$ ، $\overrightarrow{M_1M_4}(2,-4,0)$

5

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

الأشعة مرتبطة خطياً والنقاط واقعة في مستوٍ واحد.

② معادلة المستوي $P(M_1M_2M_3)$ ناظمه $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$

$= (2,1,3) \Rightarrow P: 2x + y + 3z + 3 = 0$ 5

③ $\vec{n}_P(2,1,3)$ ، $\vec{n}_Q(4,2,6)$ مرتبطان خطياً فالمستويان متوازيان. 5

ولإيجاد البعد بينهما

$$dist(M_1, Q) = \frac{|4+2-12+7|}{\sqrt{16+4+36}} = \frac{1}{\sqrt{56}}$$ 5

السؤال الثاني: (20 درجة)

$M(1,2,-1)$

① معادلة P:

$P: 2(x-1) + 1(y-2) + z + 1 = 0$

4 $P: 2x + y + z - 3 = 0$

• نقطة تقاطعه مع المحور ox: 2 $A(E,0,0) = (\frac{3}{2},0,0)$

" " " oy: 2 $B(0,F,0) = (0,3,0)$

" " " oz: 2 $C(0,0,G) = (0,0,3)$

② معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية:

$$\frac{x}{E} + \frac{y}{F} + \frac{z}{G} = 1$$

5

$$\frac{2x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$$

③

5 $P(S)=6>0$

$7=P(R)>0$

③ نوجد القوة التحليلية لكل نقطة

R, S تقعان بنفس الجهة بالنسبة لـ P

السؤال الثالث ((25 درجة))

نفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المنصف الخارجي (الداخلي) عندئذٍ:

$$\frac{|P(x,y,z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|Q(x,y,z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ 5

$$2x+y+3z-4=\mp(3x+2y+z-9)$$

5 $\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=11>0$

موافق المنصف الداخلي الإشارة (−)

الخارجي الإشارة (+)

5 معادلة المنصف الداخلي بالحساب:

$5x+3y+4z-13=0$

5 معادلة المنصف الخارجي بالحساب:

$-x-y+2z+5=0$

② بالحل المشترك بين جملة معادلتي P و Q وبفرض $z=t$ نجد

$x=-5t-1$

$y=7t+6$ 5

$z=t$

السؤال الرابع: 25 درجة

نوجد متجه توجيه P_1 :
$$\vec{v}_1 = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q = (1,1,-1) \quad 5$$

D_2 : " " "
$$\vec{v}_2 = \vec{n}_R \times \vec{n}_S = (2,5,-1) \quad 5$$

متجه العمود المشترك لـ D_1 و D_2 هو
$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (4,-1,3) \quad 5$$

لإيجاد معادلات المستقيم D الذي يقبل $\vec{v}$ شعاع توجيه له (يعامد D_1 و D_2)

نوجد حزمة المستويات الحاوية D_1

$$P + \lambda Q = (2+\lambda)x + (-1-\lambda)y + z + 3 + \lambda = 0$$

نختار منها الذي ناظمه يعامد $\vec{v}$

$$(2+\lambda)(4) + (-1-\lambda)(-1) + 3 + 3 + \lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{-12}{5}$$

نعوض في الحزمة:

$$5 \quad \boxed{P_1' : -2x + 7y + 5z + 3 = 0}$$

نوجد حزمة المستويات الحاوية D_2 ثم نختار منها الذي ناظمه يعامد $\vec{v}$:

$$R + \lambda S = (1+3\lambda)x - \lambda y + (2+\lambda)z + (1-2\lambda) = 0$$

$$w_\lambda \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-5}{8}$$

نعوض في معادلة الحزمة

$$5 \quad \boxed{P_2' = -7x + 5y + 11z + 18 = 0}$$

جملة المعادلتين P_1', P_2' معادلتي العمود المشترك

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء_السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2025- 2024

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (55 درجة):

ليكن لدينا المستقيم:

$$D:\begin{cases} P_1 = 2x + y - z - 1 = 0 \\ P_2 = -x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

1) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم D .

2) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين P_1 و P_2 .

3) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم D على المستويات الاحداثية.

4) أوجد المعادلة الناظمة للمستوي P_1 .

السؤال الثاني (35 درجة):

لدينا سطح معطى بالعلاقة التالية:

$$S(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 5 = 0$$

والمطلوب:

1) أوجد معادلة هذا السطح في الإحداثيات الكروية.

2) ما نوع المجسم الذي يمثله السطح S .

3) أوجد معادلتي المستقيم الناظم و معادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $M(-1,1,2)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

سلم تصحيح الهندسة التحليلية / قسم الفيزياء / سنة أولى

السؤال الأول: 25 درجة

~~أوجد المعادلات الو~~

الحل:

المعادلات الوسيطة

$x = 4 + t$

$y = 3 - t$ ، $t \in \mathbb{R}$ 10

$z = 1 + 2t$

للانتقال إلى الشكل الديكارتي نحسب t من كل معادلة:

$x = 4 + t \Rightarrow t = \frac{x-4}{1}$

$y = 3 - t \Rightarrow t = \frac{y-3}{-1}$ 10

$z = 1 + 2t \Rightarrow t = \frac{z-1}{2}$

فيكون الشكل الديكارتي:

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$$ 5

السؤال الثاني: 25 درجة

نعطي معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقتطعة من المحاور الإحداثية بالشكل

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ 10

ومن شروط المسألة نجد أن:

$a = b = c$ 5

بالتالي فإن

$x + y + z = a$

وبما أن النقطة $M(3, 5, -7)$ من المستوي فهي تحقق معادلته بالتالي

$3 + 5 - 7 = a \Rightarrow a = 1$ 5

معادلة المستوي

$x + y + z = 1$ 5

السؤال الثالث: 20 درجة

سطح معادلته الديكارتية:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 5 = 0$$

الحل:

$x = r\sin\varphi\cos\theta$ 10

$y = r\sin\varphi\sin\theta$

$z = r\cos\varphi$ ، $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

بالتالي $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

نعوض في المعادلة الديكارتية للسطح فنجد:

$$r^2 + 2r\sin\varphi\cos\theta + 4r\sin\varphi\sin\theta - 5 = 0$$ 10

السؤال ~~الثاني~~ الرابع: 20 درجة

بما أن الزاوية بين المستويين هي الزاوية بين ناظميهما

$$\cos\theta = \frac{|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$ 10

$$= \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1+2+1}\cdot\sqrt{1+2+1}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ 5

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 5

انتهى السلم

السؤال الأول [55 درجة]

لتكن لدينا المستقيم

$$D:\begin{cases} P_1 = 2x + y - z - 1 = 0 \\ P_2 = -x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

1) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم D
2) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين P_1, P_2
3) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم D على المستويات الاحداثية.
4) أوجد المعادلة الناظمية للمستوي P_1 .

الحل

1) المعادلات الوسيطية لمستقيم مار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ وموازي لمتجه $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ هي

$$D:\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

3

لنوجد متجه توجيه D أي $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma) = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \quad , \quad \vec{v}(0,-1,-1)$$

3

لنوجد نقطة ما من المستقيم ؛

بجمع معادلتي المستويين نجد

$$x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

نعوض في احدى المعادلتين $\boxed{y - z = 3}$ بفرض $\boxed{z = 1} \Rightarrow \boxed{y = 4}$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ هي $M_0(-1,4,1)$

نعوض في المعادلات الوسيطية ؛

$$D:\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

3

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف لزاوية المستويين،

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_1|} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_2|}$$

5

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{2x+y-z-1}{\sqrt{4+1+1}} = \pm \frac{-x-y+z+2}{\sqrt{1+1+1}}$$

$\sqrt{3}\,(2x+y-z-1) = \pm\sqrt{6}\,(-x-y+z+2)$ 2

$(2x+y-z-1) = \pm\sqrt{2}\,(-x-y+z+2)$ لنوجد $\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2$:

$\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2 = -2-1-1=-4<0$ 3

2

(−) توافق المستوي المنصف الخارجي

(+) توافق المستوي المنصف الداخلي. 2

المستوي المنصف الداخلي:

$\sqrt3(2x+y-z-1)=\sqrt6(-x-y+z+2)$

$$\boxed{(2\sqrt3+\sqrt6)x+(\sqrt3+\sqrt6)y+(-\sqrt3-\sqrt6)z-\sqrt3-2\sqrt6=0}$$

أو
$$\boxed{(2+\sqrt2)x+(1+\sqrt2)y+(-1-\sqrt2)z-1-2\sqrt2=0}$$ 3

المستوي المنصف الخارجي:

$\sqrt3(2x+y-z-1)=-\sqrt6(-x-y+z+2)$

$$\boxed{(2\sqrt3-\sqrt6)x+(\sqrt3-\sqrt6)y+(-\sqrt3+\sqrt6)z-\sqrt3+2\sqrt6=0}$$

أو
$$\boxed{(2-\sqrt2)x+(1-\sqrt2)y+(-1+\sqrt2)z-1+2\sqrt2=0}$$ 3

3) معادلات المسقط القائم لـ D على المستويات الاحداثية:

لنوجد حزمة المستويات المارة من D:

$P_1+\lambda P_2=0 \Rightarrow (2-\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z-1+2\lambda=0$ 5

ناظم الحزمة: $\vec\omega_\lambda(2-\lambda,\ 1-\lambda,\ -1+\lambda)$

1) المسقط على xoy الذي معادلته $z=0$ وناظمه $\vec N_1(0,0,1)$

نختار من هذه الحزمة مستوياً عمودياً على المستوي xoy أي أن

$\vec\omega_\lambda\cdot\vec N_1=0 \Rightarrow -1+\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=1}$ 2

نعوض في معادلة الحزمة: $P'_1 = \boxed{x+1=0}$

وبالتالي: $D_1\begin{cases}x+1=0\\ z=0\end{cases}$ هو المسقط القائم لـ D على xoy 3

2) المسقط لـ D على yoz الذي معادلته $x=0$ ، ناظمه $\vec{N}_2(1,0,0)$

نختار من الحزمة السابقة مستوياً عمودياً على المستوي yoz أي أن الناظمين متعامدين ⇐

$$\vec{\omega}_\lambda \cdot \vec{N}_2 = 0 \Rightarrow 2-\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2} \quad 2$$

نعوض في معادلة الحزمة :

$$P_2' : \boxed{-y+z+3=0}$$

وبالتالي المسقط على yoz هو:

$$D_2 : \begin{cases} -y+z+3=0 \\ x=0 \end{cases} \quad 3$$

3) المسقط على المستوي xoz الذي معادلته $y=0$ وناظمه $\vec{N}_3(0,1,0)$

نختار من الحزمة السابقة مستوياً عمودياً على المستوي xoz أي أن ناظمي الحزمة والمستوي xoz متعامدين:

$$\vec{\omega}_\lambda \cdot \vec{N}_3 = 0 \Rightarrow 1-\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1} \quad 2$$

نعوض في معادلة الحزمة:

$$\boxed{P_1' : \quad x+1=0}$$

فنحصل: $D_3 : \begin{cases} x+1=0 \\ y=0 \end{cases}$ 3 هو المسقط القائم لـ D على المستوي xoz

4) المعادلة الناظمية للمستوي P_1:

نأخذ طويلة ناظم المستوي أي $|\vec{\omega}_1|$

$$|\vec{\omega}_1| = \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \quad 3$$

نقسم طرفي معادلة المستوي P_1 على $|\vec{\omega}_1| = \sqrt{6}$ فنحصل على المعادلة الناظمية لـ P_1:

$$\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \quad 3$$

السؤال الثاني:

لدينا سطح معطى بالعلاقة التالية:

$$S(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-5=0$$

والمطلوب: 1) اكتب معادلة هذا السطح في الاحداثيات الكروية.

2) ما نوع الجسم الذي يمثله السطح S.

3) اوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $M(-1,1,2)$.

1)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

6

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-5=0$$

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta + 2r\sin\theta\cos\varphi - 4r\sin\theta\sin\varphi + 6r\cos\theta - 5 = 0$$

$$r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta + 2r\sin\theta(\cos\varphi - 4\sin\varphi) + 6r\cos\theta - 5 = 0$$

$$r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + 2r\sin\theta(\cos\varphi - 4\sin\varphi) + 6r\cos\theta - 5 = 0$$

$$\boxed{r^2 + 2r\sin\theta(\cos\varphi - 4\sin\varphi) + 6r\cos\theta - 5 = 0}$$

3

وهي معادلة السطح في الاحداثيات الكروية

2)

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-5=0$$

نلجأ الى الاكمال الى مربع كامل بالنسبة للمتحولات الثلاث x, y, z

$$x^2+2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2+6z+9-9-5=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2-1-4-9-5=0$$

3

$$\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=19}$$

3

وهي كرة مركزها $(-1,2,-3)$ ونصف قطرها $\sqrt{19}$.

3) نحسب المشتقات الجزئية للسطح S :

$$\left.\begin{aligned} S'_x &= 2x+2 \\ S'_y &= 2y-4 \\ S'_z &= 2z+6 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{عند } M_0(-1,1,2)} \begin{cases} S'_{x_0} = 2(-1)+2 = 0 \\ S'_{y_0} = 2(1)-4 = -2 \\ S'_{z_0} = 2(2)+6 = 10 \end{cases}$$

6

معادلة المستوي المماس عند M_0 :

$$\boxed{S'_{x_0}(x-x_0)+S'_{y_0}(y-y_0)+S'_{z_0}(z-z_0)=0}$$

5

$$0(x+1)-2(y-1)+10(z-2)=0$$

$$-2y+10z-18=0 \Rightarrow \boxed{y-5z+9=0}$$

2

وهي معادلة المستوي المماس لـ S عند M_0 .

معادلتي المستقيم الناظم عند M_0

$$\boxed{\frac{x-x_0}{S'_{x_0}}=\frac{y-y_0}{S'_{y_0}}=\frac{z-z_0}{S'_{z_0}}}$$

5

$$\left.\begin{aligned} & x+1=0 \\ & \frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 10y+2z-14=0 \Rightarrow 5y+z-7=0 \end{cases}$$

2

وهي معادلتي المستقيم الناظم عند M_0 .

جامعة طرطوس
كلية العــلــوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء–السنة الأولى
الدورة الفصلية الثانية 2023 -2024

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (55 درجة):

1) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين التاليين:

$$P_1 = -x + 3y - 2z - 1 = 0$$
$$P_2 = 2x + y - 3z - 5 = 0$$

2) أوجد معادلة المستوي الذي يحوي المستقيمين:

$$D_1 : \ x = 1 - 2\lambda \ , \ y = 3\lambda \ , \ z = -3 + 3\lambda$$
$$D_2 : \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{3}$$

3) أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين :

$$D_1 : \begin{cases} P_1 = x - y + z = 0 \\ p_2 = x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$
$$D_2 : \begin{cases} P_3 = 2x + y - 1 = 0 \\ p_4 = y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

والموازي للمتجه $\vec{V}(1, 5, -3)$

السؤال الثاني (35 درجة):

1) ليكن لدينا المنحني المعطى بالشكل التالي:

$$C : \begin{cases} x = t e^{t+1} \\ y = 2e^{t+1} \\ z = e^{t^3+1} \end{cases}$$

أوجد معادلات المستوي الناظم و المستقيم المماس للمنحن C **في النقطة الموافقة لـ** $t = -1$

1) ما نوع المجسم الذي تمثله المعادلة:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z - 10 = 0$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب السنة الأولى فيزياء

السؤال الأول (55 درجة) (20-15-20)

1) أوجد معادلتي المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1 = -x+3y-2z-1=0$$
$$P_2 = 2x+y-3z-5=0$$

2) اكتب معادلة المستوي الذي يحوي المستقيمين :

$$D_1 : \quad x=1-2\lambda \ , \ y=3\lambda \ , \ z=-3+3\lambda$$
$$D_2 : \quad \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{3}$$

3) أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين :

$$D_1 : \begin{cases} P_1 = x-y+z=0 \\ P_2 = x-2z-2=0 \end{cases}$$
$$D_2 : \begin{cases} P_3 = 2x+y-1=0 \\ P_4 = y+z-4=0 \end{cases}$$

والموازي للشعاع $\vec{v}(1,5,-3)$.

الحل : (20 درجة)

1) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف ؛

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{w}_1|}=\frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{w}_2|}$$ حيث $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ ناظمي P_1, P_2

5

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{-x+3y-2z-1}{\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}}=\pm\frac{2x+y-3z-5}{\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}}$$

2

$$-x+3y-2z-1=\pm(2x+y-3z-5)$$

لنوجد الجداء السلمي لناظمي المستويين P_1, P_2

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = -2+3+6 = 7 > 0$$ 3

$\oplus$ توافق المستوي المنصف الخارجي

2 $\ominus$ توافق المستوي المنصف الداخلي 2

$$-x+3y-2z-1=2x+y-3z-5$$

$\boxed{-3x+2y+z+4=0}$ 3 وهو المستوي المنصف الخارجي

$$-x+3y-2z-1=-2x-y+3z+5$$

$\boxed{x+4y-5z-6=0}$ 3 وهو المستوي المنصف الداخلي

2) المستقيمان D_1 و D_2 متوازيان $\vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{v}(-2,3,3)$

(15 درجة)

معادلة المستوي المار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والعامد لـ $\vec{w}(a,b,c)$:

$\boxed{P\equiv a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$ 5

من معادلة المستقيم D_1 لدينا $M_1(1,0,-3)\in D_1$ وهي تنتمي إلى P وتحقق معادلته

$\boxed{P: a(x-1)+b(y-0)+c(z+3)=0}$ (1) 2

لدينا من معادلة المستقيم D_2 النقطة $M_2(2,-1,1)\in D_2$ وهي تنتمي إلى P

$\Rightarrow a(2-1)+b(-1)+c(1+3)=0 \Rightarrow \boxed{a-b+4c=0}$ (2) 2

ولدينا $\vec{v}$ شعاع توجيه المستقيمين يعامد الناظم $\vec{w}(a,b,c)$ للمستوي P $\Leftarrow$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow \boxed{-2a+3b+3c=0}$ (3) 2

من (2) $\boxed{b=a+4c}$ (4) نعوض في (3)

$$-2a+3(a+4c)+3c=0 \Rightarrow a+12c+3c=0 \Rightarrow a+15c=0$$

$\Rightarrow \boxed{a=-15c}$ (5)

نعوض (5) في (4) $\Rightarrow$ $b=-15c+4c \Rightarrow \boxed{b=-11c}$ (6) 2

نعوض (5) و(6) في (1)

$$-15c(x-1)-11c(y-0)+c(z+3)=0$$

$c\neq 0$ نقسم على c : وهي معادلة المستوي المطلوب 2

$\boxed{P=-15x-11y+z+18=0}$

طريقة أخرى :

$$P = a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$ 5

نأخذ نقطة من D_1 ولتكن $M_1(1,0,-3)$ ونقطة $M_2(2,-1,1)$ من D_2 2

فيكون :

$$\vec{w}(a,b,c)=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 4\\ -2 & 3 & 3\end{vmatrix}=-15\vec{i}-11\vec{j}+\vec{k}$$ 3

نأخذ M_1 إما M_1 أو M_2 : 3

$$-15(x-1)-11(y-0)+1(z+3)=0$$

$$\boxed{P = -15x-11y+z+18=0}$$ وهي معادلة المستوي المطلوب 2

نوجد حزمة المستويات المارة بـ D_1 : 3 (ex>20)

$$P_1+\lambda P_2=0 \Rightarrow (1+\lambda)x-y+(1-2\lambda)z-2\lambda=0$$ 3 $\vec{N}_\lambda(1+\lambda,-1,1-2\lambda)$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}(1,5,-3)$

$$\Rightarrow \vec{v}\perp\vec{N}_\lambda \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{N}_\lambda=0 \Rightarrow 1(1+\lambda)-5-3(1-2\lambda)=0$$

$$1+\lambda-5-3+6\lambda=0 \Rightarrow 7\lambda=7 \Rightarrow \boxed{\lambda=1}$$ 2

نعوض في معادلة الحزمة : 2

$$\boxed{P_1 = 2x-y-z-2=0} \quad (1)$$

نوجد حزمة المستويات المارة بـ D_2 :

$$P_3+\lambda P_4=0 \Rightarrow 2x+(1+\lambda)y+\lambda z-1-4\lambda=0$$ 3 $\vec{N}_\lambda(2,1+\lambda,\lambda)$ 3

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}(1,5,-3)$

$$\vec{v}\perp\vec{N}_\lambda \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{N}_\lambda=0 \Rightarrow 2+5(1+\lambda)-3\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda+7=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{-7}{2}}$$ 2

نعوض في معادلة الحزمة :

$$\boxed{P_2 = 2x-\frac{5}{2}y-\frac{7}{2}z+13=0}$$

$$\boxed{P_2 = 4x-5y-7z+26=0} \quad (2)$$ 2

أو

تشكل المعادلتان (1) و (2) معادلتي المستقيم المطلوب .

السؤال الثاني: (35 درجة)

1) لدينا المنحني المعين بالمعادلات:

$$C:\begin{cases} x = t\,e^{t+1} \\ y = 2e^{t+1} \\ z = e^{t^3+1} \end{cases}$$

أوجد معادلات المستوي الناظم والمستقيم المماس للمنحني C عند النقطة الموافقة لـ $t=-1$.

