

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

اسئلة دورات محلولة

خليل رياضي ١

A 2 Z LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم 0931497960 TEL:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

اسم الطالب:

المدة: ساعتان

الدرجة: تسعون

امتحان مقرر تحليل رياضي 1

سنة أولى رياضيات

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2024-2025

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (40 درجة)

- (1) أثبت أن كل متتالية مقاربة محدودة.
- (2) أثبت وفق تعريف كوشي للتقارب أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{2n+3} = \frac{3}{2}$.
- (3) أوجد نهاية متتاليتين فقط من المتتاليات الآتية:
- (4) ادرس تقارب ثلاثة فقط من المتسلسلات الآتية:

1) $u_n = -3n^2 - \cos 3n$

2) $v_n = \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 5}$

3) $w_n = \frac{9^{n-1} - 5}{3^{2n} + 2}$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n+1}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt[n]{n^2}}$

السؤال الثاني: (50 درجة)

- (1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:
- 1) $y = e^{\sin(\sqrt{x})} + \arccos(x^2)$
- 2) $x = \frac{\sin^2(t)}{t}$, $y = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)$
- 3) $y \operatorname{arccot}(x) + y^2 = th(x)$
- (2) أوجد النهايات الآتية:
- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$
- (3) أوجد قيمة الثابت A لكي يكون التابع $f(x)$ مستمر عند $x = 0$
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & ; x \neq 0 \\ A & ; x = 0 \end{cases}$$
- (4) أوجد قيمة x المعطاة بالشكل:
- $$x = \arctan(\sqrt{3}) + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

د. بشرى دراج



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 1 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (40 درجة)

(1) أثبت أن كل متتالية متقاربة محدودة.

(2) أثبت وفق تعريف كوشي للتقارب أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{2n+3} = \frac{3}{2}$.

(3) أوجد نهاية متتاليتين فقط من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = -3n^2 - \cos 3n$

2) $v_n = \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 5}$

3) $w_n = \frac{9^{n-1} - 5}{3^{2n} + 2}$

(4) ادرس تقارب ثلاثة فقط من المتسلسلات الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{n+1}{n^2}\right)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n+1}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt[5]{n^2}}$

الحل:

(1) (5 درجات للمبرهنة)

(2) (5 درجات)

الحل: يجب تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| < \varepsilon &\Rightarrow \left| \frac{3n-5}{2n+3} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{-19}{2(2n+3)} \right| = \frac{19}{2(2n+3)} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{19}{2\varepsilon} < 2n+3 \Rightarrow n > \frac{1}{2} \left(\frac{19}{2\varepsilon} - 3 \right) \end{aligned}$$

أي وجد العدد الطبيعي $n_0 = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{19}{2\varepsilon} - 3 \right) \right\rceil$ يحقق شرط كوشي للتقارب ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{2n+3} = \frac{3}{2}$

(3) (6 درجات لكل متتالية يتم اختيارها)

$$u_n = -3n^2 - \cos 3n \quad \checkmark$$

$$1 \geq \cos 3n \geq -1$$

$$-3n^2 + 1 \geq -3n - \cos 3n \geq -3n^2 - 1$$

$$-3n + 1 \geq u_n \geq -3n - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -3n^2 + 1 = -\infty \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} -3n^2 - 1 = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$$

$$v_n = \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 5} \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3} = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1 \quad \text{بحيث}$$

$$w_n = \frac{9^{n-1} - 5}{3^{2n+2}} \quad \checkmark$$

$$w_n = \frac{3^{2n} \times \left(\frac{1}{9} - \frac{5}{3^{2n}} \right)}{3^{2n} \times \left(1 + \frac{2}{3^{2n}} \right)} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{5}{3^{2n}}}{1 + \frac{2}{3^{2n}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3^{2n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3^{2n}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{1}{9}$$

(4) (6 درجات لكل متسلسلة يتم اختيارها)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \checkmark$$

بالاعتماد على اختبار الجذر النوني لكوشي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{n+1}{n^2} \right) \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{n+1}{n^2} \right) = 1 \neq 0$$

فالمتسلسلة متباعدة حسب الاختبار الصفري.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n+1}} \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{3^{2n+3}} \times \frac{3^{2n+1}}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{9} = \infty > 1$$

بالتالي المتسلسلة متباعدة حسب اختبار دالامبير.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt[5]{n^2}} \quad \checkmark$$

نأخذ متسلسلة القيمة المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt[5]{n^2}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt[5]{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{12}{5}}}$$

$$\alpha = \frac{12}{5} > 1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt[5]{n^2}}$ متقاربة حسب ريمان، ومنه المتسلسلة المتناوبة متقاربة لأن متسلسلة القيم المطلقة متقاربة.

السؤال الثاني: (50 درجة)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y = e^{sh(\sqrt{x})} + \arccos(x^2)$ 2) $x = \frac{\sin^2(t)}{t}$, $y = 2 \cos^2(\frac{1}{2}t)$

3) $y \operatorname{arccot}(x) + y^2 = th(x)$

(2) أوجد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$

(3) أوجد قيمة الثابت A لكي يكون التابع $f(x)$ مستمر عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & ; x \neq 0 \\ A & ; x = 0 \end{cases}$$

(4) أوجد قيمة x المعطاة بالشكل:

$$x = \arctan(\sqrt{3}) + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

الحل:

(1) (6 درجات لكل مشتق)

$$y = e^{sh(\sqrt{x})} + \arccos(x^2) \quad \checkmark$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{ch(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} e^{sh(\sqrt{x})} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$x = \frac{\sin^2(t)}{t} , y = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) \quad \checkmark$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sin t \cdot (2t \cdot \cos t - \sin t)}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t\right) = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{2t \cdot \cos t - \sin t}$$

$$y \operatorname{arccot}(x) + y^2 = th(x) \quad \checkmark$$

$$\frac{dy}{dx} \operatorname{arccot}(x) - \frac{y}{1+x^2} + 2y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} (\operatorname{arccot}(x) + 2y) = \frac{1}{ch^2 x} + \frac{y}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{ch^2 x} + \frac{y}{1+x^2}}{\operatorname{arccot}(x) + 2y}$$

(2) (6 درجات لكل نهاية)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

نطبق أوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{3x}}{4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln(\cos 3x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos 3x)}$$

