كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

اسئلة دوراة محلولة

مواضيع مختارة

A 2 Z1 LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر مواضيع مختاره
سنة رابعة رياضيات
الدورة التكميلية- العام الدراسي 2024-2025م

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: 90

السؤال الأول: (54 درجة)

1) أثبت صحّة قضيتين فقط من القضايا التالية:

1. إذا كان p عدداً أولياً و $\phi_p(x) = \frac{x^p-1}{x-1}$ عندئذٍ $\phi_p(x)$ كثيرة حدود لامختزلة في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$.
2. ليكن E توسيع حقلي لـ F و $[E:F] = n < \infty$ عندئذٍ E توسيع جبري لـ F.
3. ليكن F حقل و $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود مختزلة في $F[x]$ علماً أنّ $deg(f(x)) = 2 \text{ or } 3$ عندئذٍ $f(x)$ تملك جذر في F.

2) ليكن $Z_5[x] \in x^3 + x^2 + x + 4$ حيث $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ حقل والمطلوب:

1. أوجد العناصر القابلة للقلب في الحلقة $Z_5[x]$.
2. أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x-1)$ في الحلقة $Z_5[x]$.
3. أثبت أنّ $Z_5[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل، ثمّ عيّن هذا الحقل، وما هو عدد عناصره.
4. هل الحقل Z_5 مغلق جبرياً أم لا، ولماذا.

3) ليكن $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسرية، والمطلوب ناقش كثيرات الحدود التالية ذات المعاملات الصحيحة فيما إذا كانت مختزلة أم لا في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$:

1. $f(x) = x^8 + 9x^2 + 3x - 31$
2. $g(x) = x^6 + 9x^4 + 12x^2 + 6$
3. $h(x) = x^2 + x + 1$

السؤال الثاني: (36 درجة)

ليكن $\alpha = \sqrt[3]{5}$ و $\beta = \sqrt{5}i$ عندئذٍ:

1. أثبت أنّ $\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ عدد جبري.
2. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$، ثم أثبت أنّ $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$.
3. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ فوق $\mathbb{Q}$.
4. أثبت أنّ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$، وماذا تستنتج.
5. أوجد حقل التفريق لكثيرة الحدود $p(x) = -x^4 + x^2 + 2$ فوق $\mathbb{Q}$.

---انتهت الأسئلة---

مع أطيب التمنيات لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. احمد علي عيسى

A to Z مكتبة

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر مواضيع مختارة لطلاب السنة الرابعة رياضيات

الدورة التكميلية- العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: 90 نظري

السؤال الأول: (54 درجة)

(14 درجة). أثبت صحّة قضيتين فقط من القضايا التالية: (7 درجات لكل قضية يتم اختيارها)

1. إذا كان p عدداً أولياً و $\phi_p(x) = \frac{x^p-1}{x-1}$ عندئذٍ $\phi_p(x)$ كثيرة حدود لامختزلة في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$.
2. ليكن E توسيع حقلي لـ F و $[E:F] = n < \infty$ عندئذٍ E توسيع جبري لـ F.
3. ليكن F حقل و $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود مختزلة في $F[x]$ علماً أنّ $deg(f(x)) = 2 \text{ or } 3$ عندئذٍ $f(x)$ تملك جذر في F.

الحلّ:

1. **مبرهنة.**
2. **مبرهنه.**
3. **مبرهنة.**

1) **(22 درجة).**

ليكن $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ حقل والمطلوب: حيث $f(x) = x^3 + x^2 + x + 4 \in Z_5[x]$

1. أوجد العناصر القابلة للقلب في الحلقة $Z_5[x]$.
2. أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x-1)$ في الحلقة $Z_5[x]$.
3. أثبت أنّ $Z_5[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل، ثمّ عيّن هذا الحقل، وما هو عدد عناصره.
4. هل الحقل Z_5 مغلق جبرياً أم لا، ولماذا.

الحلّ:

1. **(3 درجات).** العناصر القابلة للقلب في $Z_5[x]$ هي $\{1,2,3,4\}$
2. **(3 درجات).** الباقي هو:

$$r(x) = f(1) = 2$$

3.

- **(7 درجات).**

نلاحظ بأنّ $f(x) = x^3 + x^2 + x + 4 \in Z_5[x]$ لا تملك جذر في $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ لأنّ:

$$f(0) = 4 \neq 0$$

$$f(1) = 2 \neq 0$$

$$f(2) = 3 \neq 0$$

$$f(3) = 3 \neq 0$$

$$f(4) = 3 \neq 0$$

بالتالي $f(x)$ لامختزلة في $Z_5[x]$ بالتالي $\langle f(x) \rangle$ ايديال أعظمي في $Z_5[x]$

بالتالي $Z_5[x]/\langle x^3 + x^2 + x + 4 \rangle$ حقل

- **(درجتان)**. عدد عناصره هو $5^3 = 125$.
- **(5 درجات)**.

$$Z_5[x]/\langle x^3 + x^2 + x + 4 \rangle = \{ax^2 + bx + c + \langle x^3 + x^2 + x + 4 \rangle ; a, b, c \in Z_5\}$$

4. **(درجتان)**.