2) ما نوع الجسم الذي يمثله السطح:

الحل: 1) لنوجد احداثيات النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ الموافقة لـ $t=-1$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -1\,e^{-1+1} = -1 \\ y_0 &= 2\,e^{-1+1} = 2 \\ z_0 &= e^{(-1)^3+1} = 1 \end{aligned}\right\} M_0(-1, 2, 1) \quad 3$$

لنوجد المشتقات الجزئية:

$$\left.\begin{aligned} x'_t &= e^{t+1} + t\,e^{t+1} \\ y'_t &= 2\,e^{t+1} \\ z'_t &= 3t^2\,e^{t^3+1} \end{aligned}\right\} \quad 3 \quad \xRightarrow{t=-1} \begin{cases} x'_0 = e^{-1+1} + (-1)\,e^{-1+1} = 1-1 = 0 \\ y'_0 = 2\,e^{-1+1} = 2 \\ z'_0 = 3(-1)^2\,e^{(-1)^3+1} = 3 \end{cases} \quad 3$$

معادلتي المستقيم المماس في النقطة $M_0(-1, 2, 1)$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}} \quad 5$$

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3} \Rightarrow 3y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

2 وهي معادلتي المستقيم المماس في النقطة M_0 للمنحني C

- معادلة المستوي الناظم في $M_0(-1,2,1)$

$$\boxed{x'_0(x-x_0)+y'_0(y-y_0)+z'_0(z-z_0)=0}$$ 5

$$0(x+1)+2(y-2)+3(z-1)=0$$

$$\boxed{2y+3z-7=0}$$ وهي معادلة المستوي الناظم لـ C في M_0 2

2) ما نوع الجسم الذي تمثله المعادلة:

$$x^2+y^2+4z^2-8x-6y+12z-10=0$$

$$x^2-8x+y^2-6y+4(z^2+3z)-10=0$$

$$x^2-8x+16-16+y^2-6y+9-9+4\left(z^2+3z+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)-10=0$$

$$(x-4)^2+(y-3)^2+4\left(z+\frac{3}{2}\right)^2-16-9-9-10=0$$ 5

$$(x-4)^2+(y-3)^2+4\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=44$$

$$\boxed{\frac{(x-4)^2}{44}+\frac{(y-3)^2}{44}+\frac{\left(z+\frac{3}{2}\right)^2}{11}=1}$$ 2

معادلة مجسم قطع ناقص مركزه $\left(4,3,-\frac{3}{2}\right)$ وأنصاف أقطاره $\sqrt{44},\sqrt{44},\sqrt{11}$

3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات–السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2023-2024

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (50 درجة):

1) ليكن لدينا المستويين المتقاطعين:

$$P_1 = x - y + z - 2 = 0$$
$$P_2 = y - 2z + 3 = 0$$

والمطلوب:

1-أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين P_1 , P_2.

2-أوجد معادلتي المسقط القائم للفصل المشترك لـ P_1 , P_2 على المستوي:

$$P = 3x - 2y + 2z = 0$$

2) أوجد معادلة الكرة التي تمر من النقطتين $A(5,-2,1)$ و $B(1,0,-1)$ و يكون AB قطراً لها.

السؤال الثاني (40 درجة):

لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية:

$$F(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 6y + 8z + 1 = 0$$

المطلوب:

1) أوجد مركز تناظر هذا السطح.

2) أوجد معادلة المخروط الموجه والمخروط المقارب للسطح $F(x,y,z)$.

3) أوجد معادلة هذا السطح في الإحداثيات الإسطوانية.

4) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس لهذا السطح في النقطة $M(2,-1,0)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

جامعة طرطوس
كلية العــلــوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء–السنة الأولى
الدورة الفصلية الثانية 2023 -2022

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (50 درجة):

1) أوجد أقصر بعد بين المستقيمين:

$$D_1\begin{cases}x-y+z+1=0\\ y-2z+1=0\end{cases}\qquad D_2:\ \frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{2}$$

2) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين التاليين:

$$P_1=6x-3y+3z-7=0$$
$$P_2=-x+2y+z+5=0$$

3) أوجد معادلة الكرة التي مركزها $C\left(3,4,1\right)$ وتمس المستوي:

$$P=6x+6y-7z+2=0$$

ثم أوجد المعادلات التناظرية للمستقيم المار من النقطة C و المعامد للمستوي P .

السؤال الثاني (40 درجة):

ليكن لدينا السطح المعطى بالشكل:

$$F(x,y,z)=3x^2-y^2+z^2+2xy+8x-4z=0$$

والمطلوب:

1) أوجد معادلة هذا السطح بالإحداثيات الكروية.

2) أوجد معادلة المستوي المماس و معادلتي المستقيم الناظم للسطح F في النقطة $M_0\left(-2,1,-1\right)$

3) عين المخروط الموجه والمخروط المقارب للسطح $F(x,y,z)$.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

الهندسة التحليلية - لطلاب الفيزياء س
الدورة الفصلية الثانية 2022-2023

③ ② ①
(12 - 19 - 19)

السؤال الأول (50 درجة)

1) أوجد أقصر بعد بين المستقيمين:

$$D_1 \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad D_2 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$$

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي ومعادلة المستوي المنصف الخارجي لزاوية المستويين التاليين:

$$P_1 = 6x - 3y + 3z - 7 = 0$$
$$P_2 = -x + 2y + z + 5 = 0$$

3) أوجد معادلة الكرة التي مركزها $C(3,4,1)$ وتمس المستوي

$$P = 6x + 6y - 7z + 2 = 0$$

ثم أوجد المعادلات التناظرية للمستقيم المار من النقطة C والعامد للمستوي P.

الحل: 1) نأخذ معادلة حزمة المستويات المارة بـ D_1:

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \Longrightarrow x + (-1+\lambda)y + (1-2\lambda)z + 1 + \lambda = 0 \quad 5$$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ D_2 أي متجه توجيه D_2 $\vec{v}_2(-2,3,2)$ وناظم الحزمة متعامدان ⟸

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{N}_\lambda = 0 \ ; \ \vec{N}_\lambda(1, -1+\lambda, 1-2\lambda) \quad 2$$

$$-2(1) + 3(-1+\lambda) + 2(1-2\lambda) = 0 \Longrightarrow -2 - 3 + 3\lambda + 2 - 4\lambda = 0$$

$$-3 - \lambda = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = -3} \quad 3$$

نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة:

$$P \equiv \boxed{x - 4y + 7z - 2 = 0}$$

وهي معادلة المستوي المار من P_1 والموازي لـ P_2 3

نختار نقطة من المستقيم D_2 ولتكن $M(-2,1,-1)$

فيكون بعد هذه النقطة $M(-2,1,-1)$ عن المستوي P ⟸

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-2-4-7-2|}{\sqrt{1+(-4)^2+(7)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{1+16+49}} = \frac{15}{\sqrt{66}} \quad 3 \quad 3$$

وهو أقصر بعد بين المستقيمين

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف ⟸

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_1|} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_2|} \quad 5$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{6x-3y+3z-7}{\sqrt{36+9+9}}=\pm\frac{-x+2y+z+5}{\sqrt{1+4+1}}$$ 5

$$\frac{6x-3y+3z-7}{\sqrt{54}}=\pm\frac{-x+2y+z+5}{\sqrt{6}}$$

$$6x-3y+3z-7=\pm3(-x+2y+z+5)$$

$$\vec{\omega_1}\cdot\vec{\omega_2}=6(-1)-3(2)+3(1)=-6-6+3=-9<0$$ 3

(−) توافق المستوي المنصف الخارجي.

(+) توافق المستوي المنصف الداخلي

المستوي المنصف الخارجي: $6x-3y+3z-7=-3(-x+2y+z+5)$

معادلة المستوي المنصف الخارجي $\boxed{3x+3y+6z+8=0}$. 3

المستوي المنصف الداخلي: $6x-3y+3z-7=3(-x+2y+z+5)$

معادلة المستوي المنصف الداخلي $\boxed{9x-9y-22=0}$ 3

3) معادلة الكرة: $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$ 3

التي مركزها $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ونصف قطرها R .

لايجاد نصف القطر نوجد بعد $C(3,4,1)$ عن المستوي P:

$$P: 6x+6y-7z+2=0$$

$$S=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|6(3)+6(4)-7(1)+2|}{\sqrt{36+36+49}}=\frac{|18+24-7+2|}{\sqrt{121}}=\frac{37}{11}$$

معادلة الكرة:

$$\boxed{(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=\left(\frac{37}{11}\right)^2}$$ 3

المعادلات التناظرية للمستقيم المار في C والعامد لـ P

متجه توجيه المستقيم $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ $\boxed{\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}}$ 3

لدينا متجه توجيه المستقيم $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ هو نفسه ناظم المستوي $(6,6,-7)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x-3}{6}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-1}{-7}}$$ 3

السؤال الثاني (40 درجة):

ليكن لدينا السطح المعطى بالشكل:

$$F(x,y,z)=3x^2-y^2+z^2+2xy+8x-4z=0$$

والمطلوب:

1) أوجد معادلة هذا السطح بالإحداثيات الكروية.

2) أوجد معادلتي المستوي المماس ومعادلة المستقيم الناظم للسطح F في النقطة $M_0(-2,1,-1)$

3) عين المخروط الموجه والمخروط المقارب للسطح F.

الحل:

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما في المستوي المماس للسطح F في النقطة $M_0(-2,1,-1)$ فمعادلة المستوي المماس في M_0 هي:

$$\boxed{F'_{x_0}(x-x_0)+F'_{y_0}(y-y_0)+F'_{z_0}(z-z_0)=0}$$ 5

حيث $\vec{N}(F'_{x_0},F'_{y_0},F'_{z_0})$ هو ناظم المستوي

$$\left.\begin{aligned}F'_x&=6x+2y+8\\F'_y&=-2y+2x\\F'_z&=2z-4\end{aligned}\right\} \xrightarrow[M_0(-2,1,-1)]{\text{عند } M_0} \begin{aligned}F'_{x_0}&=6(-2)+2(1)+8=-2\\F'_{y_0}&=-2(1)+2(-2)=-6\\F'_{z_0}&=2(-1)-4=-6\end{aligned}$$

3 3

بالتعويض:

$$-2(x+2)-6(y-1)-6(z+1)=0$$

$$\boxed{-2x-6y-6z-4=0} \quad \text{أو} \quad \boxed{x+3y+3z-2=0}$$ 3

وهي معادلة المستوي المماس للسطح في النقطة M_0.

معادلتي المستقيم الناظم:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_{x_0}}=\frac{y-y_0}{F'_{y_0}}=\frac{z-z_0}{F'_{z_0}}}$$ 5

$$\underset{①}{\frac{x+2}{-2}}=\underset{②}{\frac{y-1}{-6}}=\underset{③}{\frac{z+1}{-6}} \Rightarrow \begin{cases}3x-y+7=0 & \Leftarrow ②,①\\ y-z-2=0 & \Leftarrow ③,②\end{cases}$$

وهي معادلتي المستقيم الناظم للسطح في النقطة M_0. 3

(1

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$ 3

نعوض في معادلة السطح

$$\boxed{3r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + 8r\sin\theta\cos\varphi - 4r\cos\theta = 0}$$ 3

3) المخروط الموجه :

$$\boxed{F' = 3x^2 - y^2 + z^2 + 2xy = 0}$$ 3

لإيجاد المخروط المقارب نوجد مركز تناظر السطح F

$$F'_{x_0} = 6x_0 + 2y_0 + 8 = 0$$
$$F'_{y_0} = -2y_0 + 2x_0 = 0$$
$$F'_{z_0} = 2z_0 - 4 = 0$$ 3

بحل هذه الجملة نجد $x_0 = -1$ ، $y_0 = -1$ ، $z_0 = 2$ وبالتالي مركز تناظره $(-1,-1,2)$

نجري انسحاب للمخروط الموجه بحيث تنتقل ذروته إلى مركز تناظر السطح

أي نبدل كل x بـ $x - x_0$ وكل y بـ $y - y_0$ وكل z بـ $z - z_0$ في معادلة المخروط الموجه

أي نبدل كل x بـ $x+1$ ، كل y بـ $y+1$ وكل z بـ $z-2$ في F'. 3

$$3(x+1)^2 - (y+1)^2 + (z-2)^2 + 2(x+1)(y+1) = 0$$
$$3(x^2+2x+1) - (y^2+2y+1) + (z^2-4z+4) + 2xy + 2x + 2y + 2 = 0$$
$$\boxed{3x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 8x - 4z + 8 = 0}$$ 3

وهي معادلة المخروط المقارب

جامعة طرطوس
كلية العلــوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء–السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2023 -2022

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (50 درجة):

1) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المحدد بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 = x - y + z + 1 = 0$$
$$P_2 = y - 2z + 1 = 0$$

2) أوجد البعد بين المستويين باستخدام المعادلة الناظمية :

$$P_1 = 6x - 3y + 3z - 7 = 0$$
$$P_2 = 2x - y + z + 5 = 0$$

ثم بين وضع كل من النقطتين $A\left(-1,3,1\right)$ **و** $B\left(0,-1,-6\right)$ **بالنسبة للمستوي** P_2 .

3) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم :

$$D\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ -x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

على المستوي xoy . **ثم احسب نظيرة النقطة** $M\left(-2,1,-3\right)$ **بالنسبة للمستوي** xoy .

السؤال الثاني (40 درجة):

ليكن لدينا المنحن المعطى وسيطياً:

$$C\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t\left(t - 2\right) \end{cases}$$

والمطلوب:

1) أوجد المعادلتين الديكارتيتين للمنحن C .

2) أوجد مساقط المنحن C **على المستويات الإحداثية.**

3) أوجد معادلتي المستقيم المماس و معادلة المستوي الناظم للمنحن C **في النقطة الموافقة** $t = -2$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (50 درجة):

1) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المحدد بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 = x - y + z + 1 = 0$$
$$P_2 = y - 2z + 1 = 0$$

2) أوجد البعد بين المستويين باستخدام المعادلة الناظمية:

$$P_1 = 6x - 3y + 3z - 7 = 0$$
$$P_2 = 2x - y + z + 5 = 0$$

ثم بين وضع كل من النقطتين $A(-1,3,1)$ و $B(0,-1,-6)$ بالنسبة لـ P_2.

3) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم:

$$D \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ -x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

على المستوي xoy

ثم احسب نظيرة النقطة $M(-2,1,-3)$ بالنسبة للمستوي xoy.

الحل: 1) المعادلات الوسيطية لمستقيم مار بالنقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ومواز للشعاع $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$D \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

3

لنوجد شعاع توجيه D $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$\vec{v} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

3

لنوجد نقطة ما من هذا المستقيم: نفرض $\boxed{y=0}$ $\Leftarrow$ في P_2

$-2z = -1$ $\Leftarrow$ $\boxed{z = \frac{1}{2}}$ نعوض في P_1 $\Leftarrow$ $\boxed{x = \frac{-3}{2}}$

$$M_0\left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

3

نعوض M_0 و $\vec{v}$ في المعادلات الوسيطية.

$$D \begin{cases} x = \frac{-3}{2} + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \frac{1}{2} + \lambda \end{cases}$$

2) المعادلة الناظمية لـ P_1 : $|\vec{\omega}_1| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$$\frac{6}{3\sqrt{6}}x - \frac{3}{3\sqrt{6}}y + \frac{3}{3\sqrt{6}}z - \frac{7}{3\sqrt{6}} = 0$$ 3

و $h_1 = \frac{7}{3\sqrt{6}}$ وهو بعد مبدأ الاحداثيات عن P_1 .

نوجد المعادلة الناظمية لـ P_2 : $|\vec{\omega}_2| = \sqrt{6}$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z + \frac{5}{\sqrt{6}} = 0$$ 3

و $h_2 = \frac{-5}{\sqrt{6}}$ وهو بعد مبدأ الاحداثيات عن P_2 .

نلاحظ أن h_1 ، h_2 من إشارتين مختلفتين أي أن مبدأ الاحداثيات تقع بين المستويين P_1 ، P_2 $\Leftarrow$ لايجاد البعد بين المستويين نجمع h_1 ، h_2

$$d = h_1 + h_2 = \frac{7}{3\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{22}{3\sqrt{6}}$$ 3

نوجد قوة كل من النقطتين بالنسبة لـ P_2 :

$$P_2(A) = 2(-1) - 3 + 1 + 5 = 1 > 0$$ 3

والنقطة $A(-1,3,1)$ تقع فوق المستوي .

$$P_2(B) = 2(0) - (-1) - 6 + 5 = 0 \Longrightarrow B \in P_2$$ 3

النقطة $B(0,-1,-6)$ تقع على المستوي P_2

(3) لنوجد حزمة المستويات المارة من D :

$$P_1+\lambda P_2 = (2-\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z-1+2\lambda=0 \quad 3$$

ناظم الحزمة : $\vec{\omega}_\lambda(2-\lambda, 1-\lambda, -1+\lambda)$

نختار من هذه الحزمة مستوياً عمودياً على المستوي xoy الذي معادلة $z=0$

وبالتالي ناظم المستوي xoy هو $\vec{N}(0,0,1)$ 3

أي أن الجداء الداخلي لناظم الحزمة مع ناظم المستوي xoy معدوماً $\Leftarrow$ 3

$$\omega_\lambda \cdot \vec{N}=0 \Rightarrow -1+\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=1} \quad 3$$

نعوض قيمة λ بمعادلة الحزمة :

$$P' = (2-1)x+(1-1)y+(-1+1)z-1+2=0$$

$$P' = \boxed{x+1=0} \Rightarrow 3 \qquad D_1\begin{cases} x+1=0 \\ z=0 \end{cases}$$ وهي معادلة المسقط القائم على xoy 3

- نظيرة النقطة $M(-2,1,-3)$ بالنسبة للمستوي xoy : $\boxed{z=0}$

لتكن $M_1(x_0,y_0,z_0)$ هي نظيرة M بالنسبة للمستوي $z=0$ الذي ناظمه $\vec{N}(0,0,1)$

وبالتالي $\vec{MM_1}$ // ناظم المستوي xoy وبالتالي $\vec{N} /\!/ \vec{MM_1}$

$$\left.\begin{array}{l} x_0+2=0 \Rightarrow \boxed{x_0=-2} \\ y_0-1=0 \Rightarrow \boxed{y_0=1} \end{array}\right\} \Leftarrow \frac{x_0+2}{0}=\frac{y_0-1}{0}=\frac{z_0+3}{1}=\lambda \quad 3$$

$$z_0=\lambda-3$$

إن منتصف $\vec{MM_1}$ 3 هو النقطة $M_2\left(\frac{x_0-2}{2}, \frac{y_0+1}{2}, \frac{z_0-3}{2}\right) \in$ للمستوي xoy

$\Rightarrow$ تحقق معادلته $M_2 \Rightarrow \frac{z_0-3}{2}=0 \Rightarrow \boxed{z_0=3}$

إذن نظيرة M هو $M_1(-2,1,3)$ 2

- يمكن للطالب قول مباشرة أن نظيرة M بالنسبة للمستوي xoy بتغيير فقط المركبة z بإشارة معاكسة) $\Leftarrow M_1(-2,1,3)$ فيأخذ (8)

السؤال الثاني (40 درجة)

لتكن لدينا المنحني المعطى وسيطياً:

$$C:\begin{cases} x=2t+1 & (1)\\ y=t-1 & (2)\\ z=t(t-2) & (3)\end{cases}$$

والمطلوب:

1) أوجد المعادلتين الديكارتيتين للمنحني C.

2) عين مسقط المنحني C على المستويات الإحداثية.

3) أوجد معادلات المستوي الناظم والمستقيم المماس للمنحني C في النقطة الموافقة $t=-2$.

