ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

اسئلة دورات محلولة

# تحليل عددي ٢

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Zمكتبة



ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس | تحليل عددي (٢) _ السنة | الاسم: ....................
كلية العلوم _ قسم الرياضيات | الدورة التكميلية ٢٠٢٤-٢٠٢٥ | الدرجة ٧٠

---

## السؤال الاول: (24) درجة

1- لتكن لدينا الدالة $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ فوق المجال $[-1,+1]$ والمطلوب: أوجد تقريب تشبتشيف التربيعي لها اذا علمت أن دالة الوزن: $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2 - استخدم طريقة التقريبات المتتالية لإيجاد الجذر التقريبي $(x_2,y_2)$ لجملة المعادلتين:

$$f_1(x,y)=\sin(x-0.6)-y=1.6$$
$$f_2(x,y)=3x-\cos y=0.9$$

علماً أن $(x_0,y_0)=(0.1,-1.9)$

## السؤال الثاني: (21) درجة

1 - أوجد كثيرة حدود هرميت التقريبية للدالة المعطاة بالجدول التالي:

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 |
| $y_i$ | 1 | 0 |
| $y'_i$ | −1 | 0 |

واحسب قيمة تقريبية لها عند النقطة $x=0.5$ واحسب الخطأ المقتطع الاعظمي.

2 - استخدم طريقة سيمبسون على قاعدة ثلاث مجالات جزئية $(n=3)$ لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل: $I=\int_1^2 x\,e^x\,dx$ واحسب الخطأ المقتطع الاعظمي.

## السؤال الثالث: (25) درجة

1- استخدم طريقة غاوس ليجندر من أجل ثلاث نقاط غاوسية $(N=3)$ لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل:

$$I=\int_0^{+1}(2x-1)^2.e^{(2x-1)}dx$$

2- استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة التالية: $y''+y'-y=e^t$ و $t\in[0,1]$ والشروط الابتدائية $y(0)=1$ ، $y'(0)=1$ ، بخطوة $h=0.1$

---

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

طرطوس في ٢٢/١٠/٢٠٢٥م | مدرس المقرر: أ.د. نضال ابراهيم حسن

$\boxed{24}$ أربع وعشرون

إجابة السؤال الأول : 1- ) لنوجد أولاً كثيرة الحدود الخطية: $P_1(x)=a_0T_0(x)+a_1T_1(x)$

12

وبما أن $T_0=1,\ T_1=x$ فنجد :

$$P_1(x)=a_0+a_1x$$

لنوجد الثوابت $a_0, a_1$ :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}w(x)f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}=0.63662$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}T_1(x)w(x)f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}x\,dx=0 \Rightarrow P_1(x)=0.63662$$

لنوجد كثيرة الحدود التربيعية :

$$P_2(x)=P_1(x)+a_2T_2(x)$$

وبما أن : $T_2=2x^2-1$ لنوجد $a_2$ :

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}w(x)T_2(x)f(x)dx$$

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}T_2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}(2x^2-1)dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{3}x^3-x\right]_{-1}^{+1}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-2}{3}\right)=-0.424413$$

$$P_2(x)=0.63662-0.424413(2x^2-1)=1.06103-0.848826x^2$$

---

2- ) من المعادلة الأولى نعزل $y$ ومن المعادلة الثانية نعزل $x$ فنحصل على :

12

$$x=\frac{1}{3}\cos y+0.3=g_1(x,y)$$

$$y=\sin(x-0.6)-1.6=g_2(x,y)$$

نلاحظ أن الشرط محقق لأن :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}=0,\ \frac{\partial g_2}{\partial x}=\cos(x-0.6),\ \frac{\partial g_1}{\partial y}=-\frac{1}{3}\sin y,\ \frac{\partial g_2}{\partial y}=0$$

فنجد :

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right|=|\cos(x_0-0.6)|<1$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right|=\left|-\frac{1}{3}\sin y_0\right|<1$$

لنطبق دستور التقريبات المتتالية :

$$x_{i+1}=g_1(x_i,y_i)=\frac{1}{3}\cos y_i+0.3 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3}\cos(-1.9)+0.3=0.19228$$

$$y_{i+1}=g_2(x_i,y_i)=\sin(x_i-0.6)-1.6 \Rightarrow y_1=\sin(0.1-0.6)-1.6=-2.07346$$

$$x_2=\frac{1}{3}\cos(-2.07346)+0.3=$$

$$y_2=\sin(0.19228-0.6)-1.6=$$

(12)

إجابة السؤال الثاني : 1-)

$\boxed{21}$ إهداء [illegible]

$$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1} S_j(x)\,f_j+\sum_{j=0}^{1} R_j(x)\cdot f'_j$$
$$=S_0(x)f_0+S_1(x)f_1+R_0(x)f'_0+R_1(x)f'_1$$
$$=S_0(x)-R_0(x)$$

$$S_0(x)=\left[1-2(x-x_0)L'_0(x)\right]L_0^2(x)$$

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-1}{0-1}=1-x \Rightarrow L'_0(x_0)=-1$$

$$S_0(x)=\left[1-2(x-0)(-1)\right](1-x)^2=(1+2x)(1-x)^2$$

$$R_0(x)=(x-x_0)L_0^2(x)=x(1-x)^2$$

$$H_3(x)=(1+2x)(1-x)^2-x(1-x)^2=x^3-x^2-x+1$$

$$H_3\left(\tfrac{1}{2}\right)=0.375$$

$$E_T\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}{4!}f^{(4)}(c)\quad : c\in]0,1[$$

$$f^{(4)}(c)=4! \Rightarrow E_T\left(\tfrac{1}{2}\right)=\left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\right|=\frac{1}{16}=0.0625$$

---

2-) لدينا $n=3 \Leftarrow m=\frac{n}{3}=1 \Leftarrow h=\frac{b-a}{3}=\frac{2-1}{3}=0.33333$

(9)

$x_0=1 \Rightarrow f_0=f(1)=e=2.76828$

$x_1=1.33333 \Rightarrow f_1=5.05822$

$x_2=1.66667 \Rightarrow f_2=8.82415$

$x_3=2 \Rightarrow f_3=14.77810$

$$S=\frac{3h}{8}\left[f_0+3f_1+3f_2+f_3\right]=7.39294$$ وحدة مساحة مربعة

$$f^{(4)}(x)=(4+x)\cdot e^x \Rightarrow \max_{x\in[x_0,x_3]} f^{(4)}(x)=(4+2)\cdot e^2$$

$$E_T(h)=\left|\frac{b-a}{80}h^{(4)}f^{(4)}(c)\right|\le\left|\frac{2-1}{80}(0.33333)^4\cdot 6\cdot e^2\right|=6.84\times E-3$$

إجابة السؤال الثالث: 1-) يجب أن يكون الحل على المجال $[-1,+1]$ لذلك يجب تغيير المتحول

$\boxed{25}$ خمسة وعشرون 13

ثم نستخدم لحساب $L_3(t)$ ونحسب $t_1, t_2, t_3$

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t+1) \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$$

$$f(t) = \left[2\left(\tfrac{1}{2}(t+1)\right) - 1\right]^2 \cdot e^{2\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)-1} = t^2 \cdot e^{t}$$

نغير حدود التكامل :

$$x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1 \quad , \quad x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(t+1) = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t] = 0 \Rightarrow t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} , t_2 = 0 , t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

بالحل المشترك نجد :

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9} , w_2 = \frac{8}{9}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} w_i f(t_i)$$

$$\begin{cases} f(t_1) = \frac{3}{5} e^{-\sqrt{\frac{3}{5}}} = 0.27653 \\ f(t_2) = 0 \\ f(t_3) = \frac{3}{5} e^{\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1.30183 \end{cases}$$

$$S = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_2 f(t_3)$$
$$= \frac{5}{9}[0.27653 + 1.30183] = 0.87686$$

تتمة السؤال الثالث : 2-) لدينا $t_0=0$ ، $b=1$ ، $h=0.1$ المطلوب هو $y_1$ و $\delta y_1$

12

أولاً : نحوّل المسألة إلى جملة معادلتين :

$$y' = z = f_1(t,y,z) \quad , \quad z' = y - z + e^t = f_2(t,y,z)$$

$$y(0)=1,\ z(0)=1 \quad , y_0 = z_0 = 1$$

نحسب الحل العددي $y_1$ عندما $t = t_0 + h = 0.1$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{1}{2}[K_1 + K_2] \quad , \quad z_1 = z_0 + \tfrac{1}{2}[L_1 + L_2]$$

$$K_1 = h f_1[t_0, y_0, z_0] = h z_0 = 0.1$$

$$L_1 = h f_2[t_0, y_0, z_0] = h(y_0 - z_0 + e^{t}) = 0.1$$

$$K_2 = h f_1[t_0 + h, y_0 + K_1, z_0 + L_1) = h(z_0 + L_1) = 0.11$$

$$L_2 = h f_2[t_0 + h, y_0 + K_1, z_0 + L_1) = h[(y_0 + K_1) - (z_0 + L_1) + e^{t_0 + h}]$$

$$= 0.1[1.1 - 1.1 + e^{0.1}] = 0.110517$$

$$z_1 = 1 + \tfrac{1}{2}[0.1 + 0.110517] = 1.10526 \quad , \quad y_1 = 1.105$$

الخطأ في الحل العددي $t_1 = 0.1$

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t)| = |1.105 - e^{0.1}| = 1.709 \times 10^{-4}$$

جامعة طرطوس — تحليل عددي (٢) _ السنة الرابعة — الاسم: ...................

كلية العلوم _ قسم الرياضيات — الفصل الاول ٢٠٢٤-٢٠٢٥ — الدرجة ٧٠

---

- **السؤال الاول: (23) درجة**

١ – استخدم طريقة هالي لإيجاد الجذر التقريبي البسيط $(m=1)$ للمعادلة $3x+\sin x-e^{x}=0$
علماً أن : $x_0=0$ ونكتفي ب $x_n$ الذي يحقق المعيار $|f(x)|\langle 1*E-5$

2- لتكن لدينا الدالة $f(t)=(t-1)\sqrt{2t-t^2}$ فوق المجال $[0,2]$ والمطلوب: أوجد تقريب تشبتشيف التربيعي لها اذا علمت أن دالة الوزن: $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- **السؤال الثاني: (23) درجة**

١-أوجد كثيرة حدود هرميت التقريبية للدالة المعطاة بالجدول التالي:

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 |
| $y_i$ | 1 | 0 |
| $y_i'$ | $-1$ | 0 |

واحسب قيمة تقريبية لها عند النقطة $x=0.5$ واحسب الخطأ المقتطع الاعظمي.