حسب أوبيتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos 3x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin 3x}{2x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{-9}{2 \cos 3x} = \frac{-9}{2} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} &= e^{-\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+1}{x-1} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) \quad \checkmark$$

(3) (8 درجات)

يكون التابع مستمر عند $x = 0$ إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

لدينا $f(0) = A$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0 \quad ; \quad \text{حسب أوبيتال}$$

ومنه $A = 0$

(4) (6 درجات)

$$y = \arctan(\sqrt{3}) \Rightarrow \tan y = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{\pi}{3} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \arctan(\sqrt{3}) + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{12}$$

مدرس المقرر: د. بشري دراج

Atol

اسم الطالب:

المدة: ساعتان

الدرجة: 90

امتحان مقرر تحليل رياضي 1

سنة أولى رياضيات

الدورة الفصلية الأولى - العام الدراسي 2024-2025

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 درجة)

(1) أثبت أن "كل متتالية متقاربة هي متتالية لكوشي".

(2) أثبت وفق تعريف كوشي للتقارب أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{2n+3} = \frac{3}{2}$

(3) أوجد نهاية متالتين فقط من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = \frac{a^n}{n}; a > 1$

2) $w_n = \sqrt[n]{3n^4 - 3n^3 + 5}$

3) $w_n = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$

(4) ادرس تقارب ثلاثة فقط من المتسلسلات الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^7}}$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

السؤال الثاني: (45 درجة)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y = x^x + e^{ch(\sqrt{x})}$ 2) $x = \sqrt{\sin t}, y = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)$

3) $y^2 \cot(x) + y = \arctan(x)$

(2) أوجد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$

(3) بين أن التابع $f(x) = \sin(2x)$ مستمر بانتظام على المجال $[0, \pi]$.

(4) أوجد قيمة x المعطاة بالشكل:

$x = \arctan(-\sqrt{3}) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 1 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الأولى - العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (45 درجة)

(1) أثبت أن "كل متتالية متقاربة هي متتالية لكوشي".

(2) أثبت وفق تعريف كوشي للتقارب أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{2n+3} = \frac{3}{2}$

(3) أوجد نهاية متتاليتين فقط من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = \frac{a^n}{n}; a > 1$

2) $v_n = \sqrt[n]{3n^4 - 3n^3 + 5}$

3) $w_n = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$

(4) ادرس تقارب ثلاثة فقط من المتسلسلات الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^7}}$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

الحل:

(1) 8 درجات للمبرهنة

(2) 7 درجات

الحل: يجب تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$
$$|u_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{3n-5}{2n+3} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{-19}{2(2n+3)} \right| = \frac{19}{2(2n+3)} < \varepsilon$$

محرر

$$\Rightarrow \frac{19}{2\varepsilon} < 2n + 3 \Rightarrow n > \frac{1}{2} \left(\frac{19}{2\varepsilon} - 3 \right)$$

أي وجد العدد الطبيعي $n_0 = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{19}{2\varepsilon} - 3 \right) \right\rceil$ يحقق شرط كوشي للتقارب ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{2n+3} = \frac{3}{2}$

(3) (6 درجات لكل متتالية)

$$u_n = \frac{a^n}{n}; a > 1 \quad \checkmark$$

لدينا المتتالية $(s_n = n)$ متزايدة و $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ عندئذ يمكن تطبيق مبرهنة ستولز على المتتالية u_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n-1}(a-1)}{1} = \infty$$

$$v_n = \sqrt[n]{3n^4 - 3n^3 + 5} \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4} \cdot \sqrt[n]{3 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^4 \sqrt[n]{3 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^4}} = 1 \times 1 = 1$$

$$w_n = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + 2 + 3 + \dots + n} \quad \checkmark$$

$$w_n = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}}{n \times \frac{n+1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n^2 + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n^2 + n} = \frac{1 - 0}{\infty} = 0$$

(4) (6 درجات لكل متسلسلة)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \checkmark$$

بالاعتماد على اختبار كوشي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3} \right)^n} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^7}} \quad \checkmark$$

نأخذ متسلسلة القيمة المطلقة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}$$

$$\alpha = \frac{7}{3} > 1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}$ متقاربة حسب ريمان ومنه المتسلسلة المتناوبة متقاربة لأن متسلسلة القيم المطلقة متقاربة.

بدر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!} \quad \checkmark$$

$$u_n = \frac{n!}{(2n-1)!!} \quad \text{نأخذ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!!} \times \frac{(2n-1)!!}{(n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$ متقاربة بالاعتماد على اختبار دلامبير.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \checkmark$$

نقارن مع المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$ حسب متسلسلة ريمان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3} \times \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 < \infty$$

بالتالي المتسلسلتان من طبيعة واحدة ومنه المتسلسلة المطلوبة متقاربة.

السؤال الثاني: (45 درجة)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

$$1) y = x^x + e^{ch(\sqrt{x})} \quad 2) x = \sqrt{\sin t}, \quad y = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$3) y^2 \cot(x) + y = \arctan(x)$$

(2) أوجد النهايات الآتية:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$$

(3) بين أن التابع $f(x) = \sin(2x)$ مستمر بانتظام على المجال $[0, \pi]$.

(4) أوجد قيمة x المعطاة بالشكل:

$$x = \arctan(-\sqrt{3}) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

الحل:

(1) 6 درجات لكل مشتق

$$y = x^x + e^{ch(\sqrt{x})} \quad \checkmark$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = (\ln x + 1)x^x + \frac{sh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} e^{ch(\sqrt{x})}$$

$$x = \sqrt{\sin t}, \quad y = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) \quad \checkmark$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}t\right) = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2 \sin t \cdot 2\sqrt{\sin t}}{\cos t} = -2 \tan t \cdot \sqrt{\sin t}$$

$$y^2 \cot(x) + y = \arctan(x) \quad \checkmark$$

$$2yy' \cot(x) - \frac{y^2}{\sin^2 x} + y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y'(2y \cot x + 1) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{y^2}{\sin^2 x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{y^2}{\sin^2 x}}{2y \cot x + 1}$$

(2) (6 درجات لكل نهاية)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{4}{3x}\right) \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{3x}\right)^{\frac{3x}{4}}\right]^{\frac{4}{3}} = \ln\left(e^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0} \quad \text{عدم تعيين}$$

نطبق أوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

نطبق أوبيتال مرة ثانية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+1}{x-1} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

(3) (5 درجات)

التابع $\sin(2x)$ معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ فهو معرف ومستمر على المجال المغلق $[0, \pi]$ ، بالتالي حسب مبرهنة كانتور

يكون التابع $\sin(2x)$ مستمر بانتظام على المجال $[0, \pi]$.