الحل: 1) من (2) $y=t-1 \Leftarrow \boxed{t=y+1}$ نعوض في (1) و (3):

نعوض في (1) $x=2(y+1)+1 \Rightarrow x=2y+3$

نعوض في (3) $z=(y+1)(y+1-2) \Rightarrow z=(y+1)(y-1)$

$z=y^2-1$

المعادلتين الديكارتيتين:

$$C:\begin{cases} x-2y-3=0\\ z-y^2+1=0\end{cases}$$

4

2) مسقط C على المستوي xoy: نحذف الزمن من (1) و (2)

من (2) $\boxed{t=y+1}$ نعوض في (1)

$x=2(y+1)+1$

مسقط C على المستوي xoy $\boxed{x-2y-3=0}$ 3

• مسقط C على المستوي yoz: نحذف الزمن بين (2) و (3)

من (2) ، $\boxed{t=y+1}$ نعوض في (3): $\boxed{z-y^2+1=0}$ 3

وهو مسقط C على المستوي yoz

• مسقط C على المستوي xOz : نحذف الزمن بين (1) و (3)

من (1) $x=2t+1 \Rightarrow 2t=x-1 \Rightarrow \boxed{t=\frac{x-1}{2}}$ نعوض في (3)

$$z=\frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2}-2\right)=\frac{(x-1)}{2}\left(\frac{x-5}{2}\right)=\frac{x^2-6x+5}{2}$$

$\boxed{2z=x^2-6x+5}$ 3 مسقط C على المستوي xOz

3) لنوجد احداثيات نقطة التماس الموافقة $t=-2$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=(2t+1)_{t=-2}=-4+1=-3 \\ y_0=(t-1)_{t=-2}=-3 \\ z_0=t(t-2)_{t=-2}=-2(-2-2)=+8 \end{array}\right\} M_0(-3,-3,8)$$ 3

لنوجد المشتقات الجزئية :

$$\left.\begin{array}{l} x'_t=2 \\ y'_t=1 \\ z'_t=2t-2 \end{array}\right\} \xRightarrow{t=-2} \left\{\begin{array}{l} x'_0=2 \\ y'_0=1 \\ z'_0=-6 \end{array}\right.$$ 3 3

معادلتي المستقيم المماس في $M_0(-3,-3,8)$:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'_0}=\frac{y-y_0}{y'_0}=\frac{z-z_0}{z'_0}}$$ 6

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-8}{-6} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3=2y+6 \Rightarrow \\ -6y-18=z-8 \Rightarrow \end{array}\right. D\left\{\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ -6y-z-10=0 \end{array}\right.$$

وهي معادلتي المستقيم المماس في النقطة M_0 . 3

معادلة المستوى الناظم في النقطة $M_3(-3,-3,8)$

$$\boxed{x'_0(x-x_3)+y'_0(y-y_3)+z'_0(z-z_3)=0}$$ 6

$$2(x+3)+(y+3)-6(z-8)=0$$

$$\boxed{2x+y-6z+57=0}$$ 3 وهي معادلة المستوى الناظم.

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء–السنة الأولى
الدورة الفصلية الثانية 2021- 2022

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (50 درجة):

1) أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(3,0,-1)$ و المعامد للمستقيم :

$$D\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

2) أوجد معادلتي المستوي المنصف الداخلي و الخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1 = -x+3y-2z-1=0$$
$$P_2 = 2x+y-3z-5=0$$

3) اكتب معادلة المستوي الذي يحوي المستقيمين:

$$D_1 : \quad x = 1-2\lambda \quad , \quad y = 3\lambda \quad , \quad z = -3+3\lambda$$
$$D_2 : \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{3}$$

السؤال الثاني (40 درجة):

لدينا سطح معطى بالعلاقة التالية:

$$S(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-5=0$$

والمطلوب:

1) ما نوع المجسم الذي يمثله السطح S .

2) أوجد معادلة هذا السطح في الإحداثيات الكروية .

3)أوجد معادلتي المستقيم الناظم و معادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $M(-1,1,2)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

[redacted]

السؤال الأول (50 درجة)

1) أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $M(3,0,-1)$ والمعامد للمستقيم:

$$D\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

2) أوجد معادلتي المستوي المنصف الداخلي والخارجي للزاوية بين المستويين:

$$P_1 \equiv -x+3y-2z-1=0$$
$$P_2 \equiv 2x+y-3z-5=0$$

3) أوجد معادلة المستوي الذي يحوي المستقيمين:

$$D_1 : \quad x=-2\lambda+1 \quad , \quad y=+3\lambda \quad , \quad z=2\lambda-3$$

$$D_2 : \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{+3} = \frac{z-1}{3}$$

الحل: 1) معادلة المستوي المار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والمعامد للمتجه $\vec{w}(a,b,c)$ هي:

$$\boxed{P \equiv a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0} \quad 5$$

$$P \equiv a(x-3)+by+c(z+1)=0 \quad 3 \Leftarrow M_0(3,0,-1)$$

بما أن المستوي P معامد للمستقيم D وبالتالي متجه توجيه D $\vec{v}(-1,-2,1)$ هو ناظم المستوي P أي $\vec{w}=\vec{v}(-1,-2,1) \Rightarrow$ 3

معادلة المستوي المطلوب:

$$P \equiv -1(x-3)-2y+1(z+1)=0$$

$$\boxed{P \equiv -x-2y+z+4=0} \quad 3$$

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف $\Leftarrow$

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{w}_1|} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{w}_2|} \quad 5$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{-x+3y-2z-1}{\sqrt{1+9+4}} = \pm\frac{2x+y-3z-5}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$\frac{-x+3y-2z-1}{\sqrt{14}} = \pm\frac{(2x+y-3z-5)}{\sqrt{14}}$$ 3

لنوجد الجداء السلمي لناظمي المستويين P_1, P_2 :

$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2} = -1(2)+3(1)-2(-3) = -2+3+6 = 7 > 0$ 3 2

$(-)$ توافق المستوي المنصف الداخلي.

$(+)$ توافق المستوي المنصف الخارجي. 2

$$-x+3y-2z-1 = -(2x+y-3z-5)$$
$$-x+2x+3y+y-2z-3z-1-5=0$$
$$\boxed{x+4y-5z-6=0}$$ 3 وهو المستوي المنصف الداخلي

$$-x+3y-2z-1 = 2x+y-3z-5$$
$$-x-2x+3y-y-2z+3z-1+5=0$$
$$\boxed{-3x+2y+z+4=0}$$ 3 وهو المستوي المنصف الخارجي

3) المستقيمات D_1, D_2 متوازيان

$\vec{v} = \vec{v_2}(2,+3,3) = \vec{v_1}(-2,+3,3)$

معادلة المستوي المار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والعامد له $\vec{w}(a,b,c)$ هي:

$$\boxed{P \equiv a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$ 5

من معادلة المستقيم D_1 لدينا : $D_1 \ni M_1(1,0,-3)$ التي تنتمي إلى P :

$$\boxed{P = a(x-1)+b(y-0)+c(z+3)=0} \quad (1)$$ 2

لدينا من معادلة المستقيم D_2 النقطة $M_2(+2,-1,1) \in D_2$ التي تنتمي إلى P $\Leftarrow$

$$a(2-1)+b(-1)+c(1+3)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{a-b+4c=0} \quad (2)$$

لدينا $\vec{v}$ شعاع توجيه المستقيمين يعامد ناظم المستوي $\vec{w}(a,b,c)$ $\Leftarrow$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow \boxed{-2a+3b+3c=0} \quad (3)$$ 2

من (2): $\boxed{b=a+4c}$ (4) نعوض في (3):

$$-2a+3a+12c+3c=0 \Rightarrow a+15c=0 \Rightarrow \boxed{a=-15c} \ (5)$$

2

نعوض (5) في (4):

$$b=-15c+4c \Rightarrow \boxed{b=-11c} \ (6)$$

2

نعوض (5) و (6) في (1):

$$-15c(x-1)-11c(y-0)+c(z+3)=0$$

$c \neq 0$ نقسم على c:

$$-15(x-1)-11y+z+3=0$$

$$\boxed{P \equiv -15x-11y+z+18=0}$$ 2 وهي معادلة المستوي المطلوب

طريقة أخرى

$$P \equiv a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$ 5

نأخذ $M_1(1,0,-3)$ من D_1 و $M_2(2,-1,1)$ من D_2 فيكون 2

$$\vec{w}(a,b,c)=\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -15\vec{i}-11\vec{j}+\vec{k}$$ 3

نأخذ M_0 إما M_1 أو M_2:

نعوض

$$-15(x-1)-11(y-0)+1(z+3)=0$$ 3

$$-15x-11y+z+15+3=0$$

$$\boxed{P \equiv -15x-11y+z+18=0}$$ 2 وهي معادلة المستوي المطلوب

السؤال الثاني (٤٠ درجة)

لدينا سطح معادلته :

$$S = x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-5=0$$

والمطلوب :

1) ما نوع الجسم الذي يمثله هذا السطح .

2) أوجد معادلة هذا السطح في الإحداثيات الكروية .

3) أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلتي المستقيم الناظم للسطح في النقطة $M(-1,1,2)$.

الحل : 1)

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-5=0$$

$$x^2+2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2+6z+9-9-5=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2-1-4-9-5=0$$

$$\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=19}$$ 3

معادلة كرة مركزها $(-1,2,-3)$ ونصف قطرها $\sqrt{19}$ 3

2)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$ 6

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+r^2\cos^2\theta+2r\sin\theta\cos\varphi-4r\sin\theta\sin\varphi$$
$$+6r\cos\theta-5=0$$

$$r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+r^2\cos^2\theta+2r\sin\theta(\cos\varphi-2\sin\varphi)+6r\cos\theta-5=0$$

$$r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta+2r\sin\theta(\cos\varphi-2\sin\varphi)+6r\cos\theta-5=0$$

$$\boxed{r^2+2r\sin\theta(\cos\varphi-2\sin\varphi)+6r\cos\theta-5=0}$$ 3

وهي معادلة السطح S في الاحداثيات الكروية .

3) نحسب المشتقات الجزئية للسطح S :

$$S'_x = 2x+2,\quad S'_y = 2y-4,\quad S'_z = 2z+6 \xrightarrow[\text{التماس } M(-1,1,2)]{\text{عند نقطة}} \begin{cases} S'_{x_0} = 2(-1)+2 = 0 \\ S'_{y_0} = 2(1)-4 = -2 \\ S'_{z_0} = 2(2)+6 = 10 \end{cases}$$

3 3

معادلة المستوي المماس عند M_0 :

$$\boxed{F'_{x_0}(x-x_0) + F'_{y_0}(y-y_0) + F'_{z_0}(z-z_0) = 0}$$

6

$$0(x+1) - 2(y-1) + 10(z-2) = 0$$

$$\boxed{-2y+10z-18=0} \Rightarrow \boxed{y-5z+9=0}$$

3

وهي معادلة المستوي المماس عند $M_0(-1,1,2)$

معادلتي المستقيم الناظم عند M_0 :

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y-y_0}{F'_{y_0}} = \frac{z-z_0}{F'_{z_0}}}$$

6

$$\begin{cases} x+1=0 \\ \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 10y+2z-14=0 \end{cases}$$

4

معادلتي المستقيم الناظم عند M_0

جامعة طرطوس
كلية العـلـوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء–السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2022- 2021

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (40 درجة):

1) اكتب معادلتي المستقيم المار من مبدأ الاحداثيات و الموازي للمستقيم

$$D\begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0 \\ 3x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

2) أوجد معادلة المستوي المار بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 = 2x + y - z + 1 = 0$$
$$P_2 = 6x + y + 2z + 1 = 0$$

والمعامد للمستوي $P = x + 2y - z + 1 = 0$

السؤال الثاني (50 درجة):

1) لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية:

$$S(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 3z^2 - 8x - 6y + 24z - 9 = 0$$

ما نوع المجسم الذي يمثله هذا السطح ثم أوجد معادلة هذا السطح في الإحداثيات الكروية .

2) ليكن لدينا المنحن المعطى وسيطياً:

$$C\begin{cases} x = -t^2 + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t^2 \end{cases}$$

والمطلوب:

a) أوجد معادلتي المنحن C **ديكارتياً.**

b) أوجد مساقط المنحن C **على المستويات الإحداثية.**

c) أوجد معادلتي المستقيم المماس و معادلة المستوي الناظم للمنحن C **في النقطة الموافقة** $t = -1$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محـ

الدورة الفصلية الأولى 2021-2022

السؤال الأول (40 درجة):

1) اكتب معادلتي المستقيم المار من مبدأ الاحداثيات والموازي للمستقيم

$$D\begin{cases} x-y+4z-1=0 \\ 3x+y-3z-2=0 \end{cases}$$

الحل: معادلتي المستقيم

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}}$$ 6

لنوجد متجه توجيه هذا المستقيم $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$.

متجه توجيه هذا المستقيم له نفس منحى D :

$$\vec{v}=\vec{N_1}\times\vec{N_2}\ ,\quad \vec{N_1}(1,-1,4)\ ,\ \vec{N_2}(3,1,-3)$$

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -3\end{vmatrix}=(3-4)\vec{i}+(12+3)\vec{j}+(1+3)\vec{k}$$

$$\vec{v}=-\vec{i}+15\vec{j}+4\vec{k}$$ 6 , $O(0,0,0)$ مبدأ الاحداثيات

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-0}{15}=\frac{z-0}{4}$$ 3

$$\frac{x}{-1}=\frac{y}{15}=\frac{z}{4}\Longrightarrow\begin{cases}15x+y=0\\ 4y-15z=0\end{cases}$$ 6

2) أوجد معادلة المستوي المار بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1=2x+y-z+1=0$$
$$P_2=6x+y+2z+1=0$$

والعامد للمستوي: $P=x+2y-z+1=0$

الحل: معادلة المستوي المطلوب هو إحدى معادلات حزمة المستويات المارة بهذا الفصل المشترك:

$$P_1+\lambda P_2=0 \Rightarrow$$

6

$$(2x+y-z+1)+\lambda(6x+y+2z+1)=0$$

3

$$(2+6\lambda)x+(1+\lambda)y+(-1+2\lambda)z+(1+\lambda)=0$$

ناظم الحزمة: $\vec{\omega}_\lambda(2+6\lambda\ ,\ 1+\lambda\ ,\ -1+2\lambda)$

نختار من هذه الحزمة معادلة المستوي المعامد للمستوي:

$$P=x+2y-z+1=0$$

ناظمه $\vec{N}(1,2,-1)$

$$\vec{\omega}_\lambda\cdot\vec{N}=0 \Longrightarrow (2+6\lambda)+2(1+\lambda)-(-1+2\lambda)=0$$

6

$$2+6\lambda+2+2\lambda+1-2\lambda=0 \Longrightarrow 6\lambda+5=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{-5}{6}}$$

نعوض في معادلة الحزمة:

1

$$(2-5)x+\left(1-\frac{5}{6}\right)y+\left(-1+2\left(\frac{-5}{6}\right)\right)z+\left(1-\frac{5}{6}\right)=0$$

$$-3x+\frac{1}{6}y-\frac{16}{6}z+\frac{1}{6}=0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{-18x+y-16z+1=0}$$

3

وهي معادلة المستوي المطلوب.

السؤال الثاني

1) لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية :

$$s(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 3z^2 - 8x - 6y + 24z - 9 = 0$$

ما نوع الجسم الذي يمثله هذا السطح ثم أوجد معادلة هذا السطح في الاحداثيات الكروية

2) لتكن لدينا المنحني المعطى وسيطياً :

$$c\begin{cases} x = -t^2+1 \\ y = t-1 \\ z = t^2 \end{cases}$$

والمطلوب a) أوجد معادلتي المنحني ديكارتياً .

b) أوجد مساقط المنحني c على المستويات الإحداثية .

c) أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني c في النقطة الموافقة t=-1 .

الحل:

1) 3

$$2(x^2-4x+4-4)-(y^2+6y+9-9)-3(z^2-8z+16-16)-9=0$$

$$2(x-2)^2-(y+3)^2-3(z-4)^2-8+9+48-9=0$$

$$2(x-2)^2-(y+3)^2-3(z-4)^2=-40$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{20}-\frac{(y+3)^2}{40}-\frac{(z-4)^2}{\frac{40}{3}}=-1}$$ 3

مجسم قطع زائد ذو طية واحدة (فرع واحد) مركزه $(2,-3,4)$ ومحاوره $\begin{cases} a=\sqrt{20} \\ b=\sqrt{40} \\ c=\sqrt{\frac{40}{3}} \end{cases}$ 3

لنوجد معادلة هذا السطح في الاحداثيات الكروية :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$ 3

نعوض في معادلة السطح :

$$2r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi - 3r^2\cos^2\theta - 8r\sin\theta\cos\varphi - 6r\sin\theta\sin\varphi + 24r\cos\theta - 9 = 0$$ 3

2) a) من $y=t-1$ 3 $\Longleftarrow$ $\boxed{t=y+1}$ نعوض في x و z

معادلتي المنحني c ديكارتياً $\begin{cases} x = -(y+1)^2+1 \\ z = (y+1)^2 \end{cases}$ 3

b) المسقط على المستوي xoy نحذف الوسيط t بين x و y : 3

$$t = y+1 \xRightarrow{\text{نعوض في } x} x = -(y+1)^2+1 \Rightarrow \boxed{x-1 = -(y+1)^2}$$ 3

معادلة قطع مكافئ .

المسقط على yoz ، $y = t - 1 \Leftarrow$ $t = y+1$ نعوض في z

معادلة قطع مكافئ $\boxed{z = (y+1)^2}$ 3

المسقط على المستوي $xoz \Leftarrow$ 3 $\boxed{x = -z + 1}$ المسقط هو مستقيم.

c) لنوجد احداثيات النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ الموافقة لـ $t = -1$

$x_0 = -(-1)^2 + 1 = 0$, $y_0 = -1 - 1 = -2$, $z = (-1)^2 = 1$, $\boxed{M_0(0, -2, 1)}$ 2

لنوجد المشتقات:

3 $\left.\begin{aligned} x'_t &= -2t \\ y'_t &= 1 \\ z'_t &= 2t \end{aligned}\right\} \xrightarrow{t=-1} \begin{cases} x'_0 = 2 \\ y'_0 = 1 \\ z'_0 = -2 \end{cases}$

معادلتي المستقيم المماس في النقطة M_0 :

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}}$$ 3

$$\frac{x - 0}{2} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 4 \\ -2x = 2z - 2 \end{cases}$$ 3

معادلة المستوي الناظمي في M_0 :

$$\boxed{x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0}$$ 3

$$2(x - 0) + 1(y + 2) - 2(z - 1) = 0$$

$$\boxed{2x + y - 2z + 4 = 0}$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء-السنة الأولى
الدورة الفصلية الثانية 2021- 2020

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (40 درجة):

1) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = -x + 3z + 7 = 0$$
$$P_2 = -x + y + z - 1 = 0$$

2) اكتب معادلة الكرة المارة بالنقاط $M_1(3,1,-3), M_2(-2,4,1), M_3(-5,0,0)$ و **مركزها يقع على المستوي** $P = 2x + y - z + 3 = 0$

السؤال الثاني (50 درجة):

لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية:

$$S(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4x - 8y + 8z - 20 = 0$$

1) ما نوع المجسم الذي يمثله هذا السطح.

2) أوجد مركزتناظرهذا المجسم ثم أوجد المخروط الموجه لهذا السطح.

3) أوجد الانسحاب المناسب لجملة المحاور الاحداثية بحيث تحذف الحدود الخطية من المعادلة السابقة ثم أوجد معادلة السطح في الإحداثيات الجديدة .

4) أوجد معادلتي المستقيم الناظم و معادلة المستوي المماس للسطح S **في النقطة** $A\left(2, 4+2\sqrt{10}, 0\right)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

الدورة الصيفية الثانية 2020-2021

السؤال الأول :

1 أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1 = -x + 3z + 7 = 0$$
$$P_2 = -x + y + z - 1 = 0$$

الحل : لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف وبالتالي :

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$ 5

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{-x+3z+7}{\sqrt{1+9+0}} = \pm \frac{-x+y+z-1}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$\frac{-x+3z+7}{\sqrt{10}} = \pm \frac{-x+y+z-1}{\sqrt{3}}$$ 5

لنأخذ الجداء الداخلي لناظمي المستويين P_1, P_2 :

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = -1(-1)+(0)(1)+3(1) = 1+3 = 4 > 0$$ 3

3 (−) توافق المستوي المنصف الداخلي

3 (+) توافق المستوي المنصف الخارجي

(−) المستوي المنصف الداخلي :

$$\sqrt{3}(-x+3z+7) = -(-x+y+z-1)\sqrt{10}$$
$$-\sqrt{3}\,x+3\sqrt{3}\,z+7\sqrt{3}-\sqrt{10}\,x+\sqrt{10}\,y+\sqrt{10}\,z-\sqrt{10}=0$$ 3
$$\boxed{-(\sqrt{3}+\sqrt{10})x+\sqrt{10}\,y+(3\sqrt{3}+\sqrt{10})z+7\sqrt{3}-\sqrt{10}=0}$$

(+) المستوي المنصف الخارجي :

$$\sqrt{3}(-x+3z+7) = +(-x+y+z-1)\sqrt{10}$$
$$-\sqrt{3}\,x+3\sqrt{3}\,z+7\sqrt{3}+\sqrt{10}\,x-\sqrt{10}\,y-\sqrt{10}\,z+\sqrt{10}=0$$
$$\boxed{(-\sqrt{3}+\sqrt{10})x-\sqrt{10}\,y+(3\sqrt{3}-\sqrt{10})z+7\sqrt{3}+\sqrt{10}=0}$$ 3

2 اكتب معادلة الكرة المارة بالنقاط $M_1(3,1,-3)$ و $M_2(-2,4,1)$ ، $M_3(-5,0,0)$ و مركزها يقع على المستوي $P = 2x+y-z+3=0$

الحل: معادلة الكرة: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ 6

$M_1(3,1,-3) \in$ للكرة $\boxed{-6a-2b+6c+d+19=0}$ (1)

$M_2(-2,4,1) \in$ للكرة $\boxed{4a-8b-2c+d+21=0}$ (2)

$M_3(-5,0,0) \in$ للكرة $\boxed{10a+d+25=0}$ (3)

4

مركز الكرة $C(a,b,c) \in$ المستوي $P \Leftarrow$ $\boxed{2a+b-c+3=0}$ (4)

أربع معادلات بأربع مجاهيل: من (3) $\Leftarrow$ (5) $\boxed{d=-25-10a}$

من (4) $\Leftarrow$ (6) $\boxed{c=2a+b+3}$

نعوض (5) و (6) في (1) و (2) نحصل على المعادلتين

$-a+b+3=0$ (7)

$a+b+1=0$ (8)

بحل (7) و (8) نجد: $\boxed{a=1}$, $\boxed{b=-2}$ نعوض في (5) و (6) $\Leftarrow$

$\boxed{c=3}$, $\boxed{d=-35}$, $\Rightarrow R^2=a^2+b^2+c^2-d=1+4+9+35=49$

$\boxed{x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-35=0}$ 5 $\Rightarrow \boxed{R=7}$

إذا الطالب وضع معادلة الكرة: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

يأخذ 6 .