٢-استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية في إيجاد قيمة تقريبية لكل من المشتقين الثاني والثالث للدالة $f(x)=\sin(x-1)+x^3$ في النقطة $x=1$ ، و **h=0.1**، واحسب الخطأ المقتطع في كل حالة.

- **السؤال الثالث: (24) درجة**

١- استخدم طريقة غاوس ليجندر من أجل ثلاث نقاط غاوسية $(N=3)$ لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل :
$$I=\int_{-1}^{+1}x^2\cos x\,dx$$

٢- استخدم طريقة منشور تايلور من المرتبة الثانية لحل المعادلة التفاضلية التالية : $y''+y'+y=\cos t$
و $t\in[0,0.1]$ والشروط الابتدائية $y'(0)=1$ ، $y(0)=0$ ، بخطوة $h=0,1$

---

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

طرطوس في ٢٠٢٥/٢/٢٤م — مدرس المقرر: أ.د. نضال ابراهيم حسن

سلم توزيع الدرجات لمقرر تحليل عددي (2) - سنة رابعة رياضيات - فصل أول ٢٠٢٤/٢٠٢٥

23 درجة

إجابة السؤال الأول: 1-) 11

$$f'(x)=3+\cos x-e^{x}\ ,\ f''=-\sin x-e^{x}$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)\cdot f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-\frac{m}{2}f(x_k)\cdot f''(x_k)}\quad ,\quad m=1$$

لأن الجذر بسيط

$$x_1=x_0-\frac{(3x_0+\sin x_0-e^{x_0})(3+\cos x_0-e^{x_0})}{[3+\cos x_0-e^{x_0}]^2-\frac{1}{2}(3x_0+\sin x_0-e^{x_0})(-\sin x_0-e^{x_0})}=0.3529$$

$$x_2=x_1-\frac{(3x_1+\sin x_1-e^{x_1})[3+\cos x-e^{x}]}{[3+\cos x_1-e^{x_1}]^2-\frac{1}{2}(3x_1+\sin x_1-e^{x_1})(-\sin x_1-e^{x_1})}=0.36042$$

$$|f(x_2)|=4.26\times E-6<1\times E-5$$

يتحقق شرط التوقف، إذاً $x_2$ هو الجذر المطلوب $(n=2)$

---

2) 12

$$t=\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2}=x+1\ \Rightarrow\ x\in[-1,+1]$$

$$\Rightarrow f(x)=x\sqrt{1-x^2}\quad ,\ T_0=1,\ T_1=x,\ T_2=2x^2-1$$

$$P_2(x)=a_0T_0(x)+a_1T_1(x)+a_2T_2(x)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=0\quad ,\quad a_1=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}x.x\,dx=\frac{4}{3\pi}$$

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}x(2x^2-1)dx=0\ \Rightarrow P_2(x)=\frac{4}{3\pi}x\ ,\ x\in[-1,+1],\ x=t-1$$

$$P_2(t)=\frac{4}{3\pi}(t-1)\quad ,\ t\in[0,2]$$

السؤال الثاني : 1-) 10

23 درجة

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f'_j$$

$$= S_0(x) \overset{1}{f_0} + S_1(x) \overset{0}{f_1} + R_0(x) \overset{-1}{f'_0} + R_1(x) \overset{0}{f'_1}$$

$$= S_0(x) f_0 + R_0(x)(-1) = S_0(x) - R_0(x)$$

$$S_0(x) = [1 - 2(x - x_0) L'_0(x)] L_0^2(x) \quad , \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-1}{0-1} = 1 - x ,$$

$$L'_0(x) = -1 \Rightarrow L'_0(x_0) = -1$$

$$S_0(x) = [1 - 2(x-0)(-1)](1-x)^2$$

$$= (1+2x)(1-x)^2$$

$$R_0(x) = (x - x_0) L_0^2(x) = x(1-x)^2$$

$$\Rightarrow H_3(x) = (1+2x)(1-x)^2 - x(1-x)^2$$

$$= (1-x)^2(1+x) = (1-x^2)(1-x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

يكفي أن نذكر عبارة الخطأ المركب لأن صيغة الدالة غير معطاة :

$$E_T(x) = \frac{(x-x_0)^2 (x-x_1)^2}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \; : \; c \in [x_0, x_n] \quad , \quad n = 3$$

$$E_T(x) = \frac{(x-x_0)^2 (x-x_1)}{4!} f^{(4)}(c)$$

---

2-) الاشتقاق من المرتبة الثانية 6

13

$$d_2(x,h) = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\right]$$

$$f(x+h) = f(1.1) = \sin(1.1-1) + (1.1)^3 = 0.0983 + 1.331 = 1.43083$$

$$f(x-h) = f(0.9) = \sin(-0.1) + (0.9)^3 = -0.09983 + 0.729 = 0.62917$$

$$f(x) = f(1) = 1$$

$$d_2(1, 0.1) = \frac{1}{(0.1)^2}\left[1.43083 + 0.62917 - 2\right] = 5.999 \cong 6$$

$$E(1,h) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) \; : \; c \in [1-h, 1+h] \; , \Rightarrow E(1,h) = -\frac{h^2}{12} \cdot M ;$$

$$M = \max\{|f^{(4)}(1-h)|, |f^{(4)}(1+h)|\} \Rightarrow f^{(4)}(x) = \sin(x-1) \Rightarrow f^{(4)}(1-h) = \sin(-0.1) = -0.09983$$

$$f^{(4)}(1+h) = \sin(1.1) = 0.891207$$

تتمة حل السؤال الثاني 2-)

7

$$E(1,h) = -\frac{(0.1)^2}{12}(0.891207) = 0.00074267$$

المشتقة من الرتبة الثالثة :

$$d_3(x,h) = \frac{1}{2h^3}\left[f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)\right]$$

$$d_3(1, 0.1) = \frac{1}{2(0.1)^3}\left[f(1.2) - 2f(1.1) + 2f(0.9) - f(0.8)\right] = 5.00249$$

$$E(1,h) = \frac{h^2}{2} f^{(5)}(c) : c \in [x-2h, x+2h] \Rightarrow E(1,h) = \frac{h^2}{2} \cdot M :$$

$$M = \max\{|f^{(5)}(x-2h)|, |f^{(5)}(x+2h)|\}$$

$$f^{(5)}(x) = \cos(x-1) \Rightarrow f^{(5)} = \cos(1-1) = 1 \Rightarrow E(1,0.1) = \frac{(0.1)^2}{2}(1) = 0.005$$

---

حل السؤال الثالث : 1-) لحساب $t_1, t_2, t_3$ بمعادلة

24

$$\frac{1}{2}[5t^3 - 3t] = 0$$

$$t[5t^2 - 3] = 0 \Rightarrow t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}},\ t_2 = 0,\ t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$ 12

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 2 \\ -\sqrt{\tfrac{3}{5}}\, w_1 + \sqrt{\tfrac{3}{5}}\, w_3 &= 0 \\ \tfrac{3}{5} w_1 + \tfrac{3}{5} w_3 &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow w_1 = w_3 = \frac{5}{9},\ w_2 = \frac{8}{9}$$

$$I = \sum_{i=1}^{3} w_i f(t_i) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

$$f(t_1) = t_1^2 \cos t_1 = 0.4288219,\ f(t_2) = t_2^2 \cos t_2 = 0,\ f(t_3) = 0.4288219$$

$$I = \frac{5}{9}(0.4288219) + \frac{5}{9}(0.4288219) = 0.476469$$

تتمة حل السؤال الثاني : 2-) نفرض أن $y' = z$ وبالتالي :

$$f_1(t,y,z) \equiv y' = z$$

$$f_2(t,y,z) \equiv z' = y'' = -y - z + \cos t$$

$$y(0) = 1 \ , \ z(0) = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_i, y_i, z_i)$$

$$z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_i, y_i, z_i)$$

$$f_1'(t,y,z) = z' = -y - z + \cos t$$

$$f_2'(t,y,z) = -y' - z' - \sin t \quad = -z' - (-y - z + \cos t) - \sin t = y - \cos t - \sin t$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + h z_0 + \frac{h^2}{2}(-y_0 - z_0 + \cos t_0)$$

$$= 0 + (0.1)(1) + \frac{(0.1)^2}{2}(-0 - (+1) = 0.1$$

$$z_1 = z_0 + h(-y_0 - z_0 + \cos t_0) + \frac{h^2}{2}(y_0 - \cos t_0 - \sin t_0)$$

$$= 1 + (0.1)(-0 - 1 + 1) + \frac{(0.1)^2}{2}(0 - 1 - 0) = 1 - 0.005 = 0.995$$

جامعة طرطوس　　　　تحليل عددي ٢ سنة رابعة رياضيات　　　　الاسم

كلية العلوم　　　　الفصل الثاني ٢٠٢٣-٢٠٢٤　　　　الدرجة ٧٠

---

**السؤال الأول: (٣٠ درجة)**

١- احسب الخطأ المطلق والنسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x,y)=\dfrac{\ln(x.y)}{x^2e^y}$ في النقطة $(x,y)=(1.5,2.25)$ (اعداد مدورة)

٢- لتكن لدينا الدالة $f(t)=2t\sqrt{12t-4t^2}-8$ المعرفة والمستمرة على المجال $[+1,2]$ والمطلوب : أوجد كثيرة حدود تشبتشيف $P_2(x)$ واحسب القيمة التقريبية عند منتصف المجال واحسب الخطأ المطلق المرتكب

٣- استخدم طريقة التقريبات المتتالية لإيجاد الجذر التقريبي $(x_1,y_1)$ لجملة المعادلتين:

$$f_1(x,y)=\sin(x-0.6)-y=1.6$$
$$f_2(x,y)=3x-\cos y=0.9$$

علماً أن $(x_0,y_0)=(0.1,-1.9)$

**السؤال الثاني ( ٢٠ درجة )**

١-أوجد استيفاء هرميت التكعيبي للدالة المعرفة بالجدول التالي:

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 |
| $y_i$ | 0 | 1 |
| $y'_i$ | $-1$ | 4 |