الحقل غير مغلق جبرياً لأنه توجد كثيرة الحدود $f(x) = x^3 + x^2 + x + 4 \in Z_5[x]$ لاتملك جذر في Z_5

2) **(18 درجة)**. ليكن $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسرية، والمطلوب ناقش كثيرات الحدود التالية ذات المعاملات الصحيحة فيما إذا كانت مختزلة أم لا في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$:

1. $f(x) = x^8 + 9x^2 + 3x - 31$
2. $g(x) = x^6 + 9x^4 + 12x^2 + 6$
3. $h(x) = x^2 + x + 1$

الحلّ: (ملاحظه: هذا التمرين يمكن أن يحلّ بأكثر من طريقه.)

1. **(6 درجات)**.

$$f(x) = x^8 + 9x^2 + 3x - 31$$

معيار $Osada$ (أوسادا)

((p عدد أولي; $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1x + p$

عندئذٍ $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$)) و $p > 1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|$

لدينا في هذا التمرين $p = 31$ ونلاحظ أن $a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, , a_6 = 0, , a_7 = 0$ إذا

$$1 + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + |a_6| + |a_7| = 13$$

نستنتج أن $p > 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + |a_6| + |a_7|$ بالتالي $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$ حسب معيار $Osada$

2. **(6 درجات)**.

يوجد عدد أولي $p = 3$ يحقق الشرط:

① $p \nmid a_6$ حيث $a_6 = 1$

② $p | a_i \quad \forall \ 0 \leq i \leq 5$

A to Z مكتبة

③ $p^2 \nmid a_0$ حيث $p^2 = 9$ و $a_0 = 6$

بالتالي $g(x)$ لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار إيزنشتاين.

3. **(6 درجات).**

إن $deg\, h(x) = 2$.

أصفار (جذور) $h(x)$ هي:

$$\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \notin \mathbb{Q}$$

نلاحظ بأن $h(x)$ لا تملك جذر في $\mathbb{Q}$ بالتالي $h(x)$ لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$

السؤال الثاني: (36 درجة)

$\alpha = \sqrt[3]{5}$ و $\beta = \sqrt{5}i$ عندئذٍ:

1. أثبت أنّ $\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ عدد جبري. **(7 درجات)**
2. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$، ثم أثبت أنّ $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. **(12 درجه)**
3. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ فوق $\mathbb{Q}$. **(7 درجات)**
4. أثبت أنّ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$، وماذا تستنتج. **(6 درجات)**
5. أوجد حقل التفريق لكثيرة الحدود $p(x) = -x^4 + x^2 + 2$ فوق $\mathbb{Q}$. **(4 درجات)**

الحلّ:

1. **(7 درجات).**

$\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ بالتالي

$$\gamma^2 = 1 + \alpha$$

عندئذٍ

$$\gamma^2 - 1 = \sqrt[3]{5}$$

بالتالي

$$(\gamma^2 - 1)^3 = 5$$

عندئذٍ $\gamma^6 - 3\gamma^4 + 3\gamma^2 - 1 = 5$

$$\gamma^6 - 3\gamma^4 + 3\gamma^2 - 6 = 0$$

بالتالي γ جذر لكثيرة الحدود $p(x)$ التي معاملاتها من حقل الأعداد الكسرية

$$p(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 6$$

بالتالي γ عدد جبري

2. .

- $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ **(7 درجات).**

A to Z

نلاحظ بأنّ $\alpha = \sqrt[3]{5}$ جذر لكثيرة الحدود $p(x) = x^3 - 5$

بالإضافة إلى ذلك $p(x)$ موحدة ولا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار ايزنشتاين من أجل العدد الأولي $p = 5$ بالتالي

$$irr_{\mathbb{Q}}(\alpha) = x^3 - 5$$

بالتالي $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 3$

والقاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي $\left\{1, \sqrt[3]{5}, \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right\} = \{1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}\}$

- **(5 درجات)** نلاحظ بأنّ $\deg(\alpha, \mathbb{Q}) = \deg(\sqrt[3]{5}, \mathbb{Q}) = 3$

$$\deg(\beta, \mathbb{Q}) = \deg(\sqrt{5}i, \mathbb{Q}) = 2$$

نلاحظ بأنّ $\deg(\beta, \mathbb{Q}) \nmid \deg(\alpha, \mathbb{Q})$

بالتالي $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$

3. **(7 درجات)**.