دروس

(4) (4 درجات)

$$y = \arctan(-\sqrt{3}) \Rightarrow \tan y = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\frac{\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \arctan(-\sqrt{3}) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{12}$$

✓ بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأی طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشري دراج

اسم الطالب:

امتحان مقرر تحليل رياضي 1

جامعة طرطوس

المدة: ساعتان

سنة أولى رياضيات

كلية العلوم

الدرجة: 90

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2024-2023

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (35 درجة)

(1) أثبت أن كل متتالية متقاربة محدودة.

(2) أوجد نهاية متالتين فقط من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = \sqrt[n]{(n+1)!}$

2) $v_n = \sqrt[n]{3n^3 - 2n^2 + 1}$

3) $w_n = \frac{3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1}}{2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}}$

(3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+2}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$

السؤال الثاني: (55 درجة)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y = e^{ch(\sqrt{x})} + \cos(x^2)$

2) $x = \sqrt{\cos t}$, $y = 2 \sin^2(t)$

3) $y^3 \tan(x) + y^2 = \arcsin(x)$

(2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى الغير معدومة من منشور ماك لوران للتابع $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

(3) أوجد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \arctan \frac{1}{2-x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x}$

(4) ادرس نوع نقطة الانقطاع $x = 0$ للتابع $f(x)$ بحيث

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}}$$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشري دراج

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 1 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (35 درجة)

- (1) أثبت أن كل متتالية متقاربة محدودة.
- (2) أوجد نهاية متالتين فقط من المتتاليات الآتية:
- 1) $u_n = \sqrt[n]{(n+1)!}$ 2) $v_n = \sqrt[n]{3n^3 - 2n^2 + 1}$ 3) $w_n = \frac{3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1}}{2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}}$
- (3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$

الحل:

- (1) 5 درجات للمبرهنة
- (2) 6 درجات لكل متتالية يتم اختيارها
- $u_n = \sqrt[n]{(n+1)!} \quad \checkmark$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$
- $v_n = \sqrt[n]{3n^3 - 2n^2 + 1} \quad \checkmark$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} = 1$
- بحيث $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} = 3 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$

دروس

$$w_n = \frac{3+9+27+\dots+3^{n-1}}{2+4+8+\dots+2^{n-1}} \quad \checkmark$$

$$w_n = \frac{3 \times \left(\frac{1-3^{n-1}}{1-3} \right)}{2 \times \left(\frac{1-2^{n-1}}{1-2} \right)} = \frac{3}{4} \left(\frac{1-3^{n-1}}{1-2^{n-1}} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{\frac{1}{3^{n-1}} - 1}{\frac{1}{2^{n-1}} - 1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \infty$$

(3) (6 درجات لكل متسلسلة يتم اختيارها)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)} \quad \checkmark$$

بالاعتماد على اختبار الجذر النوني لكوشي

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{\frac{(n+1)}{-2}} \right]^{-2} = e^{-2} < 1 \end{aligned}$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}$ متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \\ \alpha &= \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ متباعدة حسب ريمان.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+2} \quad \checkmark$$

نقارنها مع المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+2} \cdot \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{2 + \frac{1}{n}}}{n+2} = \sqrt{2}$$

بالتالي المتسلسلتان من طبيعة واحدة ومنه المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+2}$ متباعدة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}} \quad \checkmark$$

نأخذ متسلسلة القيمة المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$

بالاعتماد على اختبار دالامبير

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} < 1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$ متقاربة حسب دالامبير بالتالي المتسلسلة المتناوبة متقاربة لأن متسلسلة القيم المطلقة متقاربة.

السؤال الثاني: (55 درجة)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y = e^{ch(\sqrt{x})} + \cos(x^2)$ 2) $x = \sqrt{\cos t}$, $y = 2 \sin^2(t)$

3) $y^3 \tan(x) + y^2 = \arcsin(x)$

(2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى الغير معدومة من منشور ماك لوران للتابع $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

(3) أوجد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \arctan \frac{1}{2-x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x}$

(4) ادرس نوع نقطة الانقطاع $x = 0$ للتابع $f(x)$ بحيث

$$f(x) = \frac{\frac{-3}{e^x} + \frac{3}{e^x}}{\frac{-3}{e^x} - \frac{3}{e^x}}$$

الحل:

(1) (6 درجات لكل مشتق)

$y = e^{ch(\sqrt{x})} + \cos(x^2)$ ✓

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{sh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} e^{ch(\sqrt{x})} - 2x \sin(x^2)$$

$x = \sqrt{\cos t}$, $y = 2 \sin^2 t$ ✓

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-\sin t}{2\sqrt{\cos t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4 \sin t \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -8 \cos t \sqrt{\cos t}$$

$y^3 \tan(x) + y^2 = \arcsin(x)$ ✓

$$3y^2 y' \tan(x) + \frac{y^3}{\cos^2 x} + 2y y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'(3y^2 \tan(x) + 2y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y^3}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y^3}{\cos^2 x}}{3y^2 \tan(x) + 2y}$$

(2) (10 درجات)

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$f(0) = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \Rightarrow f''(0) = \frac{1}{4}$$

$$f(x) \approx \ln 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

(3) (6 درجات لكل نهاية)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \infty \times 0 \text{ (عدم تعيين)}$$

نطبق أوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \arctan \frac{1}{2-x} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \arctan \frac{1}{2-x} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x} = \frac{0}{0} \text{ (عدم تعيين)}$$

نطبق أوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{0}{0}$$

نطبق أوبيتال مرة ثانية

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{-\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x}} = \frac{1}{2}$$

(4) (9 درجات)