السؤال الثاني :

لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية :

$$S(x,y,z) = x^2+y^2+4z^2-4x-8y+8z-20=0$$

1) ما نوع الجسم الذي يمثله هذا السطح .
2) أوجد مركز تناظر هذا الجسم ثم أوجد المخروط الموجه لهذا السطح
3) أوجد الانسحاب المناسب لجملة المحاور الاحداثية بحيث تحذف الحدود الخطية من المعادلة السابقة ثم أوجد معادلة السطح في الاحداثيات الجديدة
4) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $A(2, 4+2\sqrt{20}, 0)$

الحل :

1)

$$x^2+y^2+4z^2-4x-8y+8z-20=0$$

$$\underline{x^2-4x+4}-4+\underline{y^2-8y+16}-16+4(\underline{z^2+2z+1}-1)-20=0$$

$$(x-2)^2+(y-4)^2+4(z+1)^2-4-16-4-20=0$$

$$(x-2)^2+(y-4)^2+4(z+1)^2=44$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{44}+\frac{(y-4)^2}{44}+\frac{(z+1)^2}{11}=1}$$

3

يمثل السطح مجسم قطع ناقص مركزه $(2,4,-1)$ وأنصاف أقطاره $a=\sqrt{44}, b=\sqrt{44}, c=\sqrt{11}$

2

2) لنوجد مركز تناظر هذا الجسم :

نفرض مركز تناظر هذا الجسم هو $M_0(x_0,y_0,z_0)$

لنوجد المشتقات الجزئية لمعادلة هذا السطح :

$$f'_{x_0}=2x_0-4=0 \Rightarrow x_0=\frac{4}{2}=2$$
$$f'_{y_0}=2y_0-8=0 \Rightarrow y_0=\frac{8}{2}=4$$
$$f'_{z_0}=8z_0+8=0 \Rightarrow z_0=\frac{-8}{8}=-1$$

$M_0(2,4,-1)$

6

M_0 هو مركز الجسم نفسه .

المخروط الموجه : بإهمال الحدود الخطية والثابتة مقارنة بالحدود المربعية والمستطيلة :

$$\boxed{S' = x^2+y^2+4z^2=0}$$

3

وهو المخروط الموجه .

3) إيجاد الانسحاب الذي يحذف الحدود الخطية من المعادلة السابقة :

$$x = x_0+X$$
$$y = y_0+Y$$
$$z = z_0+Z$$

3

$\Leftarrow$ نعوض في المعادلة $S(x,y,z)$,

$$(x_0+X)^2+(y_0+Y)^2+4(z_0+Z)^2+8(z_0+Z)-4(x_0+X)-8(y_0+Y)-20=0$$

$$x_0^2+2x_0X+X^2+y_0^2+2y_0Y+Y^2+4z_0^2+8z_0Z+4Z^2+8z_0+8Z-4x_0-4X$$
$$-8y_0-8Y-20=0$$

$$X^2+Y^2+4Z^2+(2x_0-4)X+(2y_0-8)Y+(8z_0+8)Z+(x_0^2+y_0^2+4z_0^2+8z_0$$
$$-4x_0-8y_0-20)=0 \quad (*)$$

3

لنوجد الانسحاب الذي يحذف الحدود الخطية

$$2x_0-4=0 \Rightarrow x_0=\frac{4}{2}=2$$
$$2y_0-8=0 \Rightarrow y_0=\frac{8}{2}=4$$
$$8z_0+8=0 \Rightarrow z_0=\frac{-8}{8}=-1$$

$(2, 4, -1)$

3

الانسحاب المطلوب:

$$\left.\begin{aligned} x&=2+X \\ y&=4+Y \\ z&=-1+Z \end{aligned}\right\}$$

(*) لايجاد معادلة السطح في الاحداثيات الجديدة نعوض x_0, y_0, z_0 في العلاقة:

$$X^2+Y^2+4Z^2+(2)^2+(4)^2+4(-1)^2+8(-1)-4(2)-8(4)-20=0$$
$$X^2+Y^2+4Z^2+4+16+4-8-8-32-20=0$$
$$\boxed{X^2+Y^2+4Z^2-44=0}$$

3

وهي معادلة السطح في الاحداثيات الجديدة

4) معادلتي المستقيم الناظم في M_0:

$M(2, 4+2\sqrt{10}, 0)$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_{x_0}}=\frac{y-y_0}{F'_{y_0}}=\frac{z-z_0}{F'_{z_0}}}$$

6

$$\left.\begin{aligned} S'_x&=2x-4 \\ S'_y&=2y-8 \\ S'_z&=8z+8 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} S'_{x_0}&=2(2)-4=0 \\ S'_{y_0}&=2(4+2\sqrt{10})-8=2(2\sqrt{10})=4\sqrt{10} \\ S'_{z_0}&=8(0)+8=8 \end{aligned}$$

6

$$\begin{cases} x-2=0 \\ \dfrac{y-(4+2\sqrt{10})}{4\sqrt{10}}=\dfrac{z}{8} \Rightarrow 8y-8(4+2\sqrt{10})-4\sqrt{10}z=0 \end{cases}$$

معادلتي المستقيم الناظم في M_0:

$$\begin{cases} x=2 \\ 2y-\sqrt{10}z-2(4+2\sqrt{10})=0 \end{cases}$$

3

معادلة المستوى المماس في M_0 :

$$\boxed{F'_{x_0}(x-x_0)+F'_{y_0}(y-y_0)+F'_{z_0}(z-z_0)=0}$$ 6

$$0(x-2)+4\sqrt{10}\left(y-(4+2\sqrt{10})\right)+8(z-0)=0$$

$$\boxed{\sqrt{10}\,y+2z-\sqrt{10}\,(4+2\sqrt{10})=0}$$ 3 وهي معادلة المستوى المماس في M_0

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء-السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2021- 2020

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (60 درجة):

1) اكتب معادلة المستوي العمودي على المستو: $P_1 = 3x - 4y + 9 = 0$

و الذي يمر بفصله المشترك مع المستوي $P_2 = 7x - y - 12z + 16 = 0$

ثم أوجد نظيرة النقطة $M(1,-2,3)$ **بالنسبة للمستو** P_1 .

2) أوجد العمود المشترك للمستقيمين:

$$D_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{-2} = z$$

$$D_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

3) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = -3x + 4z + 6 = 0$$
$$P_2 = -2x + 5y + z - 1 = 0$$

السؤال الثاني (30 درجة):

لدينا السطح المعين بالمعادلات:

$$S\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \lambda \sin\theta \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

أوجد معادلتي المستقيم الناظم و معادلة المستوي المماس للسطح S **في النقطة الموافقة:**

$$\lambda = -1 \ , \ \theta = \frac{\pi}{6}$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

سلم تصحيح مقرر الهندسة التحليلية لطلاب الفيزياء (1) ف 2020-2021

السؤال الأول (60 درجة) (20 - 20 - 20)

1) اكتب معادلة المستوي العمودي على المستوي : $P_1 = 3x - 4y + 9 = 0$

والذي يمر بفصله المشترك مع المستوي $P_2 = 7x - y - 12z + 16 = 0$

ثم أوجد نظيرة النقطة $M(1,-2,3)$ بالنسبة للمستوي P_1.

الحل : لدينا معادلة المستوي المطلوب تحقق معادلة الحزمة المارة من P_1 و P_2 :

$$P = P_1 + \lambda P_2 = 3x - 4y + 9 + \lambda(7x - y - 12z + 16) = 0 \quad 3$$

$$= (3+7\lambda)x - (4+\lambda)y - 12\lambda z + 9 + 16\lambda = 0$$

ناظم الحزمة : $\vec{\omega}_\lambda(3+7\lambda, -(4+\lambda), -12\lambda)$

لدينا المستوي عمودي على P_1 الذي ناظمه $\vec{\omega}_1(3,-4,0) \Leftarrow \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_\lambda$ متعامدان

$$\Rightarrow \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_\lambda = 0 \Rightarrow 3(3+7\lambda) + 4(4+\lambda) = 0$$

$$9 + 21\lambda + 16 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 25\lambda = -25 \quad 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

نعوض في معادلة الحزمة فنحصل على المستوي المطلوب:

$$(3-7)x - (4-1)y + 12z + 9 - 16 = 0$$

$$\boxed{-4x - 3y + 12z - 7 = 0} \quad 2$$

إذا الطالب وضع معادلة المستوي يأخذ 5 درجات

- لنوجد نظيرة $M(1,-2,3)$ بالنسبة لـ P_1 :

بفرض أن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نظيرة النقطة M بالنسبة للمستوي P_1 وبالتالي :

$2 \quad \vec{MM_1} \parallel \vec{\omega} \; ; \; \vec{\omega}(3,-4,0)$ ناظم P_1 ، $\vec{MM_1}(x_1 - 1, y_1 + 2, z_1 - 3)$

$$\frac{x_1 - 1}{3} = \frac{y_1 + 2}{-4} = \frac{z_1 - 3}{0} \xRightarrow{\text{نكتب وسيطياً}} \begin{cases} x_1 = 1 + 3\lambda \\ y_1 = -2 - 4\lambda \\ z_1 = 3 \end{cases} \quad 1 \quad 3$$

نقطة تقاطع $\vec{MM_1}$ مع المستوي هو منتصف $\vec{MM_1}$ ولتكن M_0

$$M_0\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1-2}{2}, \frac{z_1+3}{2}\right) \in P_1 \Longrightarrow$$ تحقق معادلة P_1 ، M_0 3

$$\Rightarrow 3\left(\frac{x_1+1}{2}\right) - 4\left(\frac{y_1-2}{2}\right) + 9 = 0 \Rightarrow 3x_1 + 3 - 4y_1 + 8 + 18 = 0$$

$$\boxed{3x_1 - 4y_1 + 29 = 0} \quad 2 \quad 2$$

نعوض ① في ② :

$3(1+3\lambda)-4(-2-4\lambda)+29=0$

$3+9\lambda+8+16\lambda+29=0 \Rightarrow 25\lambda=-40 \Rightarrow \lambda=\frac{-40}{25}=\frac{-8}{5}$

نعوض في المعادلات ①

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1+3\left(\frac{-8}{5}\right)=1-\frac{24}{5}=\frac{-19}{5} \\ y_1=-2-4\left(\frac{-8}{5}\right)=-2+\frac{32}{5}=\frac{+22}{5} \\ z_1=3 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1\left(\frac{-19}{5}, \frac{22}{5}, 3\right) \quad 3$$

وهي نظيرة M بالنسبة للمستوي P_1

2) أوجد العمود المشترك للمستقيمين :

$D_1: \frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{-2}=z$

$D_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$

الحل :

- شعاع توجيه $\vec{v}_1$ للمستقيم P_1 هو : $\vec{v}_1(-1,-2,1)$

شعاع توجيه المستقيم P_2 هو $\vec{v}_2(2,-3,2)$

لنوجد $\vec{v}=\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

$$\vec{v}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=-\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k} \quad 3$$

- لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة بـ D_1 لذلك نكتب D_1 بشكل تقاطع مستويين :

$$D_1 \begin{cases} -2x+y+7=0 \\ y+2z+3=0 \end{cases}$$

حزمة المستويات المارة بـ D_1 :

$P=P_1+\lambda P_2=-2x+(1+\lambda)y+2\lambda z+7+3\lambda=0 \quad 3$

$\vec{w}_\lambda(-2, 1+\lambda, 2\lambda)$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}(-1,4,7)$

$\vec{w}_\lambda\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow -1(-2)+4(1+\lambda)+7(2\lambda)=0$

$2+4+4\lambda+14\lambda=0 \Rightarrow 18\lambda=-6 \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{-1}{3}} \quad 3$

نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة :

$-2x+\left(1-\frac{1}{3}\right)y-\frac{2}{3}z+7+3\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \Rightarrow \boxed{-2x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z+6=0} \; ① \quad 2$

$$\left.\begin{array}{l} -6x+2y-2z+18=0 \\ -3x+y-z+9=0 \end{array}\right\}$$ أو

أو

- لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة بـ D_2 لذلك نكتب D_2 بشكل تقاطع مستويين :

$$D_2 \begin{cases} 3x+2y+3=0 \\ 2y+3z=0 \end{cases}$$

$$P = P_1+\lambda P_2 = 3x+2(1+\lambda)y+3\lambda z+3=0$$ 3

$$\vec{\omega}_\lambda\,(3,\ 2(1+\lambda),\ 3\lambda)$$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}$ ⟸

$$\vec{\omega}_\lambda \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow$$

$$-1(3)+4(2+2\lambda)+7(3\lambda)=0 \Longrightarrow -3+8+8\lambda+21\lambda=0$$

$$29\lambda+5=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{-5}{29}}$$ 3

نعوض في معادلة الحزمة

$$3x+2\left(1-\frac{5}{29}\right)y+3\left(\frac{-5}{29}\right)z+3=0$$

$$3x+\frac{48}{29}y-\frac{15}{29}z+3=0$$

$$\boxed{87x+48y-15z+87=0}$$ 2 2

وبالتالي فإن معادلتي العمود المشترك لـ D_1 و D_2 هما 1 و 2 1

3) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1 = -3x+4z+6=0$$

$$P_2 = -2x+5y+z-1=0$$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المنصف وبالتالي

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$ 5

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{-3x+4z+6}{\sqrt{9+16+0}} = \pm\frac{(-2x+5y+z-1)}{\sqrt{4+25+1}}$$

$$\frac{-3x+4z+6}{\sqrt{25}} = \pm\frac{-2x+5y+z-1}{\sqrt{30}}$$

$$\frac{-3x+4z+6}{\sqrt{5}} = \pm\frac{-2x+5y+z-1}{\sqrt{6}}$$ 2

لنأخذ الجداء الداخلي لناظمي المستويين P_1 و P_2 :

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = (-3, 0, 4) \cdot (-2, 5, 1) = +6+4 = 10 > 0$$ 3

2 (-) توافق المستوي المنصف الداخلي .

2 (+) توافق المستوي المنصف الخارجي :

(-) المستوي المنصف الداخلي :

3

$$\sqrt{6}(-3x+4z+6) = -\sqrt{5}(-2x+5y+z-1)$$

$$\boxed{(-3\sqrt{6}-2\sqrt{5})x + 5\sqrt{5}\,y + (4\sqrt{6}+\sqrt{5})z + 6\sqrt{6}-\sqrt{5} = 0}$$ المستوي المنصف الداخلي

(+) المستوي المنصف الخارجي :

$$\sqrt{6}(-3x+4z+6) = \sqrt{5}(-2x+5y+z-1)$$

$$\boxed{(-3\sqrt{6}+2\sqrt{5})x - 5\sqrt{5}\,y + (4\sqrt{6}-\sqrt{5})z + 6\sqrt{6}+\sqrt{5} = 0}$$ المستوي المنصف الخارجي 3

السؤال الثاني (30 درجة):

لدينا السطح المعين بالمعادلات:

$$S: x = \cos\theta \quad , \quad y = \lambda \sin\theta \quad , \quad z = 2-\lambda$$

أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة الموافقة: $\lambda=-1$, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

الحل:

لنوجد احداثيات النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_0 = (-1)\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ z_0 = 2-(-1) = 3 \end{array}\right\} M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, 3\right) \quad 3$$

لنحسب المشتقات الجزئية:

$$\left.\begin{array}{l} x'_\lambda = 0 \\ y'_\lambda = \sin\theta \\ z'_\lambda = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{\theta=\frac{\pi}{6} \\ \lambda=-1}]{M_0 \text{ عند}} \left\{\begin{array}{l} x'_{\lambda_0} = 0 \\ y'_{\lambda_0} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ z'_{\lambda_0} = -1 \end{array}\right. \quad \overrightarrow{MT_1}\left(0, \frac{1}{2}, -1\right) \quad 3$$

$$\left.\begin{array}{l} x'_\theta = -\sin\theta \\ y'_\theta = \lambda\cos\theta \\ z'_\theta = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{\theta=\frac{\pi}{6} \\ \lambda=-1}]{M_0 \text{ عند}} \left\{\begin{array}{l} x'_{\theta_0} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ y'_{\theta_0} = (-1)\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ z'_{\theta_0} = 0 \end{array}\right. \quad \overrightarrow{MT_2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0\right) \quad 3$$

لنوجد الناظم:

$$\vec{N} = \overrightarrow{MT_1} \times \overrightarrow{MT_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k} \quad 3$$

معادلة المستوي المماس في M_0 :

$$\boxed{P(x-x_0) + q(y-y_0) + r(z-z_0) = 0} \quad 6$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}(z-3) = 0 \quad 3$$

$$-2\sqrt{3}x + 3 + 2y + 1 + z - 3 = 0 \xRightarrow{\text{نضرب بـ } (4)} \boxed{-2\sqrt{3}x + 2y + z + 1 = 0}$$

معادلتي المستقيم الناظم في النقطة M_0

$$\boxed{\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}}$$ 6

$$\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{z-3}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x+2\sqrt{3}z-6\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \\ y-2z+6+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء–السنة الأولى
الدورة الفصلية الثانية 2020- 2019

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (60 درجة):

1) اكتب معادلة المستوي:

a) الموازي للمستوي xoz والمار من النقطة $A(-5,2,-1)$.

b) يقطع المحاور الإحداثية بأجزاء متساوية ويمر من النقطة $B(-1,0,2)$.

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = -x + y + 2z + 6 = 0$$
$$P_2 = 2x + 5y + z - 1 = 0$$

3) أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين:

$$D_1 : x = y + 5 = \frac{z}{2}$$
$$D_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = z$$

و الموازي للمتجه $\vec{v}(-1,6,2)$

السؤال الثاني (30 درجة):

لدينا المنحني المعين بالمعادلات:

$$C\begin{cases} x = t + 5 \\ y = t^2 \\ z = t\left(t^3 - 2\right) \end{cases}$$

1) أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحن C في النقطة الموافقة $t = -1$

2) أوجد المعادلتين الديكارتيتين للمنحن C .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

سلم تصحيح مقرر الهندسة التحليلية لطلاب الفيزياء س٨ الدورة الثانية 2020-2019

السؤال الأول (60 درجة): (20-20-20)

1) اكتب معادلة المستوي:

a) الموازي للمستوي xoz والمار من النقطة $A(-5,2,1)$

b) يقطع المحاور الاحداثية بأجزاء متساوية ويمر من النقطة $B(-1,0,2)$.

الحل: a) معادلة مستوي يمر بنقطة معلومة $M(x_0,y_0,z_0)$ و يعامد شعاع معلوم $\vec{w}(a,b,c)$ هي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad (5)$$

المستوي المطلوب موازي للمستوي xoz الذي معادلته $y=0$ وبالتالي ناظمه

$\vec{N}(0,1,0)$ ⇐ ناظم المستوي المطلوب هو $\vec{w}(0,a,0)$ ⇐

$$0(x+5)+a(y-2)+0(z+1)=0 \Rightarrow y-2=0 \Rightarrow \boxed{y=2} \quad (5)$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

b) معادلة المستوي يقطع المحاور الاحداثية (بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الاحداثية):

$$P: \frac{x}{E}+\frac{y}{F}+\frac{z}{G}=1 \quad (5)$$

مباشرة $E=F=G=a$ بالفرض ⇐ $P: x+y+z-a=0$

المستوي يمر من $B(-1,0,2)$ ⇐ $-1+0+2-a=0$

$\Rightarrow a=1$

$$\boxed{P: x+y+z-1=0} \quad (5)$$ المستوي المطلوب

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = -x+y+2z+6=0$$
$$P_2 = 2x+5y+z-1=0$$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المنصف ⇐

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad (5)$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{-x+y+2z+6}{\sqrt{1+1+4}}=\pm\frac{2x+5y+z-1}{\sqrt{4+25+1}}$$

$$\frac{-x+y+2z+6}{\sqrt{6}} = \pm\frac{2x+5y+z-1}{\sqrt{30}}$$

$$\sqrt{5}(-x+y+2z+6) = \pm(2x+5y+z-1)$$ 2

المعادلة التي تناظر المستويين P_1 ، P_2 :

$\vec{w}_1\cdot\vec{w}_2 = (-1,1,2)\cdot(2,5,1) = -1\times2+1\times5+2\times1 = 5>0$ 3

(-) توافق المستوي المنصف الداخلي 2

(+) توافق المستوي المنصف الخارجي 2

(-) المنصف الداخلي : $\sqrt{5}(-x+y+2z+6) = -2x-5y-z+1$

معادلة المستوي المنصف الداخلي: $\boxed{(-\sqrt{5}+2)x+(\sqrt{5}+5)y+(2\sqrt{5}+1)+6\sqrt{5}-1=0}$ 3

(+) المنصف الخارجي :

$$\sqrt{5}(-x+y+2z+6) = 2x+5y+z-1$$

معادلة المستوي المنصف الخارجي: $\boxed{(-\sqrt{5}-2)x+(\sqrt{5}-5)y+(2\sqrt{5}-1)z+6\sqrt{5}+1=0}$ 3

3) أوجد معادلة المستقيم القاطع للمستقيمين :

$D_1:\ x = y+5 = \frac{z}{2}$

$D_2:\ \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = z$

والموازي للشعاع $\vec{v}(-1,6,2)$.