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}]$$

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$$

نعلم أنّ $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 3$

ولنوجد $[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)]$

$$[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)] = \deg(\beta, \mathbb{Q}(\alpha))$$

نلاحظ بأنّ β جذر لكثيرة الحدود $p(x) = x^2 + 5 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$ الموحدة، نلاحظ بأنّ $p(x)$ لامختزلة فوق $\mathbb{Q}(\alpha)$ لأن أصفارها لا تنتمي إلى $\mathbb{Q}(\alpha)$

بالتالي

$$deg(\beta, \mathbb{Q}(\alpha)) = 2$$

عندئذٍ $[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)] = 2$

بالتالي

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}] = 6$$

والقاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي $\{1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}, \sqrt{5}i, \sqrt[3]{5}\sqrt{5}i, \sqrt[3]{25}\sqrt{5}i\}$

ملاحظه: يمكن استخدام طريقه آخرى وهي

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta)(\alpha):\mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$$

4. $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$ **(5 درجات)**.

الاحتواء الأول: $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$

■

مكتبة A to Z

$$\sqrt[6]{5}i \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$$
$$-\alpha = (\sqrt[6]{5}i)^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$$
عندئذ
$$\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)}$$

$$\sqrt[6]{5}i \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$$
$$-\beta = (\sqrt[6]{5}i)^3 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$$
عندئذ
$$\boldsymbol{\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)}$$

- وضوحاً $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$

مما سبق نجد الاحتواء الأول $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i)$

الاحتواء الثاني: $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

نلاحظ بأنّ $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ و $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

بالتالي $\sqrt[6]{5}i = \frac{\beta\alpha^2}{5} = \frac{5^{\frac{1}{2}} \times i \times 5^{\frac{2}{3}}}{5} \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

وبما أنّ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ عندئذ $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}i) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

✓ التوسيع $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ لـ $\mathbb{Q}$ هو توسيع بسيط.**(درجه واحده فقط)**

5. **(4 درجات).**

$$p(x) = -x^4 + x^2 + 2 = -(x^4 - x^2 - 2) = -(x^2 - 2)(x^2 + 1)$$

أصفار $p(x)$ هي $\{-i, i, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

بالتالي حقل التفريق لكثيرة الحدود $p(x) = -x^4 + x^2 + 2$ فوق $\mathbb{Q}$ هي $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

ملاحظة

✓ **بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأيّ طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.**

مدرس المقرر: د. احمد علي عيسى

A to Z مكتبة

جامعة طرطوس | امتحان مقرر مواضيع مختارة | اسم الطالب:

كلية العلوم | سنة رابعة رياضيات | المدة: ساعتان

قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الثانية– العام الدراسي 2024–2025م | الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) أثبت صحّة **قضيتين فقط** من القضايا التالية:

1. لتكن $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ كثيرة حدود رئيسية درجتها تساوي m، وليكن $H = max_{0\le i\le m-1}\left|\frac{a_i}{a_m}\right|$ عندئذٍ إذا كان $f(n)$ عدد أولي من أجل عدد صحيح n يحقق الشرط $n \ge H + 2$ فالتالي $f(x)$ لامختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.
2. ليكن F حقل و $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود مختزلة في $F[x]$ علماً أنّ $deg(f(x)) = 2 \; or \; 3$ عندئذٍ $f(x)$ تملك جذر في F.
3. إذا كان p عدداً أولياً و $\phi_p(x) = \frac{x^p-1}{x-1}$ عندئذٍ $\phi_p(x)$ كثيرة حدود لامختزلة في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$.

2) ليكن $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \in Z_3[x]$ حيث $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ حقل والمطلوب:

1. أوجد العناصر القابلة للقلب في الحلقة $Z_3[x]$.
2. أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x-1)$ في الحلقة $Z_3[x]$.
3. أثبت أنّ $Z_3[x]/(f(x))$ حقل، ثمّ عيّن هذا الحقل، وما هو عدد عناصره.

3) ليكن $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسرية، والمطلوب ناقش كثيرات الحدود التالية ذات المعاملات الصحيحة فيما إذا كانت مختزلة أم لا في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$:

1. $f(x) = x^5 + 19x + 23$
2. $g(x) = x^6 + 9x^4 + 12x^2 + 6$
3. $h(x) = x^2 - 2x + 3$

السؤال الثاني: (40 درجة)

ليكن $\alpha = \sqrt[3]{3}$ و $\beta = \sqrt{3}i$ عندئذٍ:

1. أثبت أنّ $\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ عدد جبري.
2. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$.
3. أثبت أنّ $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ وهل الحقل $\mathbb{Q}(\alpha)$ مغلق جبرياً أم لا، ولماذا؟
4. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]$.
5. أثبت أنّ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$، وماذا تستنتج.
6. أوجد حقل التفريق لكثيرة الحدود $p(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ فوق $\mathbb{Q}$.