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{3}{x}} - e^{-\frac{3}{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}} = \frac{\infty}{-\infty} \text{ (عدم تعيين)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{3}{x}} \left(e^{\frac{-6}{x}} + 1 \right)}{e^{\frac{3}{x}} \left(e^{\frac{-6}{x}} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{-6}{x}} + 1}{e^{\frac{-6}{x}} - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (عدم تعيين)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{-3}{x}} \left(1 + e^{\frac{6}{x}} \right)}{e^{\frac{-3}{x}} \left(1 - e^{\frac{6}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + e^{\frac{6}{x}}}{1 - e^{\frac{6}{x}}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

بالتالي $x = 0$ نقطة انقطاع من النوع الأول ببقعة طولها 2 : $\left| \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right| = 2$

مدرس المقرر: د. بشري دراج

درس

اسم الطالب:

امتحان سقر تحليل رياضي 1

جامعة طرطوس

المدة: ساعتان

سنة أولى رياضيات

كلية العلوم

الدرجة: 90

الدورة الفصائية الأولى - العام الدراسي 2023-2024

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (40 درجة)

(1) أثبت أن "كل متتالية متنازعة هي متتالية لكوشي".

(2) أوجد نهاية متتاليتين فقط من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = \sqrt[n]{(n+1)!}$

2) $v_n = \sqrt[n]{3n^4 - 3n^3 + 5}$

3) $w_n = \frac{4^{n-1} - 5}{2^{2n} - 7}$

(3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n+1}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^5}}$

السؤال الثاني: (50 درجة)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y = x^x + e^{ch(\sqrt{x})}$ 2) $x = \arcsin t$, $y = 2 \arccos\left(\frac{1}{2}t\right)$

3) $y^2 \operatorname{arccot}(x) + y = th(x)$

(2) أوجد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

3) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \arctan \frac{1}{2-x}$

(3) ليكن لدينا التابع $f(x) = \sin(2x)$ والمطلوب:

1. أوجد الحدود الأربعة الأولى الغير معدومة من متسلسلة تايلور التابع $f(x)$ بجوار $x = \frac{\pi}{6}$.

2. بين أن التابع $f(x)$ مستمر بانتظام على المجال $[0, \pi]$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

طرطوس 2023/2/26

المجموع متسلسلة 10

السؤال الأول: (40 درجة)

1) المتسلسلة (10 درجات)

$$u_n = \sqrt[n]{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty$$

$$2) u_n = \sqrt[n]{3n^4 - 3n^3 + 5} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4} \cdot \sqrt[n]{3 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^4}} = 1 \times 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^4 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^4} = 3$$

$$3) w_n = \frac{4^n - 5}{2^{2n} - 7} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{4^n} \right]}{4^n \left[1 - \frac{7}{4^n} \right]} = \frac{1}{4}$$

(6 درجات لكل متسلسلة مقارنة)

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} < 1 \Rightarrow \text{متسلسلة مقاربة}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow \text{متسلسلة المقاربة مع المتسلسلة} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 < \infty \Rightarrow \text{متسلسلة من الدرجة واحدة}$$

$$\text{فإن } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n} \text{ متسلسلة مقاربة}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n+1}} \Rightarrow \text{مباختيار الرتبة} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1$$

$$\Leftrightarrow \text{المتسلسلة مقاربة}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3\sqrt[n]{n^5}}$$

ندرس متسلسلة القيمة المطلقة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[n]{n^5}}$$

رعيان عيان $\alpha = \frac{5}{3} > 1$ فالمتسلسلة مقاربة

وبالتالي المتسلسلة المقاربة مقاربة

(6 درجات لكل متسلسلة مقارنة)

السؤال الثاني (50 نقطة)

① $y = x^x + e^{ch(\sqrt{x})} \Rightarrow y' = (\ln x + 1)x^x + \frac{ch(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \cdot e^{ch(\sqrt{x})}$ (1)

② $x = \arcsin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
 $y = 2\arccos(\frac{1}{2}t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}}$
 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}}$ (6 درجات)

③ $y^2 \arccot(x) + y = \tanh x$
 $\Rightarrow 2yy' \arccot x + \frac{y^2}{1+x^2} + y' = \frac{1}{ch^2 x}$
 $\Rightarrow y' = \frac{\frac{y^2}{1+x^2} + \frac{1}{ch^2 x}}{2y \arccot x + 1}$

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}$ (7 درجات)

② $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1$
 أو نكتب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ (7 درجات)

③ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \arctan \frac{1}{2-x} = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ (4 درجات)

③ $f(x) = \sin(2x)$ (8 درجات)
 $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $f'(x) = 2\cos(2x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = 1$
 $f''(x) = -4\sin(2x) \Rightarrow f''(\frac{\pi}{6}) = -2\sqrt{3}$
 $f'''(x) = -8\cos(2x) \Rightarrow f'''(\frac{\pi}{6}) = -4$
 $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} + (x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{6})^3$

لدينا $\sin 2x$ متغير R فهو متغير $[0, \pi]$ على $\sin 2x$ متغير كالتوزيع على $\sin$ متغير على $\sin$ ففقط فهو متغير بنظام على هذا المجال

السؤال الأول: (35 درجة)

(1) أثبت أن كل متتالية لكوشي في $\mathbb{R}$ هي متتالية متقاربة.

(2) أوجد نهاية متالتين فقط من المتتاليات الآتية:

- 1) $u_n = -3n - \cos 4n$ 2) $v_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n + 3^n}$ 3) $w_n = \frac{n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + 2n}$
- (3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n-1}}$$

السؤال الثاني: (55 درجة)

(1) أوجد $\frac{dy}{dx} = y'$ لكل مما يأتي:

$$1) y = x^x \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{2x-1}) + \tan(x^2) \quad 2) x = \sqrt{\sin t}, \quad y = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$3) y^2 \cot(x) + y = \arctan(x)$$

(2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى الغير معدومة من منشور مارك لوران للتابع $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

(3) ابحث عن وجود قيم موضوعية قصوى للتابع $f(x) = x^5 - \frac{20}{3}x^3$ مبيناً نوعها.

(4) أوجد النهايات الآتية:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3 - 1}$$

(5) ادرس نوع نقطة الانقطاع للتابع $f(x)$ عند $x = 0$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{2}{x}} + e^{\frac{2}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}} - e^{\frac{2}{x}}}$$

----- انتهت الأسئلة -----

مدرس المقرر: د. بشري حراج

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرطوس

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 1 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2022-2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (35 درجة)

(1) أثبت أن كل متتالية لكوشي في $\mathbb{R}$ هي متتالية متقاربة.