<u>الحل:</u> لنكتب D_1 و D_2 بشكل تقاطع مستويين :

$D_1: \begin{cases} x-y-5=0 \\ 2y-z+10=0 \end{cases}$ 2 $\qquad D_2: \begin{cases} -2x-3y+4=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$ 2

- لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة من D_1 والموازية لـ $\vec{v}$

$P = P_1+\lambda P_2 = x+(-1+2\lambda)y-\lambda z-5+10\lambda=0$ 3

ناظم الحزمة $\vec{w}_\lambda(1,-1+2\lambda,-\lambda)$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}$ ⟸ فإن $\vec{v}$ و $\vec{w}_\lambda$ متعامدان

$\vec{v}\cdot\vec{w}_\lambda = 0 \Rightarrow (-1)(1)+6(-1+2\lambda)+2(-\lambda)=0$

$-1-6+12\lambda-2\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{7}{10}}$ 1

نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة نحصل على المستوي الموازي لـ $\vec{v}$:

$$x + \left(-1 + \frac{14}{10}\right)y - \frac{7}{10}z - 5 + 10\times\frac{7}{10} = 0$$

$$x + \frac{4}{10}y - \frac{7}{10}z + 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{10x + 4y - 7z + 20 = 0} \quad (1) \quad 3$$

نوجد معادلة حزمة المستويات المارة من D_2 :

$$P = P_1 + \lambda P_2 = -2x + (-3+\lambda)y + 2\lambda z + 4 = 0 \quad 3$$

$$\vec{w}_\lambda(-2\ ,\ -3+\lambda\ ,\ 2\lambda)$$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}$ ومنه يكون $\vec{w}_\lambda$ و $\vec{v}$ متعامدان

$$\vec{v}\cdot\vec{w}_\lambda = 0 \Longrightarrow (-1)(-2) + 6(-3+\lambda) + 2(2\lambda) = 0$$

$$2 - 18 + 6\lambda + 4\lambda = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{16}{10}} \quad 1$$

نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة :

$$-2x + \left(-3 + \frac{16}{10}\right)y + 2\left(\frac{16}{10}\right)z + 4 = 0$$

$$-2x - \frac{14}{10}y + \frac{32}{10}z + 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{-20x - 14y + 32z + 40 = 0} \quad (2) \quad 3$$

أو

$$\boxed{-10x - 7y + 16z + 20 = 0}$$

إن المعادلتين (1) و (2) تمثلان معادلتي المستقيم القاطع لـ D_1 و D_2 . 2

السؤال الثاني (30 درجة):

لدينا المنحني المعين بالمعادلات: $C: x = t+5 \ , \ y = t^2 \ , \ z = t(t^3-2)$

1) أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني C في النقطة الموافقة لـ $\boxed{t=-1}$

2) أوجد المعادلتين الديكارتيتين للمنحني C.

الحل: 1) نوجد احداثيات النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ الموافقة $t=-1$

$x_0 = -1+5 = 4 \ , \ y_0 = (-1)^2 = 1 \ , \ z_0 = (-1)((-1)^3-2) = 3 \quad M_0(4, 1, 3)$ 3

نوجد المشتقات:

$$\left.\begin{array}{l} x'_t = 1 \\ y'_t = 2t \\ z'_t = (t^3-2)+t(3t^2) = t^3-2+3t^3 = 4t^3-2 \end{array}\right\} \ 3 \ \xrightarrow{t=-1} \quad \begin{array}{l} x'_0 = 1 \\ y'_0 = -2 \\ z'_0 = -6 \end{array} \ 3$$

معادلتي المستقيم المماس في M_0 :

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'_0} = \frac{y-y_0}{y'_0} = \frac{z-z_0}{z'_0}} \quad 5$$

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-6} \Rightarrow \begin{cases} -2x-y+9=0 \\ -6x-z+27=0 \end{cases} \quad 2$$

معادلة المستوي الناظم في M_0 :

$$\boxed{x'_0(x-x_0)+y'_0(y-y_0)+z'_0(z-z_0)=0} \quad 5$$

$$1(x-4)-2(y-1)-6(z-3)=0 \Rightarrow x-2y-6z+16=0 \quad 2$$

2) المعادلتين الديكارتيتين :

$x = t+5 \quad (1)$

$y = t^2 \quad (2)$

$z = t(t^3-2) \quad (3)$

نوجد t من (1) $\Leftarrow$ $\boxed{t = x-5}$ (4) 3

نعوض (4) في (2) و (3) :

$$\begin{cases} y = (x-5)^2 \\ z = (x-5)^4 - 2(x-5) \end{cases}$$

نحصل على المعادلتين :

$$\begin{cases} y-(x-5)^2 = 0 \\ z-(x-5)^4+2(x-5) = 0 \end{cases} \quad 2 \quad 2$$

جامعة طرطوس
كلية العـلـوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء–السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2020 -2019

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (55 درجة):

1) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = 7x + y - 6 = 0$$
$$P_2 = 3x + 5y - 4z + 1 = 0$$

2) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم:

$$D\begin{cases} 2x + y + 4z - 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

على المستوي: $P_3 = 3x + 2y + z = 0$

3) عين وضع المستوي : $P_4 = x + y + z + 7 = 0$

بالنسبة للكرة : $S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$

السؤال الثاني (35 درجة):

لدينا السطح المعين بالمعادلة:

$$F(x, y, z) = x^2 - 4yz + 8y + 4z - 8 = 0$$

1) أوجد معادلة المستوي المماس و معادلتي المستقيم الناظم للسطح F في النقطة $M_0(1, 2, 3)$

2) أوجد معادلة السطح F في الاحداثيات الاسطوانية.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (55 درجة)

1) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1 = 7x + y - 6 = 0$$
$$P_2 = 3x + 5y - 4z + 1 = 0$$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف وبالتالي :

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2 أي أن :

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$ 5

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{7x+y-6}{\sqrt{49+1}} = \pm \frac{3x+5y-4z+1}{\sqrt{9+25+16}}$$

$$\frac{7x+y-6}{\sqrt{50}} = \pm \frac{3x+5y-4z+1}{\sqrt{50}}$$ 5

لنأخذ الجداء الداخلي لناظمي المستويين P_1 و P_2 :

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 7\cdot 3 + 1\cdot 5 + 0\cdot(-4) = 21+5 = 26 > 0$$ 5

(−) توافق المستوي المنصف الداخلي

(+) توافق المستوي المنصف الخارجي ،

(−) المستوي المنصف الداخلي :

$$7x + y - 6 = -3x - 5y + 4z - 1$$

$\boxed{10x + 6y - 4z - 5 = 0}$ المستوي المنصف الداخلي 5

(+) المستوي المنصف الخارجي :

$$7x + y - 6 = 3x + 5y - 4z + 1$$

$\boxed{4x - 4y + 4z - 7 = 0}$ المستوي المنصف الخارجي 5

2) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم :

$$D\begin{cases}2x+y+4z-1=0\\ x-y-z+2=0\end{cases}$$

على المستوي : $P_3 = 3x+2y+z=0$

الحل: (15 درجة)

لنوجد حزمة المستويات المارة بـ D :

3 $P=P_1+\lambda P_2=(2-\lambda)x+(1-\lambda)y+(4-\lambda)z+(-1+2\lambda)=0$

ناظم الحزمة $\vec{N}_\lambda\,(2-\lambda\,,1-\lambda\,,4-\lambda)$

نختار من هذه الحزمة المستوي المتعامد مع المستوي P_3 :

$\vec{N}\cdot\vec{N}_\lambda=0\Rightarrow 3(2-\lambda)+2(1-\lambda)+1(4-\lambda)=0$ 3

$6-3\lambda+2-2\lambda+4-\lambda=0 \Rightarrow -6\lambda+12=0\Rightarrow \boxed{\lambda=2}$ 3

نعوض في معادلة الحزمة :

$(2-2)x+(1-2)y+(4-2)z+(-1+4)=0$

$\boxed{-y+2z+3=0}$ 3

معادلتي المسقط القائم للمستقيم D على P_3 :

$$\begin{cases}-y+2z+3=0\\ 3x+2y+z=0\end{cases}$$ 3

3) عين وضع المستوي : $P_4 = x+y+z+7=0$

بالنسبة للكرة : $S(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$

الحل: (15 درجة) إن مركز الكرة هو (3) $(1,-2,3)$ ونصف قطرها:

$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{1+(-2)^2+(3)^2-5}=\sqrt{14-5}=\sqrt{9}=3$ 3

نبعد مركز الكرة $(1,-2,3)$ في المستوي P_4 :

3 $\delta=\dfrac{|a_1a+b_1b+c_1c+d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\dfrac{|1-2+3+7|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}>3=R$ 3

1,3 المستوي لا يقطع الكرة $S(x,y,z)$

أو بطريقة المميز

$R^2(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(a_1a+b_1b+c_1c+d_1)^2=9(3)-(9)^2=27-81=-54<0$ 3

3 3 المستوي لا يقطع الكرة (خارج عنها).

السؤال الثاني (35 درجة):

لدينا السطح المعين بالمعادلة :

$$F(x,y,z) = x^2 - 4yz + 8y + 4z - 8 = 0$$

1) أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلتي المستقيم الناظم للسطح F في النقطة $M_0(1,2,3)$

2) أوجد معادلة السطح F في الاحداثيات الاسطوانية .

الحل : 1)

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 2x \\ F'_y &= -4z+8 \\ F'_z &= -4y+4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[M_0(1,2,3)]{M_0 \text{ في}} \begin{aligned} F'_{x_0} &= 2 \\ F'_{y_0} &= -12+8 = -4 \\ F'_{z_0} &= -8+4 = -4 \end{aligned}$$

6

معادلة المستوي المماس :

$$F'_{x_0}(x-x_0) + F'_{y_0}(y-y_0) + F'_{z_0}(z-z_0) = 0$$ 5

$$2(x-1) - 4(y-2) - 4(z-3) = 0$$

$$2x - 4y - 4z - 2 + 8 + 12 = 0$$

$$\boxed{2x - 4y - 4z + 18 = 0}$$ 4

أو $x - 2y - 2z + 9 = 0$

معادلتي المستقيم الناظم :

$$\frac{x-x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y-y_0}{F'_{y_0}} = \frac{z-z_0}{F'_{z_0}}$$ 5

$$\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-4}}$$ 4

2)

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$z = z$$

6

نعوض في معادلة السطح F

$$F(x,y,z) = (\rho\cos\varphi)^2 - 4z\rho\sin\varphi + \rho 8\sin\varphi + 4z - 8 = 0$$
$$= \rho^2\cos^2\varphi - 4\rho z\sin\varphi + 8\rho\sin\varphi + 4z - 8 = 0$$ 5
$$= \rho^2\cos^2\varphi + (-4\rho z + 8\rho)\sin\varphi + 4z - 8 = 0$$

Scanned by CamScanner

جامعة طرطوس كلية العـلـوم قسم الفيزياء	امتحان مقرر الهندسة التحليلية لطلاب الفيزياء–السنة الأولى الدورة الفصلية الثانية 2018- 2019	المدة: ساعتين الدرجة: 90

السؤال الأول (45 درجة):

1) إذا كانت $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ الزوايا التي يصنعها مستقيم مع المحاور الاحداثية أثبت أن:

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$$
$$\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3 = 2$$

2) أثبت أن المستوي: $P = 2x + 2y + 3z + 25 = 0$

يمس الكرة التي معادلتها: $S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$

ثم عين احداثيات نقطة التماس.

3) ماذا يمثل هذا السطح:

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4x - 8y + 8z + 28 = 0$$

ثم أوجد الانسحاب المناسب لجملة المحاور الاحداثية بحيث تحذف الحدود الخطية من المعادلة السابقة.

السؤال الثاني (20 درجة):

أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = 2x + 2y - z + 1 = 0$$
$$P_2 = -x + 2y + z + 3 = 0$$

السؤال الثالث (25 درجة):

لدينا المنحني المعين بالمعادلة:

$$C\begin{cases} f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4x = 0 \\ g(x, y, z) = x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

1) أوجد مساقط المنحني C على المستوي xoy .

2) أوجد معادلتي المستقيم المماس والمستوي الناظم لهذا المنحني في النقطة $M_0\,(-1, 0, 1)$.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

مقرر الهندسة التحليلية
الفصل الثاني - ف س 1

السؤال الأول (45 درجة)

1) إذا كانت θ_1 و θ_2 ، θ_3 الزوايا التي يصنعها مستقيم مع المحاور الاحداثية أثبت أن

$$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1$$

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3=2$$

2) أثبت أن المستوي:

$$P = 2x+2y+3z+25=0$$

يمس الكرة التي معادلتها:

$$S(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-25=0$$

ثم عين احداثيات نقطة التماس.

3) ماذا يمثل هذا السطح:

$$x^2+4y^2+z^2-4x-8y+8z+28=0$$

ثم عين الانسحاب المناسب لجملة المحاور الاحداثية بحيث تحذف الحدود الخطية من المعادلة السابقة.

الحل:

لتكن $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ هو متجه واحدة هذا المستقيم أي جيوب تمام توجيه هذا المستقيم فيكون:

$$\alpha=\cos\theta_1$$
$$\beta=\cos\theta_2$$
$$\gamma=\cos\theta_3$$

$$|\vec{v}|=1 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1} \quad 5$$

لدينا: $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ نعوض في العلاقة السابقة:

$$1-\sin^2\theta_1+1-\sin^2\theta_2+1-\sin^2\theta_3=1$$

$$-\sin^2\theta_1-\sin^2\theta_2-\sin^2\theta_3=1-3=-2$$

نضرب الطرفين ب (-1)

$$\boxed{\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3=2} \quad 3$$

2) الكرة المفروضة مركزها $O(0,0,0)$ أما نصف قطرها $R = 5$

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي P :

$$\delta = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|0+0+0+25|}{\sqrt{4+4+9}} = \frac{25}{\sqrt{17}} \neq R \quad 6$$

والمستوي P لا يمس الكرة المفروضة .

3) $$x^2+4y^2+z^2-4x-8y+8z+28=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل :

$$x^2-4x+4-4+4(y^2-2y+1-1)+(z^2+8z+16-16)+28=0$$

$$(x-2)^2+4(y-1)^2+(z+4)^2-4-4-16+28=0 \quad 5$$

$$(x-2)^2+4(y-1)^2+(z+4)^2=-4$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}+\frac{(z+4)^2}{4}=-1} \quad 5$$

تمثل قطع ناقص وهمي (تخيلي) 3

الانسحاب :

$$x = X + x_0 \quad , \quad y = Y + y_0 \quad , \quad z = Z + z_0 \quad 6$$

نعوض في المعادلة :

$$(X+x_0)^2+4(Y+y_0)^2+(Z+z_0)^2-4(X+x_0)-8(Y+y_0)+8(z_0+Z)+28=0$$

$$X^2+2x_0X+x_0^2+4Y^2+8y_0Y+4y_0^2+Z^2+2z_0Z+z_0^2-4X-4x_0-8Y-8y_0+$$
$$+8Z+8z_0+28=0$$

$$X^2+4Y^2+Z^2+(2x_0-4)X+(8y_0-8)Y+(2z_0+8)Z+(x_0^2+4y_0^2+z_0^2-4x_0-8y_0+8z_0+28)= \quad 6$$

حتى تنعدم الحدود الخطية :

$$2x_0-4=0 \Rightarrow \boxed{x_0=2}$$
$$8y_0-8=0 \Rightarrow \boxed{y_0=1}$$
$$2z_0+8=0 \Rightarrow \boxed{z_0=-4} \quad 6$$

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والمستوي المنصف الخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = 2x + 2y - z + 1 = 0$$
$$P_2 = -x + 2y + z + 3 = 0$$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف فيكون

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$ 5

$$\frac{|2x+2y-z+1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-x+2y+z+3|}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$\frac{2x+2y-z+1}{3} = \pm\frac{(-x+2y+z+3)}{\sqrt{6}}$$

$$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2} = (2,2,-1)\cdot(-1,2,1) = -2+4-1 = 1 > 0$$ 5

إشارة (−) توافق المنصف الداخلي:

$$\sqrt{6}(2x+2y-z+1) = -3(-x+2y+z+3)$$
$$2\sqrt{6}x + 2\sqrt{6}y - \sqrt{6}z + \sqrt{6} = +3x - 6y - 3z - 9$$
$$\boxed{(-3+2\sqrt{6})x + (6+2\sqrt{6})y + (+3-\sqrt{6})z + (9+\sqrt{6}) = 0}$$ 5

وهو المستوي المنصف الداخلي.

إشارة (+) توافق المستوي المنصف الخارجي:

$$\sqrt{6}(2x+2y-z+1) = 3(-x+2y+z+3)$$
$$\boxed{(3+2\sqrt{6})x + (-6+2\sqrt{6})y + (-3-\sqrt{6})z + (-9+\sqrt{6}) = 0}$$ 5

وهو المستوي المنصف الخارجي.

السؤال الثالث (25 درجة)

لدينا المنحني C المعين بالمعادلتين :

$$C\begin{cases} f(x,y,z) = y^2+z^2-4x=0 \\ g(x,y,z) = x+z-4=0 \end{cases}$$

1) أوجد مساقط المنحني C المعطى على المستوي xOy

2) أوجد معادلتي المستقيم المماس والمستوي الناظم لهذا المنحني في النقطة $M_0(-1,0,1)$

الحل: 1) نحسب المتحول z من المعادلة الثانية ثم نعوض في المعادلة الأولى :

$$z = 4-x \xRightarrow{\text{نعوض}} y^2+(4-x)^2-4x=0$$

$$y^2+16-8x+x^2-4x=0 \Rightarrow \boxed{y^2+x^2-12x+16=0}$$ 5

وهو مسقط المنحني C على المستوي xOy (إذا حسب الطالب z من الأولى وعوض في الثاني يأخذ 5 درجات)

2) نحسب المشتقات الجزئية لمعادلتي السطحين f و g في النقطة $M_0(-1,0,1)$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= -4 \\ f'_y &= 2y \\ f'_z &= 2z \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{عند } M_0} \begin{cases} f'_{x_0} = -4 \\ f'_{y_0} = 0 \\ f'_{z_0} = 2 \end{cases} \quad (-4,0,2)$$ 2

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= 1 \\ g'_y &= 0 \\ g'_z &= 1 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{عند } M_0} \begin{cases} g'_{x_0} = 1 \\ g'_{y_0} = 0 \\ g'_{z_0} = 1 \end{cases} \quad (1,0,1)$$ 2

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{j} \quad , \quad \underset{\alpha\ \ \beta\ \ \gamma}{(0,6,0)}$$

- معادلتي المستقيم المماس عند النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$$ 5

$$\left.\frac{x+1}{0} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{0}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \text{المستقيم المماس}$$ 3

- معادلة المستوي الناظم في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0$$ 5

$$0(x+1)+6(y-0)+0(z-1)=0$$ 3

$$6y=0, \quad \boxed{y=0}$$

وهي معادلة المستوي xOz (يمثل المستوي الناظم)

جامعة طرطوس كلية العلـوم قسم الفيزياء	امتحان مقرر الهندسة التحليلية لطلاب الفيزياء الدورة الفصلية الأولى ٢٠١٦-٢٠١٧	المدة: ساعتين الدرجة : ٧٥

السؤال الأول (٢٠ درجة):

١) أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $M(2,-2,1)$ و بالمستقيم :

$$x = 2\lambda + 1 \quad , \quad y = -3\lambda \quad , \quad z = 2\lambda - 3$$

٢) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة $M(1,-1,2)$ و الموازي للمستويين:

$$P_1 = 3x + 12y - 3z - 5 = 0$$
$$P_2 = 3x - 4y + 9z + 7 = 0$$

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

أوجد معادلة المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين المتقاطعين:

$$P_1 = 7x + y - 6 = 0$$
$$P_2 = 3x + 5y - 4z + 1 = 0$$

السؤال الثالث(٣٥ درجة):

1) ليكن لدينا السطح S_1 المعطى وسيطياً بالمعادلات:

$$x = \lambda \cos\varphi \quad , \quad y = \lambda \sin\varphi \quad , \quad z = \lambda$$

a) أوجد المعادلة الديكارتية للسطح S_1 .

b) أوجد معادلة المستوي المماس و المستقيم الناظم للسطح S_1 في النقطة الموافقة لـ

$$\lambda = 2 \; , \; \varphi = \frac{\pi}{6}$$

1) ليكن لدينا السطح S_2 المعطى ديكارتياً بالمعادلة:

$$f(x,y,z) = 3x^3 - x^2 z - y^2 z - y^3$$

برهن أن السطح S_2 متجانس و اذكر خواص السطوح المتجانسة.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (٢٠ درجة)

1) أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيم:

$$x = 2\lambda + 1 \quad , \quad y = -3\lambda \quad , \quad z = 2\lambda - 3$$

وبالنقطة $M(2,-2,1)$.