٢- استخدم طريقة سيمبسون على قاعدة أربعة مجالات جزئية لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل

$$n=4\ ,\ I=\int_1^2 x^2\ln x\,dx$$

**السؤال الثالث: (٢٠ درجة )**

١- استخدم طريقة غاوس ليجندر من أجل ثلاث نقاط غاوسية $(N=3)$ لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل :

$$I=\int_{-1}^{+1} x^2\cos x\,dx$$

٢-استخدم طريقة منشور تايلور من المرتبة الثانية لحل المعادلة التفاضلية التالية : $y''+y'+y=\cos t$ و $t\in[0,0.1]$ والشروط الابتدائية $y'(0)=1$ ، $y(0)=0$ ، بخطوة $h=0,1$

---

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح
طرطوس في /٢٠٢٤/٨

مدرس المقرر
أ.د.نضال إبراهيم حسن

إجابة السؤال الثالث: 1- ) لنكتب الجملة المصفوفية :

20 عشرون

10

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

نحسب $t_1, t_2, t_3$ بجعل $L_3(t) = 0$ نجد:

$$\frac{1}{2}[5t^3 - 3t] = 0 \Rightarrow t(5t^2 - 3) = 0$$

نحصل على:

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}\,,\ t_2 = 0\,,\ t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

بالتعويض في الجملة المصفوفية وإجراء عملية الضرب نجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 2 \\ -\sqrt{\tfrac{3}{5}}\, w_1 + \sqrt{\tfrac{3}{5}}\, w_3 &= 0 \\ \tfrac{3}{5} w_1 + \tfrac{3}{5} w_3 &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}\right\}$$

بالحل المشترك $\Rightarrow w_1 = w_3 = \frac{5}{9}\,,\ w_2 = \frac{8}{9}$

$$S = \sum_{i=1}^{3} w_i f(t_i) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{3}{5}\cos\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] + \frac{5}{9}\left[\frac{3}{5}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] = 0.476469$$

2- ) قبل تطبيق الطريقة على المسألة يجب تخفيضها وتحويلها إلى جملة معادلتين كل منهما من المرتبة الأولى:

لذلك: نفرض أن: $z = y'$ $\Leftarrow$ $z' = y''$ بالتعويض في المعادلة نجد:

10

$$f_1(t, y, z) = y' = z \Rightarrow f_1'(t, y, z) = z' = -y - z + \cos t$$

$$f_2(t, y, z) = z' = f(t, y, z) = -y - z + \cos t$$

$$f_2'(t, y, z) = -y' - z' - \sin t = -z - (-y - z + \cos t) - \sin t = y - \cos t - \sin t$$

بالتعويض في الشرط الابتدائي:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + h f_1(t_0, y_0, z_0) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_0, y_0, z_0)$$

$$y_1 = y_0 + h z_0 + \frac{h^2}{2}(-y_0 - z_0 + \cos t_0) = 0 + 0.1(1) + \frac{(0.1)^2}{2}(-0 - 1 + 1) = 0.1$$

$$z_1 = z_0 + h f_2(t_0, y_0, z_0) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_0, y_0, z_0)$$

$$z_1 = z_0 + h(-y_0 - z_0 + \cos t_0) + \frac{h^2}{2}(y_0 - \cos t_0 - \sin t_0) = 1 + 0.1(-0 - 1 + 1) + 0.005(-1) = 0.995$$

إجابة السؤال الثاني : 1- (12)

(20) عشرون

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f'_j$$

$$= S_0(x) \overset{(0)}{f_0} + S_1(x) \overset{(1)}{f_1} + R_0(x) \overset{(-1)}{f'_0} + R_1(x) \overset{(4)}{f'_1}$$

$$= S_1(x) - R_0(x) + 4R_1(x)$$

$$S_1(x) = [1 - 2(x - x_1) L'_1(x)] L_1^2(x)$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x}{+1} = x \Rightarrow L'_0(x) = +1, \; L'_1(x_1) = +1$$

$$S_1(x) = [1 - 2(x-1)(1)] x^2 = 3x^2 - 2x^3$$

$$R_0(x) = (x - x_0) L_0^2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-1}{0-1} = 1 - x \Rightarrow L_0^2(x) = (1-x)^2$$

$$R_0(x) = x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3$$

$$R_1(x) = (x - x_1) L_1^2(x) = (x-1)x^2 = x^3 - x^2$$

$$H_3(x) = 3x^2 - 2x^3 - x^3 + 2x^2 - x + 4(x^3 - x^2) = x^3 + x^2 - x$$

$x_i = a + ih$ , $h = \frac{2-1}{4} = 0.5$ , $n = 4$ , $m = \frac{n}{4} = 1$ 2- (8)

$x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = 1.\,\mathrm{Ln}\,1 = 0$

$x_1 = 1.25 \Rightarrow f(x_1) = f_1 = 1.25\,\mathrm{Ln}(1.25) = 0.348662$

$x_2 = 1.5 \Rightarrow f(x_2) = f_2 = 1.5\,\mathrm{Ln}(1.5) = 0.912296$

$x_3 = 1.75 \Rightarrow f(x_3) = f_3 = 1.75\,\mathrm{Ln}(1.75) = 1.713820$

$x_4 = 2 \Rightarrow f(x_4) = f_4 = 2\,\mathrm{Ln}(2) = 2.77259$

$$S = \frac{2h}{45}[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4] = 1.07061$$

تتمة السؤال الأول (2-) قيمة الدالة عند نقطة مثلا:

$x=0 \Rightarrow P_2(0)=\frac{10}{\pi}$ ، $f(0)=3 \Rightarrow$ الخطأ المطلق $\delta_{P_2}=\left|\frac{10}{\pi}-3\right|=0.18309$

إجابة السؤال الأول: (3- من المعادلة الأولى نعزل y بالشكل:

10

$y=\sin(x-0.6)-1.6=g_2(x,y)$

من المعادلة الثانية نعزل x بالشكل:

$x=\frac{1}{3}\cos y+0.3=g_1(x,y)$

نلاحظ أن:

$\frac{\partial g_1}{\partial x}=0,\ \frac{\partial g_1}{\partial y}=-\frac{1}{3}\sin y,\ \frac{\partial g_2}{\partial x}=\cos(x-0.6),\ \frac{\partial g_2}{\partial y}=0$

وبالتالي تتحقق العلاقة:

$\left\{\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right|\right\}=|\cos(x-0.6)|<1 \ ;\forall x_0=0.1$

$\left\{\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right|\right\}=\left|-\frac{1}{3}\sin y\right|<1 \ ;\forall y_0=-1.9$

وبالتالي يمكن التعويض من الحل الابتدائي

$(x_0,y_0)=(0.1,-1.9)$ في الدساتير التكرارية

$x_{n+1}=g_1(x_n,y_n)=\frac{1}{3}\cos y_n+0.3$

$y_{n+1}=g_2(x_n,y_n)=\sin(x_n-0.6)-1.6$

وبالتالي نحصل على الحل التقريبي الأول $(x_1,y_1)$

$x_1=g_1(x_0,y_0)=\frac{1}{3}\cos(-1.9)+0.3=0.19228 \Rightarrow$

$y_1=g_2(x_0,y_0)=\sin(0.1-0.6)-1.6=-2.07946$

الحل التقريبي المطلوب:

$(x_1,y_1)=(0.19228,-2.07946)$

ملاحظة: كل طالب يحل أي سؤال بطريقة مختلفة عن الطريقة المطلوبة في الامتحان ينال نصف درجة السؤال (إذا كان الحل صحيحاً)

سلم توزيع الدرجات لمقرر تحليل عددي "2" سنة رابعة رياضيات فصل ثاني ٢٠٢٣ / ٢٠٢٤

إجابة السؤال الأول : 1-) 10 — 30 درجة

$$f(x,y)=\frac{\ln(1.5\times 2.25)}{(1.5)^2 e^{2.25}}=0.056980942$$

$$\delta_x \leq 5\times 10^{-2}$$

$$\delta_y \leq 5\times 10^{-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1-2\ln(x.y)}{x^3.e^y}=-0.04474519$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{yx^2e^y}-\frac{\ln(x.y)}{x^2.e^y}=-0.03616134$$

$$(\delta_f)_{max}\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\delta_x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\delta_y$$

$$=0.04474519\times 5\times 10^{-2}+0.03616134 2\times 5\times 10^{-3}=0.002418057 41$$

$$=0.00223725+0.000180807=0.002418057 41$$

$$(e_f)_{max}\leq\frac{(\delta_f)_{max}}{|f(x,y)|}=0.04243624$$

2-) 10 لتغيير المتحول نفرض متحول جديد بالشكل :

$$t=\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

نجد أن حدود المتحول الجديد : $x\in[-1,+1]$ لأنه عندما : $\begin{cases} x=-1 \text{ فإن } t=1 \\ x=+1 \text{ فإن } t=2 \end{cases}$

ولنأخذ دالة الوزن

$$W(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

بالتعويض في صيغة الدالة عن المتحول الجديد نجد :

$$F(x)=(x+3)\sqrt{1-x^2}$$

$$P_1(x)=a_0T_0(x)+a_1T_1(x) \quad ; \quad T_0(x)=1 \text{ و } T_1(x)=x$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}w(x)F(x)\,dx\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{(x+3)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{+1}=\frac{6}{\pi}$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{x(x+3)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{+1}=\frac{4}{3\pi}$$

$$P_1(x)=\frac{6}{\pi}+\frac{4}{3\pi}x \quad , \quad P_2(x)=P_1(x)+a_2T_2(x) \quad ; \quad T_2(x)=2x^2-1$$

$$a_2=\frac{\int_{-1}^{+1}(x+3)(2x^2-1)\,dx}{\int_{-1}^{+1}\frac{(2x^2-1)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx} \quad ; \quad a_2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}w(x)F(x)T_2(x)\,dx=\frac{-4}{\pi}$$

$$\Rightarrow P_2(x)=\frac{6}{\pi}+\frac{4}{\pi}x-\frac{4}{\pi}(2x^2-1)=\frac{10}{\pi}+\frac{4}{\pi}x-\frac{8}{\pi}x^2$$

سلم توزيع الدرجات لمقرر تحليل عددي 2 - سنة رابعة رياضيات - فصل أول $\frac{٢٠٢٤}{٢٠٢٣}$

22 شادي ...