(2) أوجد نهاية متتاليتين فقط من المتتاليات الآتية:

$$1) u_n = -3n - \cos 4n \quad 2) v_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n + 3^n} \quad 3) w_n = \frac{n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + 2n}$$

(3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right) \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n-1}}$$

الحل:

(1) 5 درجات للمبرهنة

(2) 6 درجات لكل متتالية

$$u_n = -3n - \cos 4n \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \cos 4n \geq -1 \\ -3n + 1 &\geq -3n - \cos 4n \geq -3n - 1 \\ -3n + 1 &\geq u_n \geq -3n - 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} -3n + 1 &= -\infty \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} -3n - 1 = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \\ v_n &= \sqrt[n]{2^n + 5^n + 3^n} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{5^n} &\leq \sqrt[n]{2^n + 5^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 5^n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n} &= 5 \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 5^n} = 5 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 5 \end{aligned}$$

$$w_n = \frac{n^2}{1+2+3+\dots+2n} \quad \checkmark$$

$$w_n = \frac{n^2}{1+2+3+\dots+2n} = \frac{n^2}{2n \times \left(\frac{2n+1}{2}\right)} = \frac{n^2}{2n^2+n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$$

(3) (6 درجات لكل سلسلة)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \checkmark$$

بالاعتماد على اختبار كوشي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \times \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right) \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ متباعدة بالاعتماد على الاختبار الصفري.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \checkmark$$

نقارن مع السلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$ حسب سلسلة ريمان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3} \times \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 < \infty$$

بالتالي السلسلتان من طبيعة واحدة ومنه السلسلة المطلوبة متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n-1}} \quad \checkmark$$

ندرس سلسلة القيمة المطلقة

$$u_n = \frac{1}{e^{n-1}} \quad \text{نأخذ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{e^{n-1}}} = \frac{1}{e} < 1$$

بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n-1}}$ متقاربة حسب دالامبيرر بالتالي السلسلة المتناوبة متقاربة لأن سلسلة القيم المطلقة متقاربة.

السؤال الثاني: (55 درجة)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:



$$1) y = x^x \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{2x-1}) + \tan(x^2) \quad 2) x = \sqrt{\sin t}, \quad y = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$3) y^2 \cot(x) + y = \arctan(x)$$

(2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى الغير معدومة من منشور ماك لوران للتابع $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

(3) ابحث عن وجود قيم موضوعية قصوى للتابع $f(x) = x^5 - \frac{20}{3}x^3$ مبيّناً نوعها.

(4) أوجد النهايات الآتية:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3-1}$$

(5) ادرس نوع نقطة الانقطاع للتابع $f(x)$ عند $x = 0$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{2}{x}} + e^{\frac{2}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}} - e^{\frac{2}{x}}}$$

الحل:

(1) (5 درجات لكل مشتق)

$$y' = \frac{dy}{dx} = (\ln x + 1)x^x \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{2x-1}) + \frac{x^x}{\sqrt{2x-1}\sqrt{2x}} + \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

$$x = \sqrt{\sin t}, \quad y = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \cos\left(\frac{1}{2}t\right) = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2 \sin t \cdot 2\sqrt{\sin t}}{\cos t} = -2 \tan t \cdot \sqrt{\sin t}$$

$$y^2 \cot(x) + y = \arctan(x) \quad \checkmark$$

$$2y \dot{y} \cot(x) - \frac{y^2}{\sin^2 x} + \dot{y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\dot{y}(2y \cot x + 1) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{y^2}{\sin^2 x}$$

$$\dot{y} = \frac{\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{y^2}{\sin^2 x}}{2y \cot x + 1}$$

(2) (8 درجات)

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$f(0) = \ln(1 + e^0) = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$



$$\dot{f}(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow \dot{f}(0) = \frac{1}{4}$$

$$f(x) \approx \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

(3) (8 درجات)

$$\dot{f}(x) = 5x^4 - 20x^2$$

$$\dot{f}(x) = 0 \Rightarrow 5x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 2, \quad x = -2$$

نوجد $\dot{f}(x)$:

$$\dot{f}(x) = 20x^3 - 40x$$

نلاحظ بأن:

$$\dot{f}(0) = 0$$

$$\dot{f}(-2) = -80 < 0 \text{ بالتالي } f(-2) = \frac{64}{3} \text{ قيمة كبرى موضعياً.}$$

$$\dot{f}(2) = 80 > 0 \text{ بالتالي } f(2) = -\frac{64}{3} \text{ قيمة صغرى موضعياً.}$$

لتحديد نوع $x = 0$ نوجد المشتق الثالث $f'''(x) = 60x^2 - 40$ ومنه $f'''(0) = -40 \neq 0$

وبما أن مرتبة المشتق عدد فردي $n = 3 \Leftarrow$ ليس للتابع قيمة قصوى عند $x = 0$.

(4) (5 درجات لكل نهاية)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

نطبق أوبیتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{3x}}{4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{3x}\right)^{\frac{3x}{4}} \right]^{\frac{4}{3}} = \ln e^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3-1} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2-2x)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2\sin(2-2x)}{-2(x-1)} \times \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3-1} = -2 \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

طريقة ثانية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2 \cos(2-2x)}{3x^2} = -\frac{2}{3}$$

(5) (8 درجات)

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{2}{x}} + e^{\frac{2}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}} - e^{\frac{2}{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{2}{x}} + e^{\frac{2}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}} - e^{\frac{2}{x}}} = \frac{\infty}{-\infty} \text{ (عدم تعيين)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{2}{x}} + e^{\frac{2}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}} - e^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}} \left(e^{-\frac{4}{x}} + 1 \right)}{e^{\frac{2}{x}} \left(e^{-\frac{4}{x}} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{4}{x}} + 1}{e^{-\frac{4}{x}} - 1} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{2}{x}} + e^{\frac{2}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}} - e^{\frac{2}{x}}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (عدم تعيين)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{2}{x}} + e^{\frac{2}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}} - e^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{2}{x}} \left(1 + e^{\frac{4}{x}} \right)}{e^{-\frac{2}{x}} \left(1 - e^{\frac{4}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + e^{\frac{4}{x}}}{1 - e^{\frac{4}{x}}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

بالتالي $x = 0$ نقطة انقطاع من النوع الأول بقفزة طولها $\ell = 2$: $\ell = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - (-1) = 2$

مدرس المقيّد د. بشري دراج



اسم الطالب:

امتحان مقرر تحليل رياضي 1

جامعة طرطوس

المدة: ساعتان

سنة أولى رياضيات

كلية العلوم

الدرجة: 90

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2021-2022

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 د)

(1) أثبت صحة إحدى المبرهنتين التاليتين:

• المتتالية المتقاربة محدودة.