الحل: لنوجد نقطة من المستقيم وهي $M_0(1,0,-3)$ 1

وبالتالي ناظم المستوي $\vec{\omega}(a,b,c)$ يعطى بالعلاقة

$$\vec{\omega}(a,b,c) = \vec{v} \times \vec{MM_0} \quad ; \quad \vec{MM_0}(-1, 2, -4) \quad 1$$

متجه توجيه المستقيم $\vec{v}(2,-3,2)$

$$\vec{\omega}(a,b,c) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} \quad 3$$

معادلة المستوي:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \quad 3$$

$$8(x-2) + 6(y+2) + (z-1) = 0$$

$$\boxed{8x + 6y + z - 5 = 0} \quad 3$$

2) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة $M(1,-1,2)$ والموازي للمستويين

$$P_1 = 3x + 12y - 3z - 5 = 0$$
$$P_2 = 3x - 4y + 9z + 7 = 0$$

الحل: المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والموازي $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$3 \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda\alpha \\ y = -1 + \lambda\beta \\ z = 2 + \lambda\gamma \end{cases}$$

إن متجه توجيه المستقيم المطلوب:

$$\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma) = \vec{N_1} \times \vec{N_2} \quad ; \quad N_1(3,12,-3) \quad , \quad N_2(3,-4,9)$$ ناظمي المستويين

$$\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 12 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 3\left[(36-4)\vec{i} + (-3-9)\vec{j} - 16\vec{k}\right] \quad 3$$

$$= \underbrace{96}_{\alpha}\vec{i} \underbrace{-36}_{\beta}\vec{j} \underbrace{-48}_{\gamma}\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 96\lambda \\ y = -1 - 36\lambda \\ z = 2 - 48\lambda \end{cases}$$ المعادلات الوسيطية المطلوبة 3

السؤال الثاني (٢٠ درجة)

أوجد معادلة المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين المتقاطعين :

$$P_1 = 7x + y - 6 = 0$$

$$P_2 = 3x + 5y - 4z + 1 = 0$$

الحل :

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad 5$$

$$\therefore \frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{7x+y-6}{\sqrt{49+1}} = \pm \frac{3x+5y-4z+1}{\sqrt{9+25+16}} \quad 3$$

$$7x + y - 6 = \pm(3x + 5y - 4z + 1)$$

لناخذ الجداء الداخلي لناظمي المستويين P_1 و P_2 :

$$\vec{w_1} \cdot \vec{w_2} = 7 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 0(-4) = 21 + 5 = 26 > 0 \quad 3$$

(-) توافق المستوي المنصف الداخلي .
(+) توافق المستوي المنصف الخارجي . 3

• المستوي المنصف الداخلي :

$$7x + y - 6 = -3x - 5y + 4z - 1$$

$$\boxed{10x + 6y - 4z - 5 = 0} \quad 3$$ المستوي المنصف الداخلي

• المستوي المنصف الخارجي :

$$7x + y - 6 = 3x + 5y - 4z + 1$$

$$\boxed{4x - 4y + 4z - 7 = 0} \quad 3$$ المستوي المنصف الخارجي

السؤال (٢٥ درجة)

ليكن لدينا السطح S المعطى وسيطياً بالمعادلات:

$$x = \lambda \cos\varphi \quad , \quad y = \lambda \sin\varphi \quad , \quad z = \lambda$$

1) أوجد المعادلة الديكارتية للسطح S

2) أوجد معادلة المستقيم الناظم والمستوي المماس للسطح S في النقطة الموافقة لـ $\lambda = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

الحل:

1) ليكن لدينا السطح المعطى:

$$x = \lambda \cos\varphi \quad , \quad y = \lambda \sin\varphi \quad , \quad z = \lambda$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 = z^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - z^2 = 0}$$ 2 المعادلة الديكارتية للسطح S

2) لنوجد معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم في النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$

لنوجد النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$M_0 \begin{cases} x = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1 \\ y = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ z = 2 \end{cases} \quad M_0(1, \sqrt{3}, 2) \quad 3$$

لنحسب المشتقات الجزئية:

$$3 \quad \begin{rcases} x'_\lambda = \cos\varphi \\ y'_\lambda = \sin\varphi \\ z'_\lambda = 1 \end{rcases} \xRightarrow[\lambda = 2]{\varphi = \frac{\pi}{6}} \begin{cases} x'_\lambda(M_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'_\lambda(M_0) = \frac{1}{2} \\ z'_\lambda(M_0) = 1 \end{cases} \quad \vec{MT_1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \quad 3$$

$$3 \quad \begin{rcases} x'_\varphi = -\lambda\sin\varphi \\ y'_\varphi = \lambda\cos\varphi \\ z'_\varphi = 0 \end{rcases} \xRightarrow[\lambda = 2]{\varphi = \frac{\pi}{6}} \begin{cases} x'_\varphi(M_0) = -1 \\ y'_\varphi(M_0) = \sqrt{3} \\ z'_\varphi(M_0) = 0 \end{cases} \quad \vec{MT_2}(-1, \sqrt{3}, 0) \quad 3$$

$$\vec{N} = \vec{MT_1} \times \vec{MT_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad 3$$

معادلة المستوي المماس:

$$\boxed{p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0} \quad 3$$

$$-\sqrt{3}(x - 1) - (y - \sqrt{3}) + 2(z - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-\sqrt{3}\,x - y + 2z + 2\sqrt{3} - 4 = 0} \quad 1$$

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \quad (3)$$

$$\frac{x-1}{-\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{-1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} -x+\sqrt{3}\,y-2=0 \\ 2y+z-2(1+\sqrt{3})=0 \end{cases} \quad (2)$$

2) ليكن لدينا السطح S_2 المعطى بالمعادلة:

$$f(x,y,z) = 3x^3 - x^2 z - y^2 z - y^3$$

برهن أن السطح S_2 متجانس واذكر خواص السطوح المتجانسة.

الحل:

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = 3(\lambda x)^3 - (\lambda x)^2(\lambda z) - (\lambda y)^2(\lambda z) - (\lambda y)^3 = 0$$
$$= 3\lambda^3 x^3 - \lambda^3 x^2 z - \lambda^3 y^2 z - \lambda^3 y^3 = 0$$
$$= \lambda^3 (3x^3 - x^2 z - y^2 z - y^3) = 0$$
$$= \lambda^3 f(x,y,z) \quad (3)$$

$\Leftarrow$ f تابع متجانس من الدرجة الثالثة (السطح متجانس)

خواصه: 1) السطح المتجانس يمر من مبدأ الاحداثيات

2) السطح المتجانس هو سطح مخروطي. (3)

3) المشتقات الجزئية للسطوح المتجانسة من الدرجة n هي سطوح متجانسة من الدرجة $n-1$.

جامعة طرطوس
كلية العلــوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء
الدورة الاستثنائية 2015- 2016

المدة: ساعتين
الدرجة : 75

السؤال الأول (20 درجة):

أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها جملة المحاور الاحداثية حول oz بحيث تختفي الحدود المستطيلة من المعادلة:

$$5x^3 + 5y^3 + z^2 + 6xy - 4x + 4y + 2z - 4 = 0$$

السؤال الثاني (25 درجة):

1) أوجد معادلتي المستوي المنصف الداخلي و الخارجي للزاوية بين المستويين:

$$P_1 = 2x + y - z + 1 = 0$$
$$P_2 = -x + y + z - 5 = 0$$

2) أوجد المعادلة التناظرية للمستقيم المار من النقطة $M(1,1,-3)$ و المتعامد مع المستوي الذي يمر من النقاط $M_1(-1,0,-2)$, $M_2(-1,2,1)$ $M_3(3,0,2)$

السؤال الثالث (30درجة):

ليكن لدينا المنحني C المعطى بالمعادلات:

$$C\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

1) أوجد معادلة المسقط القائم للمنحني C على المستوي yoz ثم أوجد عناصر هذا المسقط.

2) أوجد معادلات المستقيم المماس و المستوي الناظم للمنحني C في النقطة $M(1,-1,0)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

سلم تصحيح مقرر هندسة تحليلية

لطلاب قسم الفيزياء السنة الأولى

الدورة الثانية ٢٠١٥-٢٠١٦م

السؤال الأول: معادلات الدوران حول oz هي

(20) درجة

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$
$$z = Z \quad (3)$$

نعوض بالمعادلة:

$$5(X\cos\theta - Y\sin\theta)^3 + 5(X\sin\theta + Y\cos\theta)^3 + Z^2$$
$$+ 6(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) - 4(X\cos\theta - Y\sin\theta)$$
$$+ 4(X\sin\theta + Y\cos\theta) + 2Z - 4 = 0 \quad (4)$$

$$5(X^3\cos^3\theta - 3X^2Y\cos^2\theta\sin\theta + 3Y^2X\sin^2\theta\cos\theta - Y^3\sin^3\theta) \quad (3)$$
$$+ 5(X^3\sin^3\theta + 3X^2Y\sin^2\theta\cos\theta + 3Y^2X\cos^2\theta\sin\theta + Y^3\cos^3\theta)$$
$$+ 6(X^2\cos\theta\sin\theta + \boxed{XY\cos^2\theta - YX\sin^2\theta} - Y^2\cos\theta\sin\theta) \quad (3)$$
$$- 4(X\cos\theta - Y\sin\theta) + 4(Y\sin\theta + Y\cos\theta) = 0$$

حتى تنعدم الحدود المستطيلة يجب أن تنعدم أمثال (XY) الحد المختلط

بالتالي:

$$XY\cos^2\theta - YX\sin^2\theta = 0 \quad (5)$$
$$XY(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$
$$XY(\cos 2\theta) = 0$$

$XY = 0$ أما

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$ بالتالي

وهي الزاوية المطلوبة (2)

السؤال الثاني : الطلب الأول $\boxed{15}$ درجة (25) درجة

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي مستوي المنصف بالتالي

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad (2)$$

بالتعويض نجد

$$\frac{2x+y-z+1}{\sqrt{4+1+1}} = \pm \frac{-x+y+z-5}{\sqrt{1+1+1}} \quad (3)$$

$$\frac{2x+y-z+1}{\sqrt{6}} = \pm \frac{-x+y+z-5}{\sqrt{3}} \quad (3)$$

لتحديد أيها المنصف المطلوب نجد:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 2(-1)+1-1 = -2 < 0 \quad (2)$$

بالتالي: الإشارة (-) توافق المنصف الخارجي والإشارة (+) المنصف الداخلي

مستوي المنصف الداخلي (2)

$$2\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}z+\sqrt{3} = -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y+\sqrt{6}z-5\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}z+\sqrt{3} = -2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z-10\sqrt{3}$$

مستوي المنصف الأول :

$$2\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}z+\sqrt{3}=+2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y-2\sqrt{3}z+10\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}y+\sqrt{3}z+\sqrt{3}-10\sqrt{3}=0 \quad (3)$$

الطلب الثاني : بما أن النقاط الثلاث ليست على استقامة واحدة يمكننا ايجاد معادلة المستوي المار بهذه النقاط

اعطه ٨ درجات

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(0,2,3)=\vec{u_1}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(4,0,4)=\vec{u_2} \quad (3)$$

لنوجد شعاع التوجيه

$$\vec{u}=\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 4\end{vmatrix} \quad (3)$$

$$=8\vec{i}+12\vec{j}-8\vec{k}$$

$$\vec{u}=(8,12,-8)=(\alpha,\beta,\gamma)$$

بالتالي المعادلة الشعاعية للمستقيم المار بالنقطة $M(1,1,-3)$ تكون

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma} \quad (2)$$

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{12}=\frac{z-3}{+8} \quad (2)$$

السؤال الثالث: الطلب الأول (15) درجة

(30) درجة

لإيجاد معادلة المسقط القائم نحسب x من (1) بدلالة y و z ثم نعوض في المعادلة (2)

$$C: \begin{cases} y^2+z^2-4x=0 & (1) \\ x+z-4=0 & (2) \end{cases} \quad (3)$$

من (1) نجد

$$4x = y^2+z^2$$

$$x = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}z^2 \quad (3)$$

نعوض بـ (2) نجد

$$\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}z^2 + z - 4 = 0$$

$$y^2+z^2+4z-16=0 \quad (3)$$

نتمم المربع الكامل

$$y^2+\underline{z^2+4z+4}-4-16=0 \quad (3)$$

$$y^2+(z+2)^2-20=0$$

$$y^2+(z+2)^2=20$$

يمثل معادلة دائرة مركزها $(0,-2)$ ونصف قطرها $\sqrt{20}$ (3)

أي مساحة مركز الدائرة ونصف قطرها.

الطلب الثاني: لإيجاد معادلات المستقيم والمستوي نوجد منظم القطعة (1) درجة

$$\vec{N_1} = (f'_x, f'_y, f'_z) = (-4, 2y, 2z)\Big|_{(1,-1,0)} = (-4, \ldots \quad (2)$$

$$\ldots = (1,0,1) \quad (2)$$

$$\vec{T} = \vec{\mu_1} \wedge \vec{\mu_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(3)

$$= -2\vec{i} + 4\vec{j} \mp 2\vec{k}$$

$$\vec{T} = (-2, 4, -2) = (u, v, w)$$

معادلة المستقيم المار:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w} \quad (3)$$

$$\boxed{\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-2}}$$

المستوي الناظم:

$$(x - x_0)u + (y - y_0)v + (z - z_0)w = 0$$

(3)

$$-2(x-1) + 4(y+1) - 2z = 0$$

$$-2x + 2 + 4y + 4 - 2z = 0$$

$$\boxed{-2x + 4y - 2z + 6 = 0} \quad (2)$$

انتهت الاجوبة

د. سهيل طه

٩/٦
٢٠١٦

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الفيزياء
الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٥-٢٠١٦

المدة: ساعتين
الدرجة : ٧٥

السؤال الأول (٢٠ درجة):

١) أوجد معادلة المستوي المار بخط تقاطع المستويين :

$$P_1 = 2x + 3y + 4z - 5 = 0$$
$$P_2 = x + y + z - 1 = 0$$

و الموازي للمستوي: $P_3 = 2x + y - z = 0$

٢) أوجد معادلتي المستقيم المار من مبدأ الاحداثيات و الموازي للمستقيم:

$$L\begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0 \\ 3x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

أوجد معادلة المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين المتوازيين:

$$P_1 = 2x - y + z - 5 = 0$$
$$P_2 = 2x - y + z - 3 = 0$$

ثم أوجد نقطة تقاطعه مع المستقيم :

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-2}$$

السؤال الثالث:

ليكن لدينا المنحني c المعطى وسيطياً بالمعادلات:

$$x = t - 1 \quad , \quad y = t^2 \quad , \quad z = t(t-2)$$

و المطلوب:

١) أوجد معادلة المسقط القائم للمنحني c على كل من المستويين xoz , xoy

٢) عين نقاط تقاطع هذا المنحني مع المستويات الاحداثية الثلاثة.

٣) أوجد معادلات المستوي الناظم و المستقيم المماس للمنحني c في نقطة تقاطعه مع المستوي xoz

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (٢٠ درجة)

1) أوجد معادلة المستوي المار بخط تقاطع المستويين:

$$P_1 = 2x + 3y + 4z - 5 = 0$$
$$P_2 = x + y + z - 1 = 0$$

والموازي للمستوي: $P_3 = 2x + y - z = 0$

2) أوجد معادلتي المستقيم المار من مبدأ الإحداثيات والموازي للمستقيم:

$$L \begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0 \\ 3x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

الحل: 1) إن المستوي المطلوب ينتمي إلى حزمة المستويات المار من P_1 و P_2

3 $$P = P_1 + \lambda P_2 = 2x + 3y + 4z - 5 + \lambda x + \lambda y + \lambda z - \lambda = 0$$ 3

$$(2+\lambda)x + (3+\lambda)y + (4+\lambda)z - (5+\lambda) = 0$$

لنختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ P_3 ⇐

$$\underset{①}{\frac{2+\lambda}{2}} = \underset{②}{\frac{3+\lambda}{1}} = \underset{③}{\frac{4+\lambda}{-1}}$$ 3

من ① و ② ⇐

$$2 + \lambda = 6 + 2\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = -4}$$

نعوض:

$$\frac{-2}{2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-1}$$ لا تتحقق الشرط

من ② و ③ ⇐

$$-3 - \lambda = 4 + \lambda \Rightarrow 2\lambda = -7 \Rightarrow \lambda = \frac{-7}{2}$$ 1

$$\frac{2 - \frac{7}{2}}{2} \neq \frac{3 - \frac{7}{2}}{1} = \frac{4 - \frac{7}{2}}{-1}$$

$$-\frac{3}{4} \neq \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$$ لا تتحقق الأولى:

⇐ لا يمكن تحديد قيمة λ أي لا يوجد من حزمة المستويات مستوي يوازي المستوي المعطى.

2) معادلتي المستقيم المار من $M_0(x_0, y_0, z_0)$ والموازي للمتجه $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$ هو:

3 $$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

إذا الطالب كتب
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\lambda \\ y = y_0 + \beta\lambda \\ z = z_0 + \gamma\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$ 3

حيث توجيه المستقيم هو:

$$\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma) = \vec{N_1} \times \vec{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 15\vec{j} + 4\vec{k}$$ 3

$$\boxed{\frac{x}{-1} = \frac{y}{15} = \frac{z}{4}}$$

$$\begin{cases} 15x + y = 0 \\ 4y - 15z = 0 \end{cases}$$

أو الطالب إذا كتب:

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 15\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

السؤال الثاني (٢٠ درجة)

أوجد معادلة المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين المتوازيين:

$$2x - y + z - 5 = 0$$
$$2x - y + z - 3 = 0$$

ثم أوجد نقطة تقاطعه مع المستقيم $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{2}$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما كيفية من المحل الهندسي $\Leftarrow$ بعدها عن المستوي الأول = بعدها عن المستوي الثاني

$$\left|\frac{P_1(x,y,z)}{|\vec{\omega}_1|}\right| = \left|\frac{P_2(x,y,z)}{|\vec{\omega}_2|}\right|$$ 5

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{2x-y+z-5}{\sqrt{4+1+1}} = \pm \frac{2x-y+z-3}{\sqrt{4+1+1}}$$

$$\Longrightarrow 2x-y+z-5 = \pm(2x-y+z-3)$$ 3

الحالة الأولى:

$$2x-y+z-5 = 2x-y+z-3$$
$$\Longrightarrow -2 = 0$$ مستحيلة

الحالة الثانية:

$$2x-y+z-5 = -2x+y-z+3$$
$$\boxed{4x-2y+2z-8=0}$$

معادلة مستوي وهو المحل الهندسي المطلوب

• نقاط تقاطع هذا المستوي مع المستقيم $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{2}$

نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم:

$$x = 2+3\lambda$$
$$y = -1+4\lambda$$
$$z = 1+2\lambda$$

نعوض في معادلة المستوي:

$$4(2+3\lambda)-2(-1+4\lambda)+2(1+2\lambda)-8=0$$
$$2(2+3\lambda)-(-1+4\lambda)+(1+2\lambda)-4=0$$
$$4+6\lambda+1-4\lambda+1+2\lambda-4=0 \Longrightarrow 4\lambda+2=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda=\frac{-1}{2}}$$ 3

نعوض في المعادلات الوسيطية للمستقيم:

$$x = 2+3\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}, \quad y = -1+4\left(\frac{-1}{2}\right) = -3, \quad z = 1+2\left(\frac{-1}{2}\right) = 1-1 = 0$$

نقطة التقاطع هي $M\left(\frac{1}{2},-3,0\right)$ 3.