إجابة السؤال الأول: 1- قيمة الدالة:

15

$f(1.5, 2.25) = (2.25)^{1.5} = 3.375$

الخطأ المطلق:

$$(\delta_f)_{max} \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta_y$$

$$\delta_x \le 5\times10^{-2}, \quad \delta_y \le 5\times10^{-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^x \ln y \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = (2.25)^{1.5}.\ln(2.25) = 2.73688948$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^x.\frac{x}{y} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = (2.25)^{1.5}.\frac{1.5}{2.25} = 2.25$$

$$(\delta_f)_{max} \le 2.73688948\times5\times10^{-2} + 2.25\times10^{-3}\times5 =$$

$$\le 0.136844474 + 0.01125 = 0.148094474$$

الخطأ النسبي:

$$(e_f)_{max} \le \frac{\delta_f}{|f|} = \frac{0.148094474}{3.375} = 0.043879844$$

ملاحظة: يمكن إعتبار ...... $\frac{\partial f}{\partial y} = x.y^{x-1}$ ويعطي نفس النتيجة وينال نفس الدرجة

2- لدينا $m=2$ , $n+1=4 \Rightarrow n=3$ إذاً يوجد أربعة أصفار

$x_k = \cos\frac{2k+1}{8}\pi$ $\qquad k=0,1,2,3$ $\qquad$ 12

$k=0 \Rightarrow x_0 = \cos\frac{\pi}{8} = 0.923879 \Rightarrow y_0 = 0.088947$

$k=1 \Rightarrow x_1 = \cos\frac{3\pi}{8} = 0.382683 \Rightarrow y_1 = 0.3626663$

$k=2 \Rightarrow x_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -0.382683 \Rightarrow y_2 = 0.3626663$

$k=3 \Rightarrow x_3 = \cos\frac{7\pi}{8} = -0.923879 \Rightarrow y_3 = 0.088947$

$$a_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{3} y_k = \frac{1}{4}\left[y_0+y_1+y_2+y_3\right] = 0.22580665$$

$$a_1 = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{3} y_k T_1(x_k) = \frac{2}{4}\sum_{k=0}^{3}\frac{x_k}{1+12x_k^2} = 0$$ بسبب التناظر

$$a_2 = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{3} y_k T_2(x_k) = \frac{2}{4}\sum_{k=0}^{3}\frac{2x_k^2-1}{1+12x_k^2} = -0.38709838$$

$$P_2(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x)$$

$$P_2(x) = -0.77419676x^2 + 0.61290503$$

إجابة السؤال الثاني : أ -

$$H_3(x)=\begin{cases} H_1(x) & : x\in[0,1] \\ H_2(x) & : x\in[1,2]\end{cases}$$

$$H_1(x)=\sum_{j=0}^{1} S_j(x)\,y_j+\sum_{j=0}^{1} R_j(x)\,y'_j$$

$$=S_0(x)y_0+S_1(x)y_1+R_0(x)y'_0+R_1(x)y'_1$$

$$=S_0(x)-2R_0(x)+R_1(x) \quad : \quad x\in[0,1]$$

$$S_0(x)=[1-2(x-x_0)L'_0(x_0)]L^2_0(x)$$

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=1-x \ , \ L'_0(x_0)=-1$$

$$S_0(x)=[1-2(x-0)(-1)](1-x)^2=(1+2x)(1-x)^2$$

$$R_0(x)=(x-x_0)L^2_0(x)=x(1-x)^2$$

$$R_1(x)=(x-x_1)L^2_1(x) \ , \ L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=x$$

$$R_1(x)=(x-1)x^2$$

$$H_1(x)=(1+2x)(1-x)^2-2x(1-x)^2+(x-1)x^2=x^3-2x+1$$

$$H_2(x)=\sum_{j=1}^{2} S_j(x)\,y_i+\sum_{j=1}^{2} R_j(x)\,y'_j \ , \quad x\in[1,2]$$

$$=S_1(x)y_1+S_2(x)y_2+R_1(x)y'_1+R_2(x)y'_2$$

$$=4S_2(x)+R_1(x)+8R_2(x)$$

$$S_2(x)=[1-2(x-x_2)L'_2(x_2)]L^2_2(x) \ , \quad L_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=x-1$$

$$L'_2(x)=1$$

$$S_2(x)=[1-2(x-2)(1)](x-1)^2=(5-2x)(x-1)^2$$

$$R_1(x)=(x-x_1)L^2_1(x) \ , \quad L_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=2-x$$

$$R_1(x)=(x-1)(2-x)^2$$

$$R_2(x)=(x-x_2)L^2_2(x) \quad L_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=x-1$$

$$=(x-2)(x-1)^2$$

$$H_2(x)=4(5-2x)(x-1)^2+(x-1)(2-x)^2+8(x-2)(x-1)^2=x^3-x^2$$

تتمة إجابة السؤال الثاني: ١)

$$H_3(x)=\begin{cases} x^3-2x+1 & ; x\in[0,1] \\ x^3-x^2 & ; x\in[1,2]\end{cases}$$

إجابة السؤال الثاني: ٢) 10

$y'=y^2+1$

نحسب المشتقات الأربعة التالية حيث:

$$y_1=y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2!}y''_0+\frac{h^3}{3!}y'''_0+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}_0$$

$y'=y^2+1 \Rightarrow y'(0)=1$

$y''=2yy' \Rightarrow y''(0)=0$

$y'''=2yy''+2y'^2 \Rightarrow y'''(0)=2$

$y^{(4)}=6y'y''+2yy''' \Rightarrow y^{(4)}(0)=0$

$$y_1=0+(0.1)1+\frac{(0.1)^2}{2!}(0)+\frac{(0.1)^3}{3!}(2)+\frac{(0.1)^4}{4!}(0)=$$

$$=0.1+\frac{(0.1)^3}{3!}(2)=0.100333$$

---

إجابة السؤال الثالث: ١-) نعلم أن التكامل الغاوصي يجب أن يكون على المجال $[-1,+1]$ وهنا 23 ثلاث وعشرون

التكامل على المجال $[0,1]$ لذلك يجب تغيير المتحول بالشكل: 13

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$$

بالتعويض:

$$f(t)=[2(\tfrac{1}{2}(t+1)-1]^2\cdot e^{2[\frac{1}{2}(t+1)-1]}$$

$$f(t)=[(t+1)-1]^2\cdot e^{t+1-1}=t^2\cdot e^t$$

وتصبح حدود التكامل:

$$\left.\begin{array}{l} x=0\Rightarrow \frac{1}{2}(t+1)=0\Rightarrow t=-1 \\ x=1\Rightarrow \frac{1}{2}(t+1)=1\Rightarrow t=1\end{array}\right\} t\in[-1,+1]$$

وبالتعويض في التكامل نجد:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}t^2\cdot e^t\,dt$$

نستخدم $L_3(t)$ لحساب $t_1,t_2,t_3$:

$$L_3(t)=\frac{1}{2}[5t^3-3t]=0\Rightarrow t[5t^2-3]=0\Rightarrow t_1=-\sqrt{\frac{3}{5}},\ t_2=0,\ t_3=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

نكتب جملة الحل بالشكل المصفوفي:

بالتعويض نجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

بالحل المشترك نجد:

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9} \quad , \quad w_2 = \frac{8}{9}$$

$$f(t_1) = \frac{3}{5} \cdot e^{-\sqrt{\frac{3}{5}}} = 0.27653$$

$$f(t_2) = 0$$

$$f(t_3) = \frac{3}{5} e^{\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1.30183$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{3} w_i f(t_i)$$

$$= w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3) = \frac{5}{9}(0.27653 + 1.30183) = 0.87686$$

---

تتمة إجابة السؤال الثالث: ج-) لنحول المسألة المعطاة إلى جملة معادلتين: لنفرض $y' = z$ فيكون:

10

$$y' = z = f_1(t, y, z) \quad , \quad y(0) = 1$$

بالاشتقاق نجد: $y'' = z'$ بالتعويض في العلاقة:

$y'' = -y' + y + e^t$ نجد:

$$z' = -z + y + e^t = f_2(t, y, z) \quad , \quad z(0) = 1 \quad , \quad z_0 = y_0 = 1 \quad , \quad t_0 = 0$$

لنحسب الحل العددي $y_1, z_1$ بالشكل:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left[K_1^{(0)} + K_2^{(0)}\right] \quad , \quad z_1 = z_0 + \frac{1}{2}\left[L_1^{(0)} + L_2^{(0)}\right]$$

$$K_1^{(0)} = h f_1(t_0, y_0, z_0) = h z_0 = 0.1$$

$$L_1^{(0)} = h f_2(t_0, y_0, z_0) = h(y_0 - z_0 + e^{t_0}) = 0.1$$

$$K_2^{(0)} = h f_1(t_0 + h, y_0 + K_1^{(0)}, z_0 + L_1^{(0)}) = h(z_0 + L_1^{(0)}) = 0.11$$

$$L_2^{(0)} = h f_2(t_0 + h, y_0 + K_1^{(0)}, z_0 + L_1^{(0)}) = h\left[(y_0 + K_1^{(0)}) - (z_0 + L_1^{(0)}) + e^{t_0 + h}\right]$$

$$= (0.1)\left[1.1 - 1.1 + e^{0.1}\right] = 0.110517$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}[0.1 + 0.11] = 1.105$$

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}[0.1 + 0.110517] = 1.10526$$

سلم توزيع الدرجات لمقرر تحليل عددي "2" سنة 4 رياضيات-دورة تكميلية ٢٠٢٤/٢٠٢٣

إجابة السؤال الأول: ١- ) (10) 

درجة $\boxed{20}$

$$f(x,y,z)=f(1.009,2.1,3.05)=\frac{[\ln(1.009)][3.05]}{2.1}=0.013012957$$

$$\delta_x \leq 5\times10^{-4},\ \delta_y \leq 5\times10^{-2},\ \delta_z \leq 5\times10^{-3}$$

$$(\delta_f)_{max} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right|\delta_x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right|\delta_y+\left|\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right|\delta_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{x\cdot y} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right|=\frac{3.05}{2.1189}=1.439426117$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-\ln(x)\cdot z}{y^2} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right|=\left|\frac{-0.027327211}{4.41}\right|=0.006196646$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\ln(x)}{y} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right|=\frac{0.008959741}{2.1}=0.004266543$$

$$(\delta_f)_{max} \leq 1.439426117\times5\times10^{-4}+0.006196646\times5\times10^{-2}+0.004266543\times5\times10^{-3}$$

$$=0.000719713+0.0000213327+0.000309832=0.00105087$$

$$(e_f)_{max} \leq \frac{(\delta_f)_{max}}{|f|}=\frac{0.00105087}{0.013012957}=0.080756203$$