• من أي متتالية عددية محدودة يمكن إيجاد متتالية جزئية متقاربة.

(2) أوجد نهاية كل من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = 2n + \cos n$

2) $v_n = \frac{7^n - 9^n}{9n + 7n}$

3) $w_n = \frac{a^n}{n} ; a > 1$

(3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{(n+1)!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1}}{\sqrt{n} 6^{n^2}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n^3}}$

السؤال الثاني: (45 د)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكن مما يأتي:

1) $y = 4^x \operatorname{sh}^{-1}(\sqrt{2x-1})$

2) $x = \frac{\sin t}{t^2 + 4}$, $y = 2 \cos^3\left(\frac{1}{2}t\right)$

(2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى من منشور تايلور للتابع $f(x) = (x-1) \ln(2+x)$ بجوار $x = -1$.

(3) أوجد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^2 - x}$

(4) أوجد قيمة الثابت A لكي يكون التابع $f(x)$ مستمر عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & ; x \neq 0 \\ A & ; x = 0 \end{cases}$$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشري دراج

طرطوس في 2022/6/28

الم تجميع افغان عفر تحليل باهت 1/1

سوال اول:

(1) 12 درجتي لبرهه.

(2) 5 درجتي لبرهه.

$$① U_n = 2n + \cos n$$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow 2n - 1 \leq 2n + \cos n \leq 2n + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} 2n - 1 = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 1 = \infty \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty \quad \text{سبب باهت}$$

$$② U_n = \frac{7^n - 9^n}{9^n + 7^n} = \frac{9^n \left(\left(\frac{7}{9} \right)^n - 1 \right)}{9^n \left(1 + \left(\frac{7}{9} \right)^n \right)} = \frac{\left(\frac{7}{9} \right)^n - 1}{1 + \left(\frac{7}{9} \right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{7}{9} \right)^n - 1}{1 + \left(\frac{7}{9} \right)^n} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9} \right)^n = 0 \quad \leftarrow -1 < a = \frac{7}{9} < 1 \quad \text{سبب}$$

③ لينا (n) متتابعه متزايدة و $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ نطبق تور

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n-1}(a-1)}{1} = \infty$$

① $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n$ سوال اول

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{4}{n} \right)^{\frac{n}{4}} \right)^4 = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n} \right)^{\frac{n}{4}} \right)^4$$

$$= \ln e^4 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{سبب باهت باهت}$$

② $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{(n+1)!}$ سوال اول

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1}}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+2} = 0$$

$$\leftarrow \text{سبب باهت باهت} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{(n+1)!}$$

3)

هذا اختيار كوني

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n^2-1}}{\sqrt{n} \cdot 6^{n^2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n^2} \times \frac{1}{2}}{\sqrt{n} \times 3^{n^2} \times 2^{n^2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} (3^{n^2})^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{(n)^{\frac{1}{2n}} 3^n} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{مقاربة}$$

4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$$

• $\alpha = \frac{7}{2} > 1$ مقاربة

المقاربة في 5 درجات

1) $y = 4^x \sinh^{-1}(\sqrt{2x-1})$

$$\frac{dy}{dx} = (\ln 4) 4^x (\sinh^{-1}(\sqrt{2x-1})) + \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1} + 1} \times 4^x$$

2) $\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t (t^2+4) - 2t \sin t}{(t^2+4)^2}$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \times \frac{1}{2} \times (-3 \sin(\frac{1}{2}t)) \cdot \cos^2(\frac{1}{2}t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{-3 \sin(\frac{1}{2}t) \cdot \cos^2(\frac{1}{2}t) (t^2+4)^2}{(t^2+4) \cos t - 2t \sin t}$$

21

$$f(x) \approx f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!} (x+1) + \frac{f''(-1)}{2!} (x+1)^2$$

$$f(-1) = -2 \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \ln(2+x) + \frac{x-1}{2+x} \Rightarrow f'(-1) = 0 + \frac{-2}{1} = -2$$

$$f''(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{3}{(2+x)^2} \Rightarrow f''(-1) = 1 + 3 = 4$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{4\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{4 \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty \text{ indeterminate}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos 3x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3\sin 3x}{2x \cos 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cos 3x}{2 \cos 3x - 6x \sin 3x} = \frac{-9(1)}{2(1) - 0} = \frac{-9}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{9}{2}}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2 \cos(2-2x)}{2x - 1} = -2$$

e^0 is a continuous function at $x=0$ is a continuous function f is continuous at $x=0$ 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

A=0 at $x=0$ is a continuous function f is continuous at $x=0$ 4

اسم الطالب:	امتحان مقرر تحليل رياضي 1	جامعة طرطوس
المدة: ساعتان	الدورة الفصلية الأولى - سنة أولى رياضيات	كلية العلوم
الدرجة: 90	العام الدراسي 2021-2022	قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 د)

(1) أثبت صحة إحدى المبرهنتين التاليتين:

- كل متتالية لكوشي هي متتالية محدودة.
- من أي متتالية عددية محدودة يمكن إيجاد متتالية جزئية متقاربة.

(2) أوجد نهاية كل من المتتاليات الآتية:

$$1) u_n = \frac{n + \sin n}{n^2 + 1} \quad 2) v_n = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{3^n} \quad 3) w_n = \frac{a^n}{n}; a > 1$$

(3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1}}{\sqrt{n} 6^{n^2}} \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}$$

السؤال الثاني: (45 د)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكن مما يأتي:

$$1) y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + 2^x \operatorname{ch} 4x \quad 2) x = 2 \cos \sqrt{t}, \quad y = \frac{3 \sin^2 t}{t}$$

(2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى من منشور تايلور للتابع $f(x) = \ln(\sqrt{2+x})$ بجوار $x = -1$.