السؤال الثالث (25 درجة):

جد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي بين المستويين:

$$P_1 \equiv 2x+y+2z+1=0$$
$$P_2 \equiv 3x+4y+1=0$$

ثم ادرس تقاطع الفصل المشترك لهذين المستويين مع المستوي $x+2y-4z+1=0$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المنصف ⇐

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$ 3

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{2x+y+2z+1}{\sqrt{4+1+4}}=\pm\frac{3x+4y+1}{\sqrt{9+16}}$$

$$\frac{2x+y+2z+1}{3}=\pm\frac{3x+4y+1}{5}$$

$$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2}=2(3)+1(4)+2(0)=10>0$$ 3

(−) توافق المستوي المنصف الداخلي 3

(+) توافق المستوي المنصف الخارجي

المستوي المنصف الداخلي:

$$5(2x+y+2z+1)=-3(3x+4y+1)$$
$$10x+5y+10z+5=-9x-12y-3 \Rightarrow \boxed{19x+17y+10z+8=0}$$ 3

المستوي المنصف الداخلي

المستوي المنصف الخارجي:

$$5(2x+y+2z+1)=3(3x+4y+1)$$
$$10x+5y+10z+5=9x+12y+3 \Rightarrow \boxed{x-7y+10z+2=0}$$ 3

المستوي المنصف الخارجي

لنوجد المعادلات الوسيطة للفصل المشترك للمستويين

منحى توجيه المستقيم

$$\vec{v}=\vec{w_1}\times\vec{w_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&2\\3&4&0\end{vmatrix}=-8\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$$

لنختار نقطة من هذا المستقيم ⇐ $\boxed{x=0}$

$$y+2z+1=0$$
$$4y+1=0 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{4}} \Rightarrow -\frac{1}{4}+2z+1=0 \Rightarrow 2z=-\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{z=-\frac{3}{8}}$$

المعادلات الوسيطة:

$$x=x_0+\alpha t,\quad y=y_0+\beta t,\quad z=z_0+\gamma t,\quad \begin{cases}x=-8t\\y=-\frac{1}{4}+6t\\z=-\frac{3}{8}+5t\end{cases}$$ 3

لإيجاد تقاطع هذا المستقيم مع المستوي نعوض المعادلات الوسيطة للمستقيم في المستوي:

$$x+2y-4z+1=0 \Rightarrow -8t+2\left(-\frac{1}{4}+6t\right)-4\left(-\frac{3}{8}+5t\right)+1=0$$
$$-8t-\frac{1}{2}+12t+\frac{3}{2}-20t+1=0 \Rightarrow -16t+2=0 \Rightarrow t=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$ 2

وبالتالي المستقيم قاطع للمستوي لنوجد نقطة التقاطع

$$x=\frac{-8}{8}=-1,\quad y=-\frac{1}{4}+\frac{6}{8}=\frac{1}{2},\quad z=-\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{1}{4} \Rightarrow M_0\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$ 2

3) لنوجد معادلات المستوي الناظم والمستقيم المماس في النقطة $A_1(-1,0,0)$

3

$$\left.\begin{array}{l} x'_t = 1 \\ y'_t = 2t \\ z'_t = (t-2)+t \end{array}\right\} \xrightarrow[t=0]{\text{في النقطة } A_1} \left\{\begin{array}{l} x'_t(M_0) = 1 \\ y'_t(M_0) = 0 \\ z'_t(M_0) = -2 \end{array}\right.$$

3

فيكون المستقيم المماس في A_1 :

$M_0(x_0, y_0, z_0) = A_1(-1,0,0)$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'_t(M_0)} = \frac{y-y_0}{y'_t(M_0)} = \frac{z-z_0}{z'_t(M_0)}}$$ 5

$$\boxed{\frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{-2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ -2x - z - 2 = 0 \end{array}\right.$$

والمستوي الناظم في A_1 :

$$\boxed{x'_t(M_0)(x-x_0) + y'_t(M_0)(y-y_0) + z'_t(M_0)(z-z_0) = 0}$$ 5

$$1(x+1) + 0(y-0) - 2(z-0) = 0$$

$$\boxed{x - 2z + 1 = 0}$$

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر الهندسة تحليلية
لطلاب الفيزياء
الدورة الفصلية الأولى 2015- 2016

المدة: ساعتين
الدرجة : 75

السؤال الأول (15 درجة):

لدينا السطح المعطى بالمعادلة: $4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$

أوجد معادلة هذا السطح بعد اجراء انسحاب مناسب يحذف الحدود الخطية من المعادلة.

السؤال الثاني (15 درجة):

1) أوجد معادلة المستوي الذي طول العمود النازل عليه من نقطة الأصل يساوي 4 علماً أن وسطاء توجيه منحى الناظم على هذا المستوي هي $(2, \sqrt{2}, \sqrt{3})$

2) أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(1,-1,0)$ و المعامد للمستقيم المار من النقطتين: $M_1(1,0,-2)$ ، $M_2(2,1,-1)$

السؤال الثالث (25 درجة):

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي و الخارجي للزاوية بين المستويين:

$$P_1 \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$$
$$P_2 \equiv 3x + 4y + 1 = 0$$

ثم ادرس تقاطع الفصل المشترك لهذين المستويين مع المستوي :

$$x + 2y - 4z + 1 = 0$$

السؤال الرابع (20 درجة):

أوجد معادلتي المستقيم المماس و معادلة المستوي الناظم للمنحني :

$$f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4x = 0$$
$$g(x,y,z) = x + z - 4 = 0$$

في النقطة $M(2,1,0)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول: (5 درجات)

لدينا السطح المعطى بالمعادلة:

$$4xy+4xz-4y-4z-1=0$$

أوجد معادلة هذا السطح بعد إجراء انسحاب مناسب يحذف الحدود الخطية في المعادلة

الحل: لنفرض هذا الانسحاب:

$$x=x_0+X$$
$$y=y_0+Y$$
$$z=z_0+Z$$

5

نعوض في المعادلة:

$$4(x_0+X)(y_0+Y)+4(x_0+X)(z_0+Z)-4(y_0+Y)-4(z_0+Z)-1=0$$

$$4x_0y_0+4y_0X+4x_0Y+4XY+4x_0z_0+4z_0X+4x_0Z+4XZ-4y_0-4Y-4z_0-4Z-1$$

$$4XY+4XZ+4(y_0+z_0)X+4(x_0-1)Y+4(x_0-1)Z+4x_0y_0+4x_0z_0-4y_0-4z_0-1=0$$

إجراء انسحاب لجعل المحاور الاصلية بحيث يحذف الحدود الخطية

5

$$y_0+z_0=0 \Rightarrow y_0=-z_0$$
$$x_0-1=0 \Rightarrow x_0=1$$

$$(1, a, -a)$$

نعوض بـ x_0 , y_0 , z_0

$$4XY+4XZ+4a-4a-4a+4a-1=0$$

$$\boxed{4XY+4XZ-1=0}$$

5

السؤال الثاني (15 درجة)

1- أوجد معادلة المستوي الذي طول العمود النازل عليه من نقطة الأصل يساوي 4 علماً أن وسطاء توجيه متجه الناظم على هذا المستوي هي $(2, \sqrt{2}, \sqrt{3})$

2- أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(1,-1,0)$ والمعامد للمستقيم المار من النقطتين $M_1(1,0,-2)$ و $M_2(2,1,-1)$.

الحل: 1) معادلة المستوي

$$ax+by+cz+d=0 \quad 3$$

لدينا: بعد المبدأ عن المستوي:

$$h = \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 4$$

$$\Rightarrow d = -h\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

ولدينا وسطاء توجيه متجه الناظم هي

$$c=\sqrt{3}, \quad b=\sqrt{2}, \quad a=2$$

$$\Rightarrow d = -4\sqrt{4+2+3} = -4\sqrt{9} = -4(3) = -12 \quad 3$$

وبالتالي معادلة المستوي

$$\boxed{2x+\sqrt{2}\,y+\sqrt{3}\,z-12=0} \quad 1$$

2) معادلة المستوي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad 3$$

لدينا ناظم المستوي $\vec{w}(a,b,c)$ هو متجه توجيه $\overrightarrow{M_1M_2}$ أي أن

$$\vec{w}(a,b,c) = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = (2-1, 1-0, -1+2) = (1,1,1) \quad 3$$

وبالتالي معادلة المستوي المطلوب المار من $M(1,-1,0)$

$$1.(x-1)+1(y+1)+1(z-0)=0 \Rightarrow \boxed{x+y+z=0} \quad 2$$

السؤال الثالث (25 درجة):

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي بين المستويين:

$$P_1 \equiv 2x+y+2z+1=0$$
$$P_2 \equiv 3x+4y+1=0$$

ثم ادرس تقاطع الفصل المشترك لهذين المستويين مع المستوي $x+2y-4z+1=0$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المنصف $\Leftarrow$

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{2x+y+2z+1}{\sqrt{4+1+4}}=\pm\frac{3x+4y+1}{\sqrt{9+16}}$$

$$\frac{2x+y+2z+1}{3}=\pm\frac{3x+4y+1}{5}$$

$$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2}=2(3)+1(4)+2(0)=10>0$$

$(-)$ توافق المستوي المنصف الداخلي

$(+)$ توافق المستوي المنصف الخارجي

المستوي المنصف الداخلي:

$$5(2x+y+2z+1)=-3(3x+4y+1)$$
$$10x+5y+10z+5=-9x-12y-3 \Rightarrow \boxed{19x+17y+10z+8=0}$$ المستوي المنصف الداخلي

المستوي المنصف الخارجي:

$$5(2x+y+2z+1)=3(3x+4y+1)$$
$$10x+5y+10z+5=9x+12y+3 \Rightarrow \boxed{x-7y+10z+2=0}$$ المستوي المنصف الخارجي

• لنوجد المعادلات الوسيطة للفصل المشترك للمستويين

شعاع توجيه المستقيم

$$\vec{v}=\vec{w_1}\times\vec{w_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}=-8\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$$

لنختار نقطة من هذا المستقيم $\Leftarrow \boxed{x=0}$

$$y+2z+1=0$$
$$4y+1=0 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{4}} \Rightarrow -\frac{1}{4}+2z+1=0 \Rightarrow 2z=-\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{z=-\frac{3}{8}}$$

المعادلات الوسيطة:

$$x=x_0+\alpha t,\quad y=y_0+\beta t,\quad z=z_0+\gamma t,\quad \begin{cases} x=-8t \\ y=-\frac{1}{4}+6t \\ z=-\frac{3}{8}+5t \end{cases}$$

لإيجاد تقاطع هذا المستقيم مع المستوي نعوض المعادلات الوسيطة للمستقيم في المستوي:

$$x+2y-4z+1=0 \Rightarrow -8t+2\left(-\frac{1}{4}+6t\right)-4\left(-\frac{3}{8}+5t\right)+1=0$$
$$-8t-\frac{1}{2}+12t+\frac{3}{2}-20t+1=0 \Rightarrow -16t+2=0 \Rightarrow \boxed{t=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}}$$

وبالتالي المستقيم قاطع للمستوي لنوجد نقطة التقاطع

$$x=\frac{-8}{8}=-1,\quad y=-\frac{1}{4}+\frac{6}{8}=\frac{1}{2},\quad z=-\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{1}{4} \Rightarrow M_0\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

السؤال الرابع (20 درجة)

أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني:

$$f(x,y,z) = y^2+z^2-4x=0$$
$$g(x,y,z) = x+z-4=0$$

في النقطة $M(2,1,0)$

الحل:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= -4 \\ f'_y &= 2y \\ f'_z &= 2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f'_{xM_0} &= -4 \\ f'_{yM_0} &= 2 \\ f'_{zM_0} &= 0 \end{aligned}\right\} \; 3 \quad , \quad \left.\begin{aligned} g'_x &= 1 \\ g'_y &= 0 \\ g'_z &= 1 \end{aligned}\right\} \; \begin{aligned} g'_{xM_0} &= 1 \\ g'_{yM_0} &= 0 \\ g'_{zM_0} &= 1 \end{aligned} \; 3$$

أمثال توجيه المماس:

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f'_{xM} & f'_{yM} & f'_{zM} \\ g'_{xM_0} & g'_{yM_0} & g'_{zM_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k} \quad 3$$

معادلتي المستقيم المماس:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{w}} \quad 3$$

وبالتالي المستقيم المماس في: $M(2,1,0)$

$$\boxed{\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{-2}} \quad 3$$

معادلة المستوي الناظم:

$$\boxed{u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(z-z_0)=0} \quad 3$$

نعوض فنحصل على المستوي الناظم في $M(2,1,0)$

$$2(x-2)+4(y-1)-2(z-0)=0$$

$$\boxed{2x+4y-2z-8=0} \quad , \quad \boxed{x+2y-z-4=0} \quad 2$$

امتحان مقرر الهندسة تحليلية

كلية العلوم الثانية	لطلاب الفيزياء	المدة: ساعتين
قسم الفيزياء	دورة ثالثة ٢٠١٤-٢٠١٥	الدرجة : ٧٥

السؤال الأول (١٥ درجة):

احسب بعد كل من النقطتين $A\,(2,1,-1)$ و $B\,(-2,0,3)$ عن المستوي:

$$P \equiv 2x - y - 8z - 7 = 0$$

ثم عين موقع كل منهما بالنسبة لهذا المستوي.

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

ادرس تقاطع المستقيم: $L: \ \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-5}$

مع المستوي : $P \equiv x - 2y + z - 15 = 0$

ثم أوجد الزاوية بين المستقيم L و المستوي P

السؤال الثالث (٢٠ درجة):

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي و الخارجي للزاوية بين المستويين الذي فصلهما المشترك هو:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{2}$$

السؤال الرابع (١٥ درجة):

ما نوع السطح المعرف بالمعادلة:

$$2x^2 - 2y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z - 10 = 0$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول: (15 درجة)

احسب بعد كل من النقطتين $A(2,1,-1)$ و $B(-2,0,3)$ عن المستوي:

$$2x - y - 8z - 7 = 0$$

ثم عين موقع كل منهما بالنسبة لهذا المستوي.

الحل: لبعد النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي $P(x,y,z)$ يعطى بالعلاقة:

$$\delta = \frac{|P(x_0,y_0,z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad 5$$

لبعد A عن المستوي P:

$$\delta_A = \frac{|2(2)-1+8-7|}{\sqrt{4+1+(8)^2}} = \frac{|4-1+1|}{\sqrt{4+1+64}} = \frac{|4|}{\sqrt{69}} = \frac{4}{\sqrt{69}}$$

5

لبعد B عن المستوي P:

$$\delta_B = \frac{|2(-2)+0-8(3)-7|}{\sqrt{4+1+64}} = \frac{|-35|}{\sqrt{69}} = \frac{35}{\sqrt{69}}$$

نلاحظ أن البعد الجبري لكل منهما عن المستوي أخذ إشارتين مختلفتين وبالتالي B و A تقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة لـ P. 5

السؤال الثاني: (25 درجة)

ادرس تقاطع المستقيم

$$L: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-5}$$

مع المستوي $P: x - 2y + z - 15 = 0$

ثم أوجد الزاوية بين المستقيم L والمستوي P.

الحل: نضع المعادلات الوسيطية للمستقيم:

$$\begin{aligned} x-3 &= 3\lambda \\ y-2 &= -2\lambda \\ z+1 &= -5\lambda \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3+3\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = -1-5\lambda \end{cases} \quad 3$$

نعوض هذه المعادلات في معادلة المستوي:

$$(3+3\lambda) - 2(2-2\lambda) + (-1-5\lambda) - 15 = 0 \quad 3$$

$$3+3\lambda-4+4\lambda-1-5\lambda-15 = 0 \Longrightarrow 2\lambda - 17 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{17}{2}} \quad 3$$

لـ λ قيمة واحدة ← المستقيم يقطع المستوي في نقطة لإيجادها نعوض قيمة λ في المعادلات الو

$$x = 3 + 3\left(\frac{17}{2}\right) = \frac{57}{2}, \quad y = 2 - 2\left(\frac{17}{2}\right) = -15, \quad z = -1-5\left(\frac{17}{2}\right) = \frac{-87}{2} \quad 3$$

• الزاوية بين L و P:

متجه توجيه المستقيم $\vec{v}(3,-2,-5)$ وناظم المستوي $\vec{w}(1,-2,1)$ 2

الزاوية θ بين المستقيم L والمستوي P:

$$\sin\theta = \frac{|\vec{w}\cdot\vec{v}|}{|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|1(3)-2(-2)+1(-5)|}{\sqrt{9+4+25}\sqrt{1+4+1}} = \frac{|2|}{\sqrt{38}\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{228}} \quad 5 \quad 3$$

السؤال الثالث (20 درجة)

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي للزاوية بين المستويين الذي فصلهما المشترك هو:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{2}$$

(1) (2) (3)

الحل: نكتب المستقيم بشكل تقاطع مستويين :

2

$P_1: \; 4x-3y-11=0 \Leftarrow 4(x-2)=3(y+1) \Leftarrow$ من (1) و (2)

$P_2: \; 2y-4z+6=0 \Leftarrow 2(y+1)=4(z-1) \Leftarrow$ من (2) و (3)

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$ 5

$$\frac{4x-3y-11}{\sqrt{16+9}}=\pm\frac{2y-4z+6}{\sqrt{4+16}}$$

نوجد $\vec{w}_1\cdot\vec{w}_2$

$$\vec{w}_1\cdot\vec{w}_2=4(0)-3(2)+0(-4)=-6<0$$

(+) توافق المستوي المنصف الداخلي

(−) توافق المستوي المنصف الخارجي

المستوي المنصف الداخلي:

$$\sqrt{20}\,(4x-3y-11)=5(2y-4z+6)$$ 2

$$\boxed{4\sqrt{20}\,x+(-3\sqrt{20}-10)y+20z+(-11\sqrt{20}-30)=0}$$ 3

المستوي المنصف الخارجي:

$$\sqrt{20}\,(4x-3y-11)=-5(2y-4z+6)$$ 2

$$\boxed{4\sqrt{20}\,x+(-3\sqrt{20}+10)y-20z+(-11\sqrt{20}+30)=0}$$ 3

السؤال الرابع (15 درجة)

ما نوع السطح المعرف بالمعادلة :

$$2x^2-2y^2+4z^2-8x-6y+12z-10=0$$

الحل : بالإتمام إلى مربع كامل

$$2(x^2-4x+4-4)-2(y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4})+4(z^2+3z+\frac{9}{4}-\frac{9}{4})-10=0$$ 5

$$2(x-2)^2-2(y+\frac{3}{2})^2+4(z+\frac{3}{2})^2-8+\frac{9}{2}-9-10=0$$

$$2(x-2)^2-2(y+\frac{3}{2})^2+4(z+\frac{3}{2})^2-\frac{45}{2}=0$$ 2

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{\frac{45}{4}}-\frac{(y+\frac{3}{2})^2}{\frac{45}{4}}+\frac{(z+\frac{3}{2})^2}{\frac{45}{8}}=1}$$ 5

معادلة مجسم قطع زائد ذو فرع واحد (طية واحدة) مركزه $(2, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ 3

امتحان مقرر الهندسة تحليلية

كلية العلــوم الثانية	لطلاب الفيزياء	المدة: ساعتين
قسم الفيزياء	الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤- ٢٠١٥	الدرجة : ٧٥

السؤال الأول (١٥ درجة):

أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها جملة المحاور الاحداثية حول oz بحيث تختفي الحدود المستطيلة من المعادلة: $5x^2 + 5y^2 + z^2 + 6xy - 4x + 4y + 2z - 4 = 0$

السؤال الثاني (١٥ درجة):

1) أوجد معادلة المستوي الذي يقطع المحاور الاحداثية في النقاط :

$$M_1(-2,0,0), M_2(0,3,0), M_3(0,0,-4)$$

٢) أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(1,-1,2)$ و المار بخط تقاطع المستويين:

$$P_1 = x - y + z - 1 = 0$$
$$P_2 = 2x - y + z - 2 = 0$$

السؤال الثالث (٢٥ درجة):

أوجد معادلة المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين:

$$P_1 = x - y + z - 5 = 0$$
$$P_2 = 2x + 3y - z + 1 = 0$$

و أوجد الزاوية بين هذين المستويين ، ثم أوجد الزاوية بين الفصل المشترك لهذين المستويين و المستقيم :

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{2}$$

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

أوجد معادلتي المستقيم المماس و معادلة المستوي الناظم للمنحني :

$$x = t e^{t+1} \quad , \quad y = 2 e^{t+2} \quad , \quad z = e^{t^3+1}$$

في النقطة الموافقة $t = -1$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (15 درجة)

أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها محاور الإحداثيات حول OZ بحيث تختفي الحدود المستطيلة من المعادلة:

$$5x^2+6xy+5y^2+z^2-4x+4y+2z-4=0$$

الحل: الدوران حول OZ:

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta \qquad 5$$
$$z = Z$$

نعوض في المعادلة:

$$5(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2+6(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta+Y\cos\theta)+5(X\sin\theta+Y\cos\theta)^2$$
$$+Z^2-4(X\cos\theta - Y\sin\theta)+4(X\sin\theta+Y\cos\theta)+2Z-4=0$$

$$5X^2\cos^2\theta-10XY\cos\theta\sin\theta+5Y^2\sin^2\theta+6X^2\cos\theta\sin\theta+6XY\cos^2\theta-6XY\sin^2\theta$$
$$-6Y^2\sin\theta\cos\theta+5X^2\sin^2\theta+10XY\sin\theta\cos\theta+5Y^2\cos^2\theta+Z^2-4X\cos\theta+4Y\sin\theta$$
$$+4X\sin\theta+4Y\cos\theta+2Z-4=0 \qquad 5$$

$$(5\cos^2\theta+6\cos\theta\sin\theta+5\sin^2\theta)X^2+(5\sin^2\theta+5\cos^2\theta-6\sin\theta\cos\theta)Y^2+Z^2+$$
$$XY(6\cos^2\theta-6\sin^2\theta)+(4\sin\theta-4\cos\theta)X+(4\cos\theta+4\sin\theta)Y+2Z-4=0$$

تختفي الحدود المستطيلة ⇐ أمثال XY معدوم ⇐

$$6\cos^2\theta-6\sin^2\theta=0 \Rightarrow \cos^2\theta-\sin^2\theta=0 \Rightarrow \cos 2\theta=0 \Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{4}} \qquad 5$$