٢) (10)

$$f'(x)=3+\cos x-e^{x},\quad f''(x)=-\sin x-e^{x}$$

ولأن الجذر بسيط $(m=1)$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)\cdot f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-\frac{m}{2}f(x_k)f''(x_k)}$$

$$x_1=x_0-\frac{(3x_0+\sin x_0-e^{x_0})(3+\cos x_0-e^{x_0})}{[3+\cos x_0-e^{x_0}]^2-\frac{1}{2}(3x_0+\sin x_0-e^{x_0})(-\sin x_0-e^{x_0})}=0.35294$$

$$x_2=x_1-\frac{(3x_1+\sin x_1-e^{x_1})(3+\cos x_1-e^{x_1})}{[3+\cos x_1-e^{x_1}]^2-\frac{1}{2}(3x_1+\sin x_0-e^{x_1})(-\sin x_1-e^{x_1})}=0.3604216$$

$$|f(x_2)|=4.26\times10^{-6}<5\times10^{-5}$$

وبالتالي $x_2=0.3604216$ هو الجذر التقريبي المطلوب

إجابة السؤال الثاني : 1-) (12)

25 خمس وعشرون

$$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j+\sum_{j=0}^{1} R_j(x) f_j'(x)$$

$$= S_0(x) f_0+S_1(x) f_1+R_0(x) f_0'+R_1(x) f_1' = S_0(x)(1)+S_1(x)(0)+R_0(-1)+R_1(0)$$

$$= S_0(x)-R_0(x)$$

$$S_0(x)=[1-2(x-x_0)L_0'(x)]\,L_0^2(x)$$

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-1}{0-1}=1-x \Rightarrow L_0'(x)=-1 \Rightarrow L_0'(x_0)=-1$$

$$L_0^2(x)=(1-x)^2$$

$$S_0(x)=[1-2(x-0)(-1)]\cdot(1-x)^2$$
$$=(1+2x)(1-x)^2$$

$$R_0(x)=(x-x_0)L_0^2(x)=(x-0)(1-x)^2=x(1-x)^2$$

$$H_3(x)=(1+2x)(1-x)^2-x(1-x)^2$$
$$=(1-x)^2[1+2x-x]=(1-x)^2(1+x)$$
$$=x^3-x^2-x+1$$

---

(13) 2-)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

نحسب $t_1,t_2,t_3$ من $L_3(t)=0$

فنجد :

$$\frac{1}{2}[5t^3-3t]=0 \Rightarrow t(5t^2-3)=0 \Rightarrow t_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}\ ,\ t_2=0,\ t_3=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} w_1+w_2+w_3&=2 \\ -\sqrt{\tfrac{3}{5}}w_1+\sqrt{\tfrac{3}{5}}w_3&=0 \\ \tfrac{3}{5}w_1+\tfrac{3}{5}w_3&=\tfrac{2}{3} \end{aligned}\right\}$$

بالحل المشترك

$$w_1=w_3=\frac{5}{9}$$
$$w_2=\frac{8}{9}$$

$$S=\sum_{i=1}^{3} w_i f(t_i)=w_1 f(t_1)+w_2 f(t_2)+w_3 f(t_3)$$

$$S=\frac{5}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^2\cos\frac{5}{9}+\frac{8}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^2\cos\frac{8}{9}+\frac{5}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^2\cos\frac{5}{9}=0.476469$$

إجابة السؤال الثالث : 1-) نقوم بتغيير المتحول : (13) $\boxed{25}$ درجة

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2} = x+1$$

الآن اصبحت $x \in [-1,+1]$ بالتعويض في الدالة :

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

لنوجد كثيرة حدود التربيعية :

$$P_2(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$$

حيث

$$T_0 = 1,\ T_1 = x,\ T_2 = 2x^2 - 1$$

ولدينا أيضاً :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} x \cdot x\,dx = \frac{4}{3\pi} \quad , \quad a_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} x(2x^2-1)\,dx = 0$$

بالتعويض :

$$P_2(x) = 1\cdot(0) + \frac{4}{3\pi}(x) + (2x^2-1)(0) = \frac{4}{3\pi}x \quad , x \in [-1,+1] \ , \ x = t-1$$

$$P_2(t) = \frac{4}{3}(t-1) \quad : \quad t \in [0,2]$$

---

2-) (12)

$$y' = y - 3 + e^t = f_1(t,y,3)$$
$$3' = -y + 3 + e^t = f_2(t,y,3)$$

$$y_1 = y_0 + h\,f_1(t_0, y_0, 3_0) = y_0 + h(y_0 - 3_0 + e^{t_0})$$
$$= 1 + (0.1)(1 - 1 + 1) = 1.1$$

$$3_1 = 3_0 + h\,f_2(t_0, y_0, 3_0) = 3_0 + h(-y_0 + 3_0 + e^{t_0})$$
$$= 1 + (0.1)(-1 + 1 + 1) = 1.1$$

$$\delta_{y_1} = |y_1 - y(t_1)| = |1.1 - e^{0.1}| = 5.1707 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{3_1} = |3_1 - 3(t_1)| = |1.1 - e^{0.1}| = 5.1707 \times 10^{-3}$$

جامعة طرطوس — تحليل عددي (٢) _ السنة الرابعة — الاسم: ..........

كلية العلوم _ قسم الرياضيات — الفصل الثاني ٢٠٢٢-٢٠٢٣ — الدرجة ٧٠

---

**السؤال الاول: (25) درجة**

١ – أوجد الخطأ المطلق والنسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x,y;z)=\dfrac{\ln x-\cos y}{xe^{z}}$ حيث $(x;y;z)=(5.125، 4.25، 2.5)$ ،(أعداد مدورة)

2- استخدم طريقة نيوتن المعدلة لإيجاد الحل التقريبي $X_1$ فقط لجملة المعادلتين :

$$f_1(x,y)=x.y+x^2=3$$
$$f_2(x,y)=x.y+y=4$$
حيث: $X_0=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5\\1.5\end{bmatrix}$

**السؤال الثاني: (23) درجة**

١-أوجد كثيرة حدود هرميت التقريبية للدالة المعطاة بالجدول التالي:

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 |
| $y_i$ | 1 | 0 |
| $y'_i$ | $-1$ | 0 |

واحسب قيمة تقريبية لها عند النقطة $x=0.5$ ~~واحسب~~ الخطأ المقتطع الاعظمي.
واكتب عبارة

٢-استخدم طريقة سيمبسون على قاعدة ثلاث مجالات جزئية $(n=3)$ لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل : $I=\int_1^2 x\,e^x dx$

واحسب الخطأ المقتطع الاعظمي.

**السؤال الثالث: (22) درجة**

1- لتكن لدينا الدالة $f(t)=(t-1)\sqrt{2t-t^2}$ فوق المجال $[0,2]$ والمطلوب: أوجد تقريب تشبتشيف التربيعي لها

اذا علمت أن دالة الوزن: $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2- لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية التالية:
$$f_1(t,y,z)=y'-y+z=e^t$$
$$f_2(t,y,z)=z'+y-z=e^t$$

والشروط الابتدائية $z(0)=1$ ، $y(0)=1$ ، بحيث $t_0=0$ ، والمطلوب:

أوجد الحل العددي $(y_1,z_1)$ ،باستخدام طريقة اولر بخطوة $h=0{,}1$ ، واحسب الخطأ المطلق في الحل العددي ،

علماً أن $y(t)=z(t)=e^t$

---

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

طرطوس في ٢٠٢٣/٧/١٧م — مدرس المقرر:أ.د. نضال ابراهيم حسن

سلم توزيع الدرجات لمقرر تحليل عددي -2- سنة رابعة رياضيات - فصل ثاني $\frac{٢٠٢٢}{٢٠٢٣}$

إجابة السؤال الأول: 25

1-) 12

$$f(x,y,z)=\frac{\ln(5.125)-\cos(4.25)}{5.125\cdot e^{2.5}}=\frac{2.08021792}{62.43528155}=0.03331798 7$$

$$\delta_x \leq 5\times10^{-4} \quad , \delta_y \leq 5\times10^{-3} \quad , \delta_z \leq 5\times10^{-2}$$

$$(\delta_f)_{max} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta_y+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\delta_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1-\ln x+\cos y}{x^2\cdot e^z}=\frac{-1.08021852}{319.9808179 18}=-0.00337588523$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sin y}{x\cdot e^z}=\frac{-0.894989358}{62.43528155}=-0.014334673$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{-\ln x+\cos y}{x\cdot e^z}=-0.03331798 7$$

$$(\delta_f)_{max} \leq (0.00337588523\times5\times10^{-4}+0.014334673\times5\times10^{-3}+0.03331798 7\times5\times10^{-2})$$

$$=0.0000016879425+0.0000716733 65+0.0016658993 67$$

$$=0.0017392593 65$$

$$(e_f)_{max} \leq \frac{(\delta_f)_{max}}{|f|}=\frac{0.0017392593 65}{0.03331798 7}=0.052201814$$

---

2-) نحسب مصفوفة جاكوبي للدالة $F(x)$ بالشكل: 13

$$f_1(x,y)=x\cdot y+x^2-3=0$$

$$f_2(x,y)=x\cdot y+y-4=0$$

$$W(X)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y+2x & x\\ y & x+1\end{bmatrix}\Rightarrow W(x_0)=\begin{bmatrix}y_0+2x_0 & x_0\\ y_0 & x_0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.5 & 1.5\\ 1.5 & 2.5\end{bmatrix}$$

لإيجاد $W(x_0)^{-1}$ نجد:

$$|W(X_0)|=9$$

مصفوفة إصغار $|W|=\begin{bmatrix}2.5 & 1.5\\ 1.5 & 4.5\end{bmatrix}$

$$(-1)^{i+j}|W|=\begin{bmatrix}2.5 & -1.5\\ -1.5 & 4.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5 & -1.5\\ -1.5 & 4.5\end{bmatrix}^T$$

$$W^{-1}(X_0)=\frac{1}{\det}\begin{bmatrix}2.5 & -1.5\\ -1.5 & 4.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.27778 & -0.16667\\ -0.16667 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$F(X_0)=\begin{bmatrix} x_0y_0+x_0^2-3 \\ x_0y_0+y_0-4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.25 \end{bmatrix}, \quad X_{K+1}=X_K-W(X_K)F(X_K)$$

$$X_1=\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.27778 & -0.16667 \\ -0.16667 & 0.5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.04167 \\ 1.124995 \end{bmatrix}$$