(3) أوجد النهايات الآتية:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2 + 2x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sqrt{x+1}}$$

(4) أوجد قيمة الثابتين a, b المختلفين عن الصفر لكي يكون التابع

$$f(x) = \begin{cases} |x| + \frac{\sin^3 ax}{x^3} & ; x < 0 \\ 8 & ; x = 0 \\ \sqrt{x} + b & ; x > 0 \end{cases}$$

مستمر عند $x = 0$.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

طرطوس في 2022/2/26

المبرهنة: (قوس ح)

في درجته يكون في:

$$U_n = \frac{n + \sin n}{n^2 + 1} \Rightarrow$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow n-1 \leq n + \sin n \leq n+1 \Rightarrow \frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n + \sin n}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2+1} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

صغيرة
التي

$$U_n = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{3^n} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) = -\left(\frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$W_n = \frac{a^n}{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \quad \text{فناية} \quad (n! = n)$$

المتتالية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n-1}(a-1)}{1} = \infty (a-1) = \infty$$

$$\textcircled{1} \sum \ln \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln e^3 = 3 \neq 0$$

المتتالية متباعدة

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$$

مع دالاجير

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = 0 < 1 \Rightarrow$$

المتتالية متقاربة

$$\textcircled{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1}}{\sqrt{n} \cdot 6^{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{n^2}}{6^{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{n^2}$$

مع الجذر التربيعي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^n$$

$$= 1 \times 1 \times 0 = 0 < 1 \Rightarrow$$

مع الجذر النوني

3) $u_n = 2 \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}} = 2 \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot n^{\frac{1}{2}}}$ نأخذ هذه السلسلة العينة لعلنا نجد

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^{\frac{5}{2}}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ وهذه متسلسلة هارمونيك $\alpha = \frac{5}{2} > 1$ متقاربة
متقاربة $\Rightarrow$ السلسلة المطلقة متقاربة

1) $y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + 2^x \cdot \operatorname{ch} 4x$ المشتق في:

$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \times \frac{1 \times \sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \times x}{\sqrt{1+x^2}} + (\ln 2) \times 2^x \times \operatorname{ch} 4x$
 $+ 4 \times 2^x \operatorname{sh} 4x$

2) $\frac{dx}{dt} = -2 \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin \sqrt{t}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{(6 \cos t \sin t)(t) - 3 \sin^2 t}{t^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{6t \cos t \sin t - 3 \sin^2 t}{t^2}}{-\frac{1}{\sqrt{t}} \sin \sqrt{t}}$ (2)

$x = -1$ بجاء $f(x) = \ln \sqrt{2+x}$

$f(x) \approx f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!} (x+1) + \frac{f''(-1)}{2!} (x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!} (x+1)^3$

$f(-1) = \ln \sqrt{1} = 0$

$f'(x) = \frac{1}{2x+4} \Rightarrow f'(-1) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{-2}{(2x+4)^2} \Rightarrow f''(-1) = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = \frac{8}{(2x+4)^3} \Rightarrow f'''(-1) = 1$

$$\Rightarrow f(x) \approx 0 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1)^3$$

نقطة الحد f عند $x=0$ (نقطة الحد)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad (\text{نقطة الحد})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + \frac{a^3 (\sin ax)^3}{ax} = 0 + a^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + b$$

$$\Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\boxed{b = 8}$$

نقطة الحد f عند $x=0$ (نقطة الحد)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2 + x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{نقطة الحد}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2x + 1} = \frac{1 + 0}{\infty + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cos 3x \cdot \cos 3x - (-3 \sin 3x)(-3 \sin 3x)}{(\cos 3x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9}{2 \cos^2 3x} = -\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \quad \text{indeterminate}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \sin x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

اسم الطالب:

المدة: ساعتان

الدرجة: 90

امتحان مقرر تحليل رياضي 1

الدورة الفصلية الثانية - سنة أولى رياضيات

العام الدراسي 2020-2021

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 د)

(1) أثبت أن " كل متتالية مقاربة هي متتالية لكوشي".

(2) أوجد نهاية ثلاثة فقط من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = \frac{n \sin n}{n^2 + 1}$

2) $v_n = \frac{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$

3) $w_n = \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 5}$

4) $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$

(3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}$

السؤال الثاني: (45 د)

(1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + 2^x \ln x$ 2) $y^2 + y \sin x = 1$ 3) $x = 2 \cos^2 t, \quad y = 3 \sin^2 t$

(2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى من منشور تايلور للتابع $f(x) = (x-1) \ln(2+x)$ بجوار $x = -1$.

(3) أوجد كل من النهايتين التاليتين:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2 + 2x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}$

(4) أوجد قيمة الثابت A لكي يكون التابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 3x + 2} & ; x \neq 1 \\ A & ; x = 1 \end{cases}$$

مستمر عند $x = 1$.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

طرطوس في 2021/8/11

اسم صبيح مقرر تحليل رياضي / 1 - رياضيات

سؤال اول

البرهان: نقرر من ان (u_n) متقاربة عن الصدا l ودرجات

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists n_0(\varepsilon') \in \mathbb{N} : |u_n - l| < \varepsilon' \quad \forall n > n_0$$

لنقرر $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ ولسي $n > m > n_0$ عنده

$$|u_n - u_m| = |u_n - l + l - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow u_n < u_m < u_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |u_n - u_m| < \varepsilon \quad \forall n > m > n_0$ المتتالية متقاربة

درجات كذا

$$① -1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow \frac{-n}{n^2+1} \leq \frac{n \sin n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n^2+1} = 0$$

متتالية n متزايدة و $+\infty$ $\Leftarrow$ متتالية متزايدة

$$② \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}) - (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n-1]{n-1})}{n - (n-1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$③ u_n = \sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{2 - \frac{3}{n} + \frac{15}{n^3}} = (\sqrt[n]{n})^3 \cdot \sqrt[n]{2 - \frac{3}{n} + \frac{15}{n^3}} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 - \frac{3}{n} + \frac{15}{n^3}} = 1$$

$$④ S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = 1 \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} (1 - (\frac{1}{3})^{n+1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2} (1 - 0) = \frac{3}{2}$$