السؤال الثاني: (5) درجات

1) معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية:

الحل:

$$3 \quad P \equiv \frac{x}{E}+\frac{y}{F}+\frac{z}{G}=1 \Rightarrow \frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1$$

$$\boxed{6x-4y+3z+12=0} \qquad 3$$

إذا الطالب وضع معادلة المستوي

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

يأخذ 3 علامات. ثم أوجد الجداء الخارجي لمتجهين من هذه النقاط لها نفس نقطة البداية وكان هذا هو ناظم المستوي وأخذ أي نقطة من هذه النقاط الثلاث هي (x_0,y_0,z_0) فيكون الجواب نفسه المستوي السابق: $6x-4y+3z+12=0$ يأخذ 3 د/م

2) أوجد معادلة المستوي المار في النقطة $M(1,-1,2)$ والمار في خط تقاطع المستويين

$$P_1 = x - y + z - 1 = 0$$
$$P_2 = 2x - y + z - 2 = 0$$

الحل: معادلة المستوي المار بخط تقاطع المستويين هي احدى معادلات الحزمة:

3 $$P_1 + \lambda P_2 = (1+2\lambda)x - (1+\lambda)y + (1+\lambda)z - (1+2\lambda) = 0$$

نختار من هذه الحزمة المستوي المار في النقطة $M(1,-1,2)$ نعوض في معادلة الحزمة:

$$\Longrightarrow 1+2\lambda + (1+\lambda) + 2(1+\lambda) - (1+2\lambda) = 0$$
$$3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$ 3

نعوض λ بقيمتها:

$$-x + 0y + 0z + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x - 1 = 0}$$ 3

إذا الطالب وضع معادلة المستوي يأخذ 3 علامات $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

السؤال الثالث (25 درجة)

الحل: المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين:

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{x-y+z-5}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2x+3y-z+1}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = 1\cdot 2 - 1\cdot 3 + 1\cdot(-1) = 2-3-1 = -2 < 0$$ 3

وبالتالي $(+)$ توافق المستوي المنصف الداخلي 2

$(-)$ توافق المستوي المنصف الخارجي 2

المستوي المنصف الداخلي:

$$\frac{x-y+z-5}{\sqrt{3}} = \frac{2x+3y-z+1}{\sqrt{14}}$$

$$\sqrt{14}\,x - \sqrt{14}\,y + \sqrt{14}\,z - 5\sqrt{14} - 2\sqrt{3}\,x - 3\sqrt{3}\,y + \sqrt{3}\,z + \sqrt{3} = 0$$ 3

$$\boxed{(\sqrt{14}-2\sqrt{3})x - (\sqrt{14}+3\sqrt{3})y + (\sqrt{14}+\sqrt{3})z + (\sqrt{3}-5\sqrt{14}) = 0}$$

وهو المستوي المنصف الداخلي لهذين المستويين

المستوي المنصف الخارجي:

$$\frac{x-y+z-5}{\sqrt{3}} = -\frac{2x+3y+1-z}{\sqrt{14}}$$ 3

$$\boxed{(\sqrt{14}+2\sqrt{3})x - (\sqrt{14}-3\sqrt{3})y + (\sqrt{14}-\sqrt{3})z + (-5\sqrt{14}-\sqrt{3}) = 0}$$

وهو المستوي المنصف الخارجي ...

تابع السؤال الثالث :

أوجد الزاوية بين هذين المستويين ، ثم أوجد الزاوية بين الفصل المشترك لهذين المستويين والمستقيم :
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{2}$$

الحل :

$$\cos(\hat{P_1,P_2})=\cos(\vec{\omega_1},\vec{\omega_2})=\frac{\vec{\omega_1}\cdot\vec{\omega_2}}{|\vec{\omega_1}|\cdot|\vec{\omega_2}|}=\frac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{14}}=\frac{-2}{\sqrt{42}}$$ 1 2

لنوجد الزاوية بين المستقيمين :

معامل توجيه المستقيم الأول (الذي هو تقاطع المستويين) :

$$\vec{v_1}=\vec{\omega_1}\times\vec{\omega_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$$ 2

معامل توجيه المستقيم الثاني

$$\vec{v_2}(3,4,2)$$ 2

الزاوية بين المستقيمين

$$\cos(\hat{\vec{v_1},\vec{v_2}})=\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|}=\frac{-2(3)+3(4)+5(2)}{\sqrt{4+9+25}\sqrt{9+16+4}}$$
$$=\frac{-6+12+10}{\sqrt{38}\sqrt{29}}=\frac{16}{\sqrt{38}\sqrt{29}}$$

السؤال الرابع (20 درجة)

أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني :

$$x=te^{t+1} \qquad y=2e^{t+2} \qquad z=e^{t^3+1}$$

في النقطة الموافقة لـ $t=-1$

الحل: لنوجد احداثيات النقطة من أجل $t=-1$

$$x=-e^{-1+1}=-1 \quad , y=2e^{-1+2}=2e \ , \ z=e^{-1+1}=1$$ 3

النقطة $M_0(-1,2e,1)$

لنوجد المشتقات في النقطة $M_0(-1,2e,1)$

$$\left.\begin{aligned}x'_t&=e^{t+1}+te^{t+1}\\ y'_t&=2e^{t+2}\\ z'_t&=3t^2e^{t^3+1}\end{aligned}\right\} \ 3 \ \xrightarrow{\text{في أجل } t=-1} \left\{\begin{aligned}x'_{t_0}&=e^{-1+1}+(-e^{-1+1})=e^0-e^0=0\\ y'_{t_0}&=2e^{-1+2}=2e\\ z'_{t_0}&=3(1)e^{-1+1}=3\end{aligned}\right.$$ 3

معادلة المستقيم المماس في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'_{t_0}}=\frac{y-y_0}{y'_{t_0}}=\frac{z-z_0}{z'_{t_0}}} \quad 3$$

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y-2e}{2e}=\frac{z-1}{3} \qquad \begin{cases} x+1=0 \\ \dfrac{y-2e}{2e}=\dfrac{z-1}{3} \end{cases} \quad 3$$

معادلة المستوي الناظم في M_0 :

$$\boxed{x'_{t_0}(x-x_0)+y'_{t_0}(y-y_0)+z'_{t_0}(z-z_0)=0} \quad 3$$

$$0(x+1)+2e(y-2e)+3(z-1)=0$$

$$2ey+3z-4e^2-3=0$$

امتحان مقرر الهندسة تحليلية

كلية العلـــوم الثانية	لطلاب فيزياء–السنة الثانية	المدة: ساعتين
قسم الفيزياء	الدورة الفصلية الأولى ٢٠١٤- ٢٠١٥	الدرجة : ١٠٠

السؤال الأول (٢٥ درجة):

أوجد إحداثيات النقطة M منتصف القطعة المستقيمة AB إذا علمت أن النقطة A معينة بالإحداثيات الاسطوانية $\left(\rho = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ z = 2\right)$ و النقطة B معينة بالإحداثيات الكروية $\left(r = 2\sqrt{3},\ \varphi = 0,\ \vartheta = \frac{\pi}{3}\right)$ ، واحسب الزاوية بين المتجهين $\overline{A}$ و $\overline{B}$ ثم احسب مساحة المثلث المنشأ على المتجهين $\overline{A}$ و $\overline{B}$.

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي و الخارجي لزاوية بين المستويين:

$$P_1 \equiv 7x + y - 6 = 0$$
$$P_2 \equiv 3x + 5y - 4z + 1 = 0$$

السؤال الثالث (٢٠ درجة):

أوجد معادلة المستقيم المحدد بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv x + y + z - 5 = 0$$
$$P_2 \equiv y - 3z - 1 = 0$$

السؤال الرابع(٣٠ درجة):

أوجد معادلة المستوي المماس و معادلتي المستقيم الناظم للسطح المعطى ديكارتياً:

$$F(x, y, z) = 12y^2 - xz + z^3 = 0$$

في النقطة $M_0(1, 0, 1)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

امتحان الهندسة التحليلية لطلاب الفيزياء سنة ثانية (100 درجة) 2015-2014

1 السؤال الأول (25 درجة)

أوجد احداثيات النقطة M منتصف القطعة المستقيمة AB إذا علمت أن النقطة A معينة بالاحداثيات الاسطوانية $(\rho=1,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ z=2)$ والنقطة B معينة بالاحداثيات الكروية $(r=2\sqrt{3},\ \varphi=0,\ \theta=\frac{\pi}{3})$ ثم احسب الزاوية بين $\vec{A}, \vec{B}$ ثم احسب مساحة المثلث المنشأ على $\vec{B}, \vec{A}$

الحل: لنوجد الاحداثيات الديكارتية للنقطتين:

$$\left.\begin{aligned} x_A &= \rho\cos\varphi = 1\cdot\cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \\ y_A &= \rho\sin\varphi = 1\cdot\sin\tfrac{\pi}{2} = 1 \\ z_A &= z = 2 \end{aligned}\right\} \quad A(0,1,2) \qquad 5$$

$$x_B = r\cos\varphi\sin\theta = 2\sqrt{3}\cos(0)\sin\tfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1(3) = 3$$

$$y_B = r\sin\varphi\sin\theta = 2\sqrt{3}\sin(0)\sin\tfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\cdot 0\sin\tfrac{\pi}{3} = 0$$

$$z_B = r\cos\theta = 2\sqrt{3}\cos\tfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \qquad 5$$

الاحداثيات الديكارتية $\Longleftarrow B(3,0,\sqrt{3})$

احداثيات منتصف القطعة AB : 5

$$x = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

- الزاوية بين $\vec{A}, \vec{B}$.

$$\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{x_Ax_B+y_Ay_B+z_Az_B}{\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}\sqrt{x_B^2+y_B^2+z_B^2}} = \frac{0\cdot 3+1\cdot 0+2\sqrt{3}}{\sqrt{0+1+4}\sqrt{9+0+3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{12}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad 5$$

مساحة المثلث المنشأ على المتجهين $\vec{B}, \vec{A}$

$$S = \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|, \quad \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3}\,\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} \qquad 5$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{3+36+9} = \frac{1}{2}\sqrt{48} = \frac{4}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$ وحدة مربع

السؤال الثاني (25 درجة):
أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي للزاوية بين المستويين:

$$P_1 \equiv 7x + y - 6 = 0$$
$$P_2 \equiv 3x + 5y - 4z + 1 = 0$$

لتكن $M(x,y,z)$ ∈ للمستوي المنصف ⇐ بعدها عن المستويين متساويين

$$\frac{|7x+y-6|}{\sqrt{(7)^2+(1)^2+(0)^2}} = \frac{|3x+5y-4z+1|}{\sqrt{9+25+16}} \Rightarrow$$ 5

$$\frac{7x+y-6}{\sqrt{50}} = \pm\frac{3x+5y-4z+1}{\sqrt{50}}$$ 5

$$7x+y-6 = \pm(3x+5y-4z+1)$$

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = (7,1,0)\cdot(3,5,-4) = 7\cdot 3 + 1\cdot 5 + 0(-4)$$ 5
$$= 21 + 5 = 26 > 0$$

(+) توافق المستوي المنصف الخارجي
(−) توافق المستوي المنصف الداخلي.

$$7x+y-6 = 3x+5y-4z+1$$ 5
$$\boxed{4x-4y+4z-7=0}$$ معادلة المستوي المنصف الخارجي

$$7x+y-6 = -3x-5y+4z-1$$
$$\boxed{10x+6y-4z-5=0}$$ معادلة المستوي المنصف الداخلي 5

السؤال الثالث: (٢٠ درجة)

أوجد معادلة المستقيم المحدد بالفصل المشترك للمستويين

$$P_1 \equiv x + y + z - 5 = 0$$
$$P_2 \equiv y - 3z - 1 = 0$$

الحل: إن متجه توجيه المستقيم المطلوب هو $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\vec{v} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$ 6

لنوجد الآن نقطة كيفية من المستقيم

لنفرض $x = 0$

$$y + z - 5 = 0 \quad (1) \Rightarrow \boxed{y = 5 - z} \quad (3)$$
$$y - 3z - 1 = 0 \quad (2)$$

نعوض (3) في (2)

$$5 - z - 3z - 1 = 0 \Rightarrow -4z = -4 \Rightarrow \boxed{z = 1}$$ 3

$$y = 5 - z = 5 - 1 = 4 \quad , \quad M_0(x_0, y_0, z_0) = (0, 4, 1)$$

المعادلات الوسيطية للمستقيم:

6
$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha\lambda \\ y &= y_0 + \beta\lambda \\ z &= z_0 + \gamma\lambda \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 0 - 4\lambda \\ y &= 4 + 3\lambda \\ z &= 1 + \lambda \end{aligned}$$ 5

إذا أعطى الطالب وضع

$$\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{1}$$

السؤال الرابع (30 درجة)

1) أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلتي المستقيم الناظم للسطح المعطى ديكارتياً

$$F(x,y,z) = 12y^2 - xz + z^3$$

في النقطة $M_0(1,0,1)$

الحل:

$$F'_x = -z \qquad F'_{x_0} = -1$$

$$F'_y = 24y \qquad F'_{y_0} = 0$$

$$F'_z = -x + 3z^2 \qquad F'_{z_0} = 2$$

5

$$\vec{N}(F'_{x_0}, F'_{y_0}, F'_{z_0}) = (-1, 0, 2)$$

5

معادلتي المستقيم الناظم

$$\frac{X - x_0}{F'_{x_0}} = \frac{Y - y_0}{F'_{y_0}} = \frac{Z - z_0}{F'_{z_0}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{X-1}{-1} = \dfrac{Z-1}{2} \\ Y = 0 \end{cases}$$

معادلة المستوي المماس:

$$F'_{x_0}(X - x_0) + F'_{y_0}(Y - y_0) + F'_{z_0}(Z - z_0) = 0$$

5

$$-(X-1) + 2(Z-1) = 0$$

$$\boxed{-X + 2Z - 1 = 0}$$

5

امتحان مقرر الهندسة تحليلية

كلية العلــوم الثانية — لطلاب الفيزياء- مستنفذين — المدة: ساعتين

قسم الفيزياء — الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤-٢٠١٥ — الدرجة : ١٠٠

السؤال الأول (٢٥ درجة):

سطح معادلته الديكارتية : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 5 = 0$

و المطلوب: ١) أوجد معادلة هذا السطح بالإحداثيات الكروية.

٢) عين الانسحاب المناسب لجملة المحاور الاحداثية بحيث تحذف الحدود الخطية.

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي و الخارجي للزاوية بين المستويين:

$$P_1 \equiv -x + 3y - 2z + 3 = 0$$
$$P_2 \equiv 2x - y + 3z - 7 = 0$$

السؤال الثالث (٢٥ درجة):

١)أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(2,-1,0)$ و المعامد للمستقيم المار من النقطتين $M_1(1,0,-2),\ M_2(-2,2,1)$

٢) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المحدد بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$$
$$P_2 \equiv -x + y + z - 5 = 0$$

السؤال الرابع(٢٥ درجة):

أوجد معادلتي المستقيم الناظم و معادلة المستوي المماس للسطح المعطى ديكارتياً:

$$F(x,y,z) = x^4 + 2x^2y + z^3 - 3 = 0$$

في النقطة $M_0(1,0,1)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

فيزياء مستنفذين

1) سطح معادلة الديكارتية

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-5=0$$

a) أوجد معادلة هذا السطح بالاحداثيات الكروية.

b) عين الانسحاب المناسب لجملة المحاور الاحداثية بحيث تحذف الحدود الخطية. (25 درجة)

الحل:

a) بالانتقال من الاحداثيات الديكارتية إلى الكروية:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad 6$$
$$z = r\cos\theta$$

نعوض في معادلة السطح:

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta + 2r\sin\theta\cos\varphi + 4r\sin\theta\sin\varphi - 5 = 0$$

$$r^2\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} + r^2\cos^2\theta + 2r\sin\theta$$

$$r^2\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{=1} + r\sin 2\theta(\cos\varphi+2\sin\varphi) - 5 = 0 \qquad 3$$

$$\boxed{r\sin 2\theta(\cos\varphi+2\sin\varphi) = 5 - r^2}$$

b) بإجراء انسحاب مناسب:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \\ z &= z_0 + Z \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{نعوض في المعادلة}} \quad 6$$

$$(x_0+X)^2+(y_0+Y)^2+(z_0+Z)^2+2(x_0+X)+4(y_0+Y)-5=0 \qquad 3$$

$$x_0^2+2x_0X+X^2+y_0^2+2y_0Y+Y^2+z_0^2+2z_0Z+Z^2+2x_0+2X+4y_0+4Y-5=0$$

$$X^2+Y^2+Z^2+(2x_0+2)X+(2y_0+4)Y+2z_0Z+x_0^2+y_0^2+z_0^2+2x_0+4y_0-5=0$$

نحذف الحدود الخطية

$$2x_0+2=0 \Rightarrow x_0=-1$$
$$2y_0+4=0 \Rightarrow y_0=-2 \qquad 6 \Rightarrow \begin{cases} x=-1+X \\ y=-2+Y \\ z=Z \end{cases} \quad 1$$
$$2z_0=0 \Rightarrow z_0=0$$

2) أوجد معادلة المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين (25 درجة)

$$P_1 \equiv -x+3y-2z+3=0$$
$$P_2 \equiv 2x-y+3z-7=0$$

الحل:

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \qquad 5$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \qquad 2$$

$$\frac{-x+3y-2z+3}{\dots} = \pm\frac{2x-y+3z-7}{\dots} \Rightarrow -x+3y-2z+3 = \pm(2x-y+3z-7)$$

$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2} = -1(2)+3(-1)-2(3) = -2-3-6 = -11 < 0$

(+) توافق المنصف الداخلي

(-) توافق المنصف الخارجي

المستوي المنصف الداخلي هو:

$$-x+3y-2z+3 = 2x-y+3z-7$$

$\boxed{3x-4y+5z-10=0}$ المستوي المنصف الداخلي

المستوي المنصف الخارجي:

$$-x+3y-2z+3 = -2x+y-3z+7$$

$\boxed{x+2y+z-4=0}$ المستوي المنصف الخارجي

3) اوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(2,-1,0)$ والعامد للمستقيم المار من النقطتين $M_1(1,0,-2)$ و $M_2(-2,2,1)$

ثم اوجد معادلات الوسيطية للمستقيم الذي يربط تقاطع المستويين:

$$P_1 \equiv 2x+y-z+1=0$$
$$P_2 \equiv -x+y+z-5=0$$

(م>25) :

الحل a: معادلة المستوي المار من النقطة (x_0,y_0,z_0) والعامد لـ $\vec{w}(a,b,c)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$ax+by+cz+d=0$$

المستوي يمر من $\Leftarrow M(2,-1,0)$

$$a(x-2)+b(y+1)+cz=0$$

المستوي معامد للمستقيم المار من النقطتين M_1 و M_2 اي ان $\vec{w}(a,b,c)$ ناظم المستوي موازي لـ $\overrightarrow{M_1M_2}$ اي ان ناظم المستوي $\vec{w}(a,b,c)$ هو:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-3,+2,+3)$$

$$-3(x-2)+2(y+1)+3z=0$$

$$-3x+2y+3z+6+2=0 \Rightarrow \boxed{3x-2y-3z-8=0}$$

b) المعادلات الوسيطية للمستقيم:

$$x = x_0+\alpha\lambda$$
$$y = y_0+\beta\lambda$$
$$z = z_0+\gamma\lambda$$

لنوجد متجه توجيه المستقيم $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\vec{v} = \vec{w_1}\times\vec{w_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$$

لنوجد نقطة من المستقيم نأخذ مثلاً $x=0$ نعوض

$$\left.\begin{matrix} y-z+1=0 \\ y+z-5=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{بالجمع}} 2y-4=0 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow 2-z+1=0 \Rightarrow \boxed{z=3}$$

المعادلات الوسيطية للمستقيم:

$$\left.\begin{matrix} x = 2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 3+3\lambda \end{matrix}\right\}$$

4) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس للسطح المعطى ديكارتياً

$$F(x,y,z) = x^4 + 2x^2 y + z^3 - 3 = 0$$

(25 درجة) في النقطة $M_0(1,0,1)$.

الحل :

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 4x^3 + 4xy \\ F'_y &= 2x^2 \\ F'_z &= 3z^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} F'_{xM_0} &= 4(1)^3 + 4(1)(0) = 4 \\ F'_{yM_0} &= 2(1)^2 = 2 \\ F'_{zM_0} &= 3(1)^2 = 3 \end{aligned}$$

5

معادلتي المستقيم الناظم

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y - y_0}{F'_{y_0}} = \frac{z - z_0}{F'_{z_0}}}$$

5

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{3} \quad , \quad \boxed{\frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}}$$

5 معادلتي المستقيم الناظم

معادلة المستوي المماس

$$\boxed{F'_{x_0}(x - x_0) + F'_{y_0}(y - y_0) + F'_{z_0}(z - z_0) = 0}$$

5

$$4(x-1) + 2(y-0) + 3(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{4x + 2y + 3z - 7 = 0}$$

5

مع التمنيات

بالتوفيق والنجاح

مكتبة

A to Z