---

إجابة السؤال الثاني : $\boxed{23}$

1- 13

$$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1} S_j(x)f_j+\sum_{j=0}^{1} R_j(x)f'_j$$

$$=S_0(x)f_0+S_1(x)f_1+R_0(x)f'_0+R_1(x)f'_1$$

$$=S_0(x)-R_0(x)$$

$$S_0(x)=\left[1-2(x-x_0)L'_0(x)\right]L_0^2(x), \quad L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-1}{0-1}=1-x, \quad L'_0(x)=-1$$

$$L'_0(x_0)=-1$$

$$S_0(x)=\left[1-2(x-0)(-1)\right]\cdot(1-x)^2$$

$$=(1+2x)(1-x)^2$$

$$R_0(x)=(x-x_0)L_0^2(x)=x(1-x)^2$$

$$\Rightarrow H_3(x)=(1+2x)(1-x)^2-x(1-x)^2$$

$$=(1-x)^2(1+x)=(1-x^2)(1-x)=x^3-x^2-x+1$$

$$H_3\left(\tfrac{1}{2}\right)=0.375$$

عبارة الخطأ المقتطع

$$E_T(x)=\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \;:\; c\in[x_0,x_1], \quad n=3$$

$$E_T(x)=\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{4!}f^{(4)}(c)$$

إجابة السؤال الثاني :

(10)

2- لدينا $n=3 \Leftarrow m=\frac{n}{3}=1 \Leftarrow h=\frac{b-a}{3}=\frac{2-1}{3}=0.33333$

$x_0=1, f_0=f(x_0)=e=2.76828$

$x_1=1.33333, f_1=f(x_1)=5.05822$

$x_2=1.66667, f_2=f(x_2)=8.82415$

$x_3=2, f_3=f(x_3)=14.77810$

$$S=\frac{3h}{8}[f_0+3f_1+3f_2+f_3]=7.39294$$

حساب الخطأ المقطع العظمي :

$$f^{(4)}(x)=(4+x)e^x$$

$$Max\, F^{(4)}(x)=(4+2)e^2 \quad , x\in[x_0,x_3]=[1,2]$$

$$E_T(h)=\left|\frac{2-1}{180}(0.33333)^4 6\cdot e^2\right)=6.8414\times 10^{-3}$$

22 إجابة السؤال الثالث:

$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (-1

11

$t=\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2}=x+1\ ,\ x\in[-1,+1]$

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}\ ,\ T_0=1\ ,\ T_1=x\ ,\ T_2=2x^2-1$

$P_2(x)=a_0T_0(x)+a_1T_1(x)+a_2T_2(x)$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=0\ ,\ a_1=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}x.x\,dx=\frac{4}{3\pi}\ ,$

$a_2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}x(2x^2-1)\,dx=0$

$P_2(x)=\frac{4}{3\pi}x\ ,\ x\in[-1,+1]\ ,\ x=t-1$

$P_2(t)=\frac{4}{3\pi}(t-1)\ ,\ t\in[0,2]$

11 (-2

$y'=y-3+e^t=f_1(t,y,3)$

$3'=-y+3+e^t=f_2(t,y,3)$

$y_1=y_0+hf_1(t_0,y_0,3_0)=y_0+h(y_0-3_0+e^{t_0})$
$=1+(0.1)(1-1+1)=1.1$

$3_1=3_0+hf_2(t_0,y_0,3_0)=3_0+h(-y_0+3_0+e^{t_0})$
$1+(0.1)(-1+1+1)=1.1$

أي أن الحل:

$(y_1,3_1)=(1.1,1.1)$

الخطأ المطلق:

$\delta_{y_1}=|y_1-y(t_1)|=|1.1-e^{0.1}|=5.1707\times10^{-3}$

$\delta 3_1=|3_1-3(t_1)|=|1.1-e^{0.1}|=5.1707\times10^{-3}$

جامعة طرطوس تحليل عددي(2) _ السنة الرابعة الاسم:

كلية العلوم_ قسم الرياضيات الفصل الأول 2022-2023 الدرجة 70

---

السؤال الاول: (25)درجة

1 – أوجد الخطأ المطلق والنسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x,y,z)=\sin(x^2)y^3+\frac{e^x}{z^2}$ حيث

$(x,y,z)=(-2.5000;1.999;0.49)$،(أعداد مدورة)

2- استخدم صيغة الفروق المركزيةمن المرتبة الثانيةفي إيجاد قيمة تقريبية لكل من المشتقين الثاني والثالث للدالة $f(x)=\sin(x-1)+x^3$ في النقطة $x=1$ ، و h=0.1 ،واحسب الخطأ المقتطع في كل حالة

السؤال الثاني:(23)درجة

1-لتكن لدينا الدالة $f(t)=\frac{1}{t^2-2t+2}$ والمعطاة فوق المجال $[0,2]$، أوجد تقريب تشبتشيف$P_2(t)$ ،في الحالة المنفصلة، بإستخدام أصفار $T_5(x)$ ،واحسب قيمة تقريبية عند $t=1$ ،واحسب الخطأ المطلق المرتكب

2-استخدم طريقة غاوس ليجندر من أجل ثلاث نقاط غاوسية$(N=3)$ لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل : $I=\int_{-1}^{+1}x^2\cos x\,dx$

السؤال الثالث:(22)درجة

1- بإستخدام الدستور التدريجي لنيوتن-رافسون،استنتج الصيغة التي تعطي $\sqrt[n]{\alpha}$ ،ثم أوجد $\sqrt[4]{100}$،لثلاثة منازل عشرية

2- لتكن لدينا جملة المعادلتين

$$y'=y-z+t+e^t=f_1(x,y,z)$$
$$z'=z-y+e^t-t+1=f_2(x,y,z)$$

حيث $z(0)=1$ ، $y(0)=1$ ، بخطوة $h=0.1$ ،

أوجد الحل $(y_1,z_1)$ ،بإستخدام طريقة رانج كوتا من المرتة الرابعة ،واحسب الخطأ المطلق في الحل العددي ،علماً أن

$y(t)=e^t;\quad z(t)=e^t+t$

---

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2023/2/6

مدرس المقرر:أ. د. نضال حسن

الإجابة النموذجية لأسئلة مقرر تحليل عددي (٢) سنة رابعة رياضيات - فصل أول $\frac{2022}{2023}$ طرطوس

إجابة السؤال الأول **1** نحسب قيمة الدالة بتعويض قيم المتحولات : 11 25

$$f(-2.5000, 1.999, 0.49) = \sin[(-2.5)^2](1.999)^3 + \frac{e^{-2.5}}{(0.49)^2} = 0.0764346736$$

إن الأخطاء المطلقة الناتجة عن تدوير قيم المتحولات تعطى بالشكل :

$$\delta_x \leq 5\times10^{-5}, \quad \delta_y \leq 5\times10^{-4}, \quad \delta_z \leq 5\times10^{-3}$$

يعطى الخطأ المطلق المرتكب في حساب قيمة الدالة بالعلاقة

$$(\delta_f)_{max} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta_y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\delta_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2)\cdot y^3 + \frac{e^x}{z^2} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 39.5761613974$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\sin(x^2)\,y^2 \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 0.3977525449$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2e^x}{z^3} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| = 1.39542195$$

$$(\delta_f)_{max} \leq (39.5761639)(5\times10^{-5}) + (0.3977525449)(5\times10^{-4}) + (1.39542195)(5\times10^{-3})$$

$$0.0019788081 + 0.0001988763 + 0.0069771098 = 0.00915479$$

$$(e_f)_{max} \leq \frac{(\delta_f)_{max}}{|f|} = \frac{0.00915479}{0.0764346736} = 0.1197727908$$

14

الشطر الثاني

6

$$d_2(x,h) = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\right]$$

$$f(x+h) = f(1.1) = \sin(1.1-1) + (1.1)^3 = 0.09983 + 1.331 = 1.43083$$

$$f(x-h) = f(0.9) = \sin(-0.1) + (0.9)^3 = -0.09983 + 0.729 = 0.62917$$

$$f(x) = f(1) = 1$$

$$d_2(1, 0.1) = \frac{1}{(0.1)^2}\left[1.43083 + 0.62917 - 2\right] = 6 \cong 5.999$$

$$E(1,h) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) : c\in[1-h, 1+h], \quad M = \max\{|f^{(4)}(1-h)|, |f^{(4)}(1+h)|\}$$

وبما أن : $f^{(4)}(x) = \sin(x-1)$

$$f^{(4)}(1-h) = f^{(4)}(0.9) = \sin(-0.1) = -0.09983$$

$$f^{(4)}(1+h) = f^{(4)}(1.1) = \sin(1.1) = 0.891207$$

$$E(1,h) = -\frac{(0.1)^2}{12}(0.891207) = 0.00074267$$

$$d_3(x,h) = \frac{1}{2h^3}\left[f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)\right]$$ المشتق الثالث:

8

$$d_3(1,0.1) = \frac{1}{2(0.1)^3}\left[f(1.2) - 2f(1.1) + 2f(0.9) - f(0.8)\right]$$

$$= 5.00249$$

$$E(1,h) = \frac{h^2}{2} f^{(5)}(c) : c \in [x-2h, x+2h] \quad , M = \max\{|f^{(5)}(x-2h)|, |f^{(5)}(x+2h)|\}$$

$$f^{(5)} = \cos(x-1) \Rightarrow M = 1$$

$$E(1,0.1) = \frac{(0.1)^2}{2}(1) = 0.005$$

إجابة السؤال الثاني: 1) يجب تغيير المتحول $t$ في $[0,2]$ إلى متحول في $[-1,+1]$ بالشكل:

13     2 3

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} = x+1 \quad , \quad x \in [-1,+1] \qquad n=4,\ m=2$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2 - 2(x+1) + 2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x_K = \cos\frac{2K+1}{2(n+1)}\pi = \cos\frac{2K+1}{10}\pi, \quad K=0,1,2,3,4$$