درجات كذا

$$① \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{متتالية متزايدة و لا تتقارب}$$

$$② \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{متقاربة من الصدا}$$

$$③ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

المتتالية متقاربة من الصدا اختيار الجذر النوني (كروني)

④ $2^{\frac{(x+1)^n}{n^2\sqrt{n}}} \Rightarrow x = \frac{5}{2} > 1$ لأن $x > 1$ ، فمقاربة $2^{\frac{1}{n^2\sqrt{n}}} = 2^{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}}$
 $\Leftarrow$ المقاربة $2^{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}}$ مقاربة $2^{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}}$ المقاربة مقاربة

① $y' = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2}} + \ln 2 \cdot 2^x \cosh x + 2^x \sinh x$

② $2yy' + y' \sin x + y \cos x = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y \cos x}{2y + \sin x}$

③ $\frac{dy}{dt} = -4 \sin t \cdot \cos t, \frac{dy}{dt} = 6 \cos t \cdot \sin t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}$

② $f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x+1) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x+1)^2$: در جا

$f(x_0) = -2 \ln(1) = 0$

$f'(x) = \ln(2+x) + \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x_0) = -2$

$f''(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow f''(x_0) = 4$

$\Rightarrow f(x) \approx 0 - 2(x+1) + \frac{4}{2!} (x+1)^2 = -2(x+1) + 2(x+1)^2$

① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x^2 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{أبنياد}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2x + 2} = 0$: در جا

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{-\frac{1}{\sqrt{1+x}}} = +1$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$: در جا
 Σf عند $x=1$ منتهى اذا كان

$A = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 3x + 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \times \frac{1}{x-2}$
 $= 1 \times (-1) = (-1)$

أو من أبنياد لـ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$A = -1$

اسم الطالب:

المدة: ساعتان

الدرجة: 90

امتحان مقرر تحليل رياضي 1

الفصل الأول - سنة أولى رياضيات

العام الدراسي 2020-2021

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (25 درجة)

(1) أثبت أن "المتتالية المقاربة محدودة" ثم أعطي مثال يبين أن العكس ليس صحيح بالضرورة.

(2) احسب نهاية كل من المتتاليات الآتية:

$$1) u_n = \frac{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n},$$

$$2) v_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^n,$$

$$3) w_n = \frac{4^n + 7^n}{4^n - 7^n}$$

السؤال الثاني: (20 درجة)

ادرس تقارب السلاسل الآتية:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{5}{2}\right)^n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+4}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3}}$$

السؤال الثالث: (15 د)

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في كل من الحالات الآتية:

$$1) y = \arcsin(x^2 + 1) \ln(chx)$$

$$2) x = \frac{\sin t}{t^2 + 4}, \quad y = 2 \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$3) xy^2 + y \ln x = 0$$

السؤال الرابع: (10 د)

بين نوع نقطة الانقطاع للتابع f الآتي عند $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1 - 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

السؤال الخامس: (10 د)

أوجد النهايتين التاليتين

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x + e^{-x} - 2}$$

السؤال السادس: (10 د)

أوجد الحدود الأربعة الأولى من منشور ماك لوران للتابع

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشري دراج

طرطوس في 2021/2/15

لم نضع مادة تحليل رياضي في السنة الأولى رياضيات

سؤال 25: لدينا (u_n) متتالية عددية متقاربة من عدد l أي

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |u_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

$$|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| \leq \varepsilon + |l|$$

$$k = \max\{\varepsilon + |l|, |u_1|, \dots, |u_{n_0}|\}$$

عندئذ نتحقق المتراجحة $|u_n| \leq k$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي المتتالية مقبوضة.

* المتتالية $u_n = (-1)^n$ مقبوضة ولكن متباعدة. (2)

2 (1) $u_n = \frac{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$ متتالية موجبة و $u_n \rightarrow +\infty$ وبالتالي حسب

قولن: (5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}) - (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n-1]{n-1})}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(2) $u_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^n$

$u_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^n = \left(\frac{n}{n(1+\frac{3}{n})}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{3}{n})^n} = \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^3}$

(3) $w_n = \frac{4^n + 7^n}{4^n - 7^n} = \frac{7^n \left(\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1\right)}{7^n \left(\left(\frac{4}{7}\right)^n - 1\right)}$

$= \frac{\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1}{\left(\frac{4}{7}\right)^n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$ و $\left(\frac{4}{7}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

السؤال الثاني: 20 (2)

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{5}{2}\right)^n} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{5}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{2}\right)^n \left[\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right)^n + 1\right]} =$

$\stackrel{(5)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{2}\right)^n} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{3}{10}\right)^n + 1} = \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2} \neq c$

السلسلة متباعدة لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \neq c$ (الخاصة لـ د. باوي السطر).

السؤال الثالث: 20 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+4}$ ندرس السلسلة المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}$ بالمقارنة مع السلسلة

الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3n+4}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 1$ إذن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}$ متباعدة.

شكلاً أم لا؟ أي متتالية الكسور متباعدة

$f(n) = \frac{1}{3n+4} \Rightarrow f'(n) = \frac{-3}{(3n+4)^2} < 0$

لذلك $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+4} = 0$ حسب ليميت المقارنة.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)}{(n+1)2} = 0 < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$ متباعدة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow \text{متقاربة (المعيار)} \quad \left(\frac{5}{2} > 1\right)$$

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{2x \ln(ch) + \frac{shx}{chx} \cdot \arcsin(x^2+1)}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t (t^2+4) - 2t \sin t}{(t^2+4)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin \frac{1}{2} t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-\sin \frac{1}{2} t (t^2+4)^2}{(t^2+4) \cos t - 2t \sin t}$$

$$(3) y^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} \ln x + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 - \frac{y}{x}}{2xy + \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \ln x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \ln x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 2^{-x}}{1 - 2^{-x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} (2^{\frac{1}{x}} - 1)}{2^{\frac{1}{x}} (2^{\frac{1}{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ $\Rightarrow$ النقطة $x=0$ نقطة انقطاع من النوع الأول
بقفزة $\sqrt{2} > 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$$

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f''(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = +\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f'''(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3$$



فرع 1
تجمع الكليات (كلية العلوم)
فرع 2

الكورنيش الشرقي جانب MTN

مكتبة



طباعة محاضرات - قرطاسية

Mob: 0931 497 960