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{10} = 0.951057, \quad x_1 = 0.587785, \quad x_2 = 0$$

$$x_3 = -0.587785, \quad x_4 = -0.951057$$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{1}{x_0^2+1} = \frac{1}{(0.951057)^2+1} = 0.5250696, \quad y_1 = \frac{1}{(0.587785)^2+1} = 0.7432229$$

$$y_2 = \frac{1}{1} = 1, \quad y_3 = y_1, \quad y_4 = y_0$$

$$a_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{K=0}^{4} y_K = \frac{1}{5}[y_0+y_1+y_2+y_3+y_4] = 0.707317$$

$$a_1 = \frac{2}{n+1}\sum_{K=0}^{4} y_K \cdot T_1(x_K) = \frac{2}{5}\sum_{K=0}^{4} y_K x_K = \frac{2}{5}\sum \frac{x_K}{1+x_K^2} = 0$$ للتناظر

$$a_2 = \frac{2}{n+1}\sum_{K=0}^{4} y_K T_2(x_K) = \frac{2}{5}\sum \frac{2x_K^2-1}{1+x_K^2} = -0.243902$$

$$P_2(x) = 0.707317 - 0.243902(2x^2-1) =$$
$$= 0.951219 - 0.487804x^2$$

بإرجاع المتحول $\Leftarrow x = t-1$

$$P_2(t) = 0.951219 - 0.487804(t-1)^2$$

$$= 0.463415 + 0.975608t - 0.487804t^2$$

$$f(1) = 0.902438, \quad P_2(1) = 0.951219 \Rightarrow \delta = |f(1) - P_2(1)| = 0.04878$$

إجابة السؤال الثاني ج) : لنحسب $t_1, t_2, t_3$ من العلاقة

10

$$t_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t] = 0$$

$$t(5t^2 - 3) = 0 \Rightarrow t = 0, \quad t = \mp\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2$$

$$-\sqrt{\frac{3}{5}}w_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}w_3 = 0 \Rightarrow w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, \quad w_2 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{3}{5}w_1 + \frac{3}{5}w_3 = \frac{2}{3}$$

$$I = \sum_{i=1}^{3} w_i f(t_i) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

$$f(t_1) = t_1^2 \cos t_1 = 0.4288219, \quad f(t_2) = t_2^2 \cos t_2 = 0, \quad f(t_3) = 0.4288219$$

$$I = \frac{5}{9}(0.4288219) + \frac{5}{9}(0.4288219) = 0.476469$$

إجابة السؤال الثالث : c) المطلوب حساب $(y_1, z_1)$ فقط عند $t_1 = 0.1$

12

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[K_1 + 2(K_2+K_3) + K_4] \quad , \quad Z_{i+1} = Z_i + \frac{1}{6}[L_1 + 2(L_2+L_3) + L_4]$$

$$K_1 = h f_1(t_i, y_i, Z_i) \quad , \quad L_1 = h f_2(t_i, y_i, Z_i)$$

$$K_2 = h f_1(t_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{K_1}{2}, Z_i+\frac{L_1}{2}) \quad , \quad L_2 = h f_2(t_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{K_1}{2}, Z_i+\frac{L_1}{2})$$

$$K_3 = h f_1(t_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{K_2}{2}, Z_i+\frac{L_2}{2}) \quad , \quad L_3 = h f_2(t_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{K_2}{2}, Z_i+\frac{L_2}{2})$$

$$K_4 = h f_1(t_i+h, y_i+K_3, Z_i+L_3) \quad , \quad L_4 = h f_2(t_i+h, y_i+K_3, Z_i+L_3)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2(K_2+K_3) + K_4] \quad , \quad Z_1$$

$$K_1 = h f_1(t_0, y_0, z_0) = (0.1)[y_0 + Z_0 + t_0 + e^{t_0}] = 0.1(1-1+0+1) = 0.1$$

$$L_1 = h f_2(t_0, y_0, Z_0) = (0.1)[Z_0 - y_0 + e^{t_0} - t_0 + 1] = 0.1(1-1+1-1+1) = 0.2$$

$K_2 = 0.10513$, $L_2 = 0.20513$, $K_3 = 0.20513$, $L_3 = 0.20513$

$K_4 = 0.11052$, $L_4 = 0.21052$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}[0.1 + 2(0.10513 + 0.10513) + 0.11052] = 1.10517$$

$$Z_1 = 1 + \frac{1}{6}[0.2 + 2(0.20513 + 0.20513) + 0.21052] = 1.20517$$

$$\delta_{y_1} = |y_1 - y(t_1)| = 3.65 \times 10^{-9} \quad , \quad \delta_{Z_1} = |Z_1 - Z(t_1)| = 3.65 \times 10^{-9}$$

إجابة السؤال الثالث : (1) 10 $\boxed{22}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{x_k f'(x_k) - f(x_k)}{f'(x_k)}$$

نفرض أن $\Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{\alpha}$

$$f'(x) = nx^{n-1} \Leftarrow f(x) = x^n - \alpha = 0 \Longleftrightarrow x^n = \alpha$$

بالإنتقال إلى القيم التقريبية

بالتعويض بالعلاقة الأولى :

$$f(x_k) = x_k^n - \alpha \ , \ f'(x_k) = n x_k^{n-1}$$

وهو الدستور التكراري المطلوب :

$$x_{k+1} = \frac{x_k(n x_k^{n-1}) - x_k^n + \alpha}{n x_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n + \alpha}{n x_k^{n-1}}$$

$\Leftarrow x = \sqrt[4]{100}$

$$\alpha = 100 \ , \ n = 4 \Leftarrow x^4 = 100$$

$f(x) = x^4 - 100 = 0$ الجذر موجود في المجال $[3,4]$ لأن : $f(3) \times f(4) < 0$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | $-$ |
| 1 | $-$ |
| 2 | $-$ |
| 3 | $-$ |
| 4 | $+$ |

$$x_0 = \frac{3+4}{2} = 3.5$$

$$x_1 = \frac{(4-1)(x_0)^4 + \alpha}{4 x_0^{n-1}} = \frac{3(3.5)^4 + 100}{4(3.5)^3} = \frac{550.1875}{171.5} = 3.20809$$

$$x_2 = \frac{3(3.20809)^4 + 100}{4(3.20809)^3} = \frac{417.76615}{132.06861} = 3.16325$$

$$x_3 = \frac{3(3.16325)^4 + 100}{4(3.16325)^3} = \frac{400.36944}{126.607823} = 3.16228$$

$$x = \frac{3(3.16228)^4 + 100}{4(3.16228)^3} = \frac{400.001047}{126.49138} = 3.162278$$

الجذر المطلوب $x_4 = 3.162278$ لتكرار ثلاثة منازل عشرية مع الجذر $x_3 = 3.16228$

## سلم تصحيح مقرر التحليل العددي 2

## لطلاب السنة الرابعة- رياضيات الفصل الأول 2021-2022

**السؤال الأول : (25 درجة)** 1-بفرض أن $y = f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[-1 . 1]$ و $p_i(x)$ كثيرات حدود ليجندر .

$$I = \| y(x) - P(x) \| = \min \int_{-1}^{1} [y(x) - P(x)]^2 dx =$$

(5)

$$= \min \int_{-1}^{1} [y(x) - a_0 p_0(x) - a_1 p_1(x) - \ldots - a_n p_n(x)]^2 dx$$

نعين المعاملات $a_\circ$ بحيث يبلغ هذا المقدار قيمة صغرى وبالتالي يجب أن يكون:

(2) $$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow -2\int_{-1}^{1} [y(x) - a_0 p_0(x) - a_1 p_1(x) - \ldots - a_n p_n(x)] p_i(x) dx = 0$$

بالاعتماد على خاصة التعامد نجد:

(2) $$\int_{-1}^{1} [y(x) - a_\circ p_\circ(x)] p_i(x) dx = 0$$

(2) $$\int_{-1}^{1} [p_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$ حسب الخاصة:

(2) $$a_i = \frac{\int_{-1}^{1} y(x)\, p_i(x) dx}{\int_{-1}^{1} [p_i(x)]^2 dx} = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{1} y(x) . P_i(x)\, dx$$

**2- دستور التكاملات الثنائية بطريقة شبه المنحرف يكتب بالشكل:**

(3) $$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy = \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{2} \lambda_{ij} f_{ij}$$

(2) **حيث أن:** $$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**نحسب قيم الدالة عند النقاط المطلوبة:**

| $x_i$ / $y_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

(5)

**بتطبيق الدستور نجد:**

(2) $$\int_0^4 \int_0^2 x\; y\;\; dx\, dy\; = \frac{1}{4}[8 + 2(16) + 4(6)] = 16$$

**السؤال الثاني:** (20 درجة **1-** نطبّق دستور رونج . كوتا فنجد إن :

(4) $$y_1 = y(0.1) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

(4)
$$k_1 = hf\ (x_0, y_0) = 0.2(x_0 - y_0) = 0.2(0-2) = -0.4$$
$$k_2 = hf\ (x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = 0.2(0.1 - 1.8) = -0.34$$
$$k_3 = hf\ (x_0 + h/2, y_0 + k_2/2) = 0.2(0.1 - 1.8) = -0.346$$
$$k_4 = hf\ (x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2(0.2 - y_0 + k_3) = -0.2908$$

بالتبديل نحصل على الحل التقريبي الأول للمعادلة التفاضلية المطلوبة عند النقطة $x = 0.2$ ، أي:

(2)
$$y_1 = y(0.2) = 2 + \frac{1}{6}[-0.4 + 2(-0.34) + 2(-0.346) +$$
$$+(-0.2908)] = 1.6562$$

**2 - دستور تايلور هو:** (4) $$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y_n^{(4)} + .... + \frac{h^n}{n!}y_n^{(n)}$$

**لنحسب المشتقات المتتالية عند النقطة $x_0 = 1$ ، فنجد أن :**

(4)
$$y'(1) = 3$$
$$y''(x) = -\frac{y'}{x} + 4\frac{y}{x^2} - \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad y''(1) = 10$$
$$y'''(x) = -\frac{y''}{x} + \frac{5y'}{x^2} - \frac{8y}{x^3} + \frac{3}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y'''(1) = -24$$

**بالتبديل في دستور تايلور من أجل أربعة حدود نجد أن:** $y(1) = 4, y'(1) = 3$

(2)
$$y_1 = y(x_1) = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 =$$
$$= 4 + (0.2).(3) + \frac{(0.2)^2}{2!}(10) + \frac{(0.2)^3}{3!}(-24) = 4.768$$

**السؤال الثالث** (25 درجة )

**المعادلة الفرقية :** (5) $$u_{i,j+1} = (1-2\lambda)u_{ij} + \lambda(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$$

حيث أن: $S = \frac{\alpha k}{h^2} = 2/5$

وبالتالي فإن المعادلة الفرقية لهذه المسألة تكتب بالشكل التالي:

(2) $$u_{i,j+1} = \frac{2}{5}(u_{i-1,j} + 0.5u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

نضع شروط البدء و الشروط الحدية في السطر الأول و العمود الأول ، ثم نتابع و نحسب كل سطر بدلالة السطر الذي يسبقه وفقاً للمعادلة الفرقية لهذه المسألة فنحصل على النتائج التالية :

(6)

| x / t | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.70710678 | 1 | 0.70710678 | 0 |
| 0.1 | 0 | 0.54142135 | 0.76568542 | 0.54142135 | 0 |

جامعة طرطوس　　　　امتحان مقرر التحليل العددي 2　　　　الاسم:

كلية العلوم　　　　لطلاب السنة الرابعة– رياضيات　　　　المدة: ساعتان

الفصل الثاني 2021 -2022　　　　الدرجة: 70

---

**السؤال الأول: ( 25 درجة)**

**1**– إذا كانت كثيرة حدود التقريب بدلالة كثيرات حدود ليجندر $y(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i P_i(x)$ ، فأثبت أن:

$$a_i = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} y(x).P_i(x)\,dx$$

**2**– أوجد بطريقة أشباه المنحرفات القيمة التقريبية للتكامل الثنائي التالي:

$\int_0^4\int_0^2 x\,y\;dx\,dy\;,\;\; x\in[0,4]\;,y\in[0,2]$ ، حيث أن: $h=k=1$ .

**السؤال الثاني:( 20 درجة )**

**1**– استخدم طريقة رونج .كوتا لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y' = x - y$$
$$y(0) = 2$$

عند النقطة $x = 0.2$ ، معتبراً أن $h = 0.2$ .

**2**– أوجد بطريقة تايلور الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية: $x^2y'' + xy' - 4y + 3x = 0$ حيث إن: $y(1) = 4, y'(1) = 3$ ، وذلك عند النقطة $x = 1.2$ ، علماً أن $h = 0.2$ مستخدماً أربعة حدود.

**السؤال الثالث: ( 25 درجة)**

**1–أوجـد بطريقـة الفروق المحـدودة حـل المعـادلـة التفـاضـلـيـة الجزئيـة التـاليـة:**

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}\;,\; 0<x<1\;,\; t>0$ **وذلك من أجل الشروط الحدية التالية:**

$$u(x,0) = \sin(\frac{\pi}{2}x)\quad,\quad 0\le x\le 2$$
$$u(0,t) = u(2,t) = 0\quad,\quad t>0$$

**حيث إن:** $h = 0.5\;,\; k = 0.1$ **في النقطة المقابلة لـ** $(1.5\;,\;0.1)$ $u(x,t) =$ .

**(احسب القيم بالراديان)**

**2**–أوجد المعادلة الفرقية الموافقة لمعادلة بواسون التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12$$

علماً أن: $h = k = 1$ .

****************انتهت الأسئلة************************

مدرس المادة : د . حامد عباس　　　　/ / 2022

جامعة طرطوس — امتحان مقرر التحليل العددي 2 — الاسم:

كلية العلوم — لطلاب السنة الرابعة– رياضيات — المدة: ساعتان

الفصل الأول 2021 – 2022 — الدرجة: 80

---

**السؤال الأول: ( 25 درجة)**

1– أوجد كثيرة حدود التقريب من الدرجة الأولى للدالة $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ بدلالة كثيرات حدود ليجندر ، وذلك ضمن المجال $[-1,+1]$.

2– أوجد بطريقة سيمبسون القيمة التقريبية للتكامل الثنائي التالي:

$$\int_{-1}^{3}\int_{0}^{2} x^2 y\, dx\, dy \quad , \quad x\in[-1,3] \ , y\in[0,2]$$

، حيث أن: $h=k=1$.

**السؤال الثاني:( 25 درجة )**

1– أوجد بطريقة أولر حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'=2x-y$$
$$y(0)=1$$

وذلك عند النقطة $x=0.3$ حيث أن: $h=0.1$ .

2– أوجد بطريقة تايلور الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية : $y''+\dfrac{2y'}{x}-\dfrac{2y}{x^2}=0$

مع الشروط الابتدائية: $y(1)=0\ ,\ y'(1)=1$ ، وذلك عند النقطة $x=1.1$ ، علماً أن $h=0.1$ مستخدماً أربعة حدود فقط.

**السؤال الثالث: ( 30 درجة)**

1–أوجد بطريقة كرانك – نيكلسون حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية (خطوة واحدة فقط) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\ ,\ 0<x<2\ ,\ t>0$$

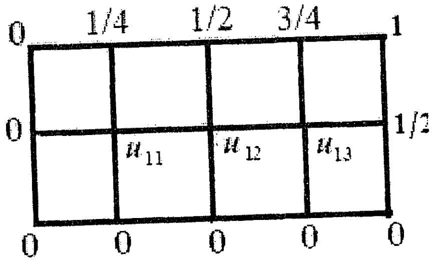
وذلك من أجل الشروط الحدية التالية:

$$u(x,0)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad , \quad 0\le x\le 2$$
$$u(0,t)=1,\ u(2,t)=-1 \quad , \quad t>0$$

حيث إن: $h=0.5\ ,\ k=0.25$ (احسب القيم بالراديان)

2–أوجد الحل العددي لمعادلة لابلاس التالية: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ معتبراً أن: $k=1/2$ ، $h=1/4$

وذلك في النقاط الداخلية للشكل:




************************** انتهت الأسئلة **************************

13 /2/ 2022

مدرس المادة : د . حامد عباس

## سلم تصحيح مقرر التحليل العددي 2

## لطلاب السنة االرابعة– رياضيات الفصل الأول 2021–2022

**السؤال الأول :** (25 درجة) بما أن كثيرة حدود التقريب من الدرجة الأولى، فإن كثيرات حدود ليجندر المطلوبة:

(2) $$p_0(x)=1 \quad , \quad p_1(x)=x$$

(2) $$P_1(x)=a_0p_0(x)+a_1p_1(x)$$

لنحسب كلاً من الثابتين $a_0$ , $a_1$ من العلاقة:

(4) $$a_i=\frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)p_i(x)dx$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+2}=\frac{1}{2}\{\ln(x+2)]\}_{-1}^{+1}=\frac{1}{2}\ln 3=0.549306144$$

(4) $$a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{x+2}=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(1-\frac{2}{x+2})dx=\frac{3}{2}\{x-2\ln(x+2)\}_{-1}^{1}=3(1-\ln 3)=$$
$$=-0.295836866$$

أي أن كثيرة حدود التقريب هي:

(2) $$P_1(x)=0.549306144-0..295836866x$$

–2 دستور التكاملات الثنائية بطريقة شبه المنحرف يكتب بالشكل:

(3) $$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\frac{hk}{9}\sum_{i=-1}^{3}\sum_{j=0}^{2}\lambda_{ij}f_{ij}$$

حيث أن: (2) $$\lambda_{ij}=\begin{pmatrix}1&4&2&4&1\\4&16&8&16&4\\1&4&2&4&1\end{pmatrix}$$

(3) نحسب قيم الدالة عند النقاط المطلوبة:

| $x_i$ / $y_i$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| 2 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 |

(3) $$\int_{-1}^{3}\int_{0}^{2}x^2y\ dx\,dy=\frac{1}{9}[20+4(18)+2(2)+16(4)+8(1)]=\frac{168}{9}$$

**السؤال الثاني:** (20 درجة ) **-1 بتطبيق دستور أولر:**

(4) نجد أن : $$y_{k+1}=y_k+hy'_k=y_k+hf(x_k,y_k)$$

(6)
$$\mathbf{y_1=y(0.1)=1+0.1(2\times 0-1)=0.9}$$
$$\mathbf{y_2=y(0.2)=0.9+0.1(2\times 0.1-0.9)=0.83}$$
$$\mathbf{y_3=y(0.3)=0.83+0.1(2\times 0.2-0.83)=0.787}$$

(4) **2 - دستور تايلور:** $$y_{n+1}=y_n+hy'_n+\frac{h^2}{2!}y''_n+\frac{h^3}{3!}y'''_n+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}_n+....+\frac{h^n}{n!}y^{(n)}_n$$

لنحسب المشتقات المتتالية عند النقطة $x_0=1$ ، فنجد أن :

(4) $$y'' = -\frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} \Rightarrow y''(1) = -2$$

$$y''' = -\frac{4y'}{x^2} + \frac{2y''}{x} + \frac{4y}{x^3} \quad \Rightarrow y'''(1) = 8$$

بالتبديل في دستور تايلور من أجل أربعة حدود نجد أن:

(2) $$y_1 = y(x_1) = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' =$$

$$= 0 + (0.1).(1) + \frac{(0.1)^2}{2!}(-2) + \frac{(0.1)^3}{3!}(8) = 0.0913333333$$

**السؤال الثالث** (25 درجة )

المعادلة الفرقية :

(3) $$-su_{i-1,j+1} + (2+2s)u_{i,j+1} - su_{i+1,j+1} = su_{i-1,j} + (2-2s)u_{ij} + su_{i+1,j}$$

حيث أن: $h = 0.5 \ , \ k = 0.25$

(1) $$S = \frac{\alpha k}{h^2} = \frac{0.25}{0.25} == 1$$

(3) $$u_{i,j+1} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1})$$

(3) نضع شروط البدء والشروط الحدية في السطر الأول والعمود الأول، نجد:

| x<br>t | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1 |
| 0.25 | 1 | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | -1 |

يمكننا إيجاد قيم أول سطر بحل مجموعة المعادلات الآتية:

(3) $$u_1 = \frac{1}{4}(u_2 + 2) \ , \ u_2 = \frac{1}{4}(u_1 + u_3) \ , \ u_3 = \frac{1}{4}(u_2 - 2)$$

بالحل المشترك نجد:

(2) $$u_1 = 0.5 \ . \ u_2 = 0 \ , \ u_3 = -0.5$$

**2**- نكتب المعادلة التفاضلية بدلالة الفروق من المرتبة الثانية ، نجد:

(3) $$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} = 0$$

بما أن $k = 1/2$ ، $h = 1/4$ فإن المعادلة الفرقية تكتب بالشكل التالي:

(2) $$u_{i,j} = \frac{1}{10}[4u_{i-1,j} + 4u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}]$$

(3) $$u_{11} = \frac{1}{10}(4u_{12} + 1/4) \ , \ u_{12} = \frac{1}{10}(4u_{11} + 4u_{13} + 1/2), \ u_{13} = \frac{1}{10}[4u_{12} + 11/4]$$

بالحل المشترك نجد:

(2) $$u_{11} = \frac{1}{8} \quad , \ u_{12} = \frac{1}{4} \ , \quad u_{13} = \frac{3}{8}$$

************************************************ انتهى ******************************************

د. حامد عباس