---انتهت الأسئلة---

مع أطيب التمنيات لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. احمد عيسى

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر مواضيع مختارة لطلاب السنة الرابعة رياضيات

الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) (20 درجة). أثبت صحّة القضيتين التاليتين (10 درجات لكل قضية يتم اختيارها)

أثبت صحّة قضيتين فقط من القضايا التالية:

1. لتكن $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ كثيرة حدود رئيسية درجتها تساوي m، وليكن $H=max_{0\le i\le m-1}\left|\frac{a_i}{a_m}\right|$ عندئذٍ إذا كان $f(n)$ عدد أولي من أجل عدد صحيح n يحقق الشرط $n\ge H+2$ بالتالي $f(x)$ لامختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.
2. ليكن F حقل و $f(x)\in F[x]$ كثيرة حدود مختزلة في $F[x]$ علماً أنّ $deg(f(x))=2\ or\ 3$ عندئذٍ $f(x)$ تملك جذر في F.
3. إذا كان p عدداً أولياً و $\phi_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}$ عندئذٍ $\phi_p(x)$ كثيرة حدود لامختزلة في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$.

الحلّ:

1. مبرهنة.
2. مبرهنه.
3. مبرهنة.

2) (15 درجة). ليكن $f(x)=x^3+x^2+x+2\in Z_3[x]$ حيث $Z_3=\{0,1,2\}$ حقل والمطلوب

1. أوجد العناصر القابلة للقلب في الحلقة $Z_3[x]$. (درجتان).
2. أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x-1)$ في الحلقة $Z_3[x]$. (درجتان).
3. أثبت أنّ $Z_3[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل، ثمّ عيّن هذا الحقل، وما هو عدد عناصره. (11 درجات).

الحلّ:

1. العناصر القابلة للقلب في $Z_3[x]$ هي $\{1,2\}$

2. الباقي هو:

$$r(x) = f(1) = 2$$

3.

- **(6 درجات).**

نلاحظ بأنّ $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \in Z_3[x]$ لا تملك جذر في $Z_3 = \{0,1,2\}$ لأنّ:

$$f(0) = 2 \neq 0$$

$$f(1) = 2 \neq 0$$

$$f(2) = 1 \neq 0$$

بالتالي $f(x)$ لامختزلة في $Z_3[x]$ بالتالي $\langle f(x)\rangle$ ايديال أعظمي في $Z_3[x]$

بالتالي $Z_3[x]/\langle x^3 + x^2 + x + 2\rangle$ حقل

- **(درجتان).** عدد عناصره هو $3^3 = 27$.
- **(3 درجات).**

$$Z_5[x]/\langle x^3 + x^2 + x + 2\rangle = \{ax^2 + bx + c + \langle x^3 + x^2 + x + 2\rangle ; a, b, c \in Z_3\}$$

3) **(15 درجة).** ليكن $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسرية، والمطلوب ناقش كثيرات الحدود التالية ذات المعاملات الصحيحة فيما إذا كانت مختزلة أم لا في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$:

1. $f(x) = x^5 + 19x + 23$
2. $g(x) = x^6 + 9x^4 + 12x^2 + 6$
3. $h(x) = x^2 - 2x + 3$

الحلّ: (ملاحظه: هذا التمرين يمكن أن يحلّ بأكثر من طريقه.)

1. **(5 درجات).**

$$f(x) = x^5 + 19x + 23$$

معيار $Osada$ (أوسادا)

((p عدد أولي $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1x + p$

و $p > 1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|$ عندئذٍ $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$))

لدينا في هذا التمرين $p = 23$ ونلاحظ أن $a_1 = 19\,, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$ إذا

$$1 + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 20$$

نستنتج أن $p > 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|$ بالتالي $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$ حسب معيار $Osada$

2. **(5 درجات).**

يوجد عدد أولي $p = 3$ يحقق الشرط:

① $p \nmid a_6$ حيث $a_6 = 1$

$p|a_i \quad \forall\ 0 \le i \le 5$ ②

$p^2 \nmid a_0$ ③ حيث $p^2 = 9$ و $a_0 = 6$

بالتالي $g(x)$ لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار إيزنشتاين.

3. (5 درجات).

إن $deg\, h(x) = 2$.

أصفار (جذور) $h(x)$ هي:

$$\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}i \notin \mathbb{Q}$$
$$\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}i \notin \mathbb{Q}$$

نلاحظ بأن $h(x)$ لا تملك جذر في $\mathbb{Q}$ بالتالي $h(x)$ لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$

السؤال الثاني: (40 درجة)

ليكن $\alpha = \sqrt[3]{3}$ و $\beta = \sqrt{3}i$ عندئذٍ:

1. أثبت أنّ $\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ عدد جبري.
2. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$.
3. أثبت أنّ $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ وهل الحقل $\mathbb{Q}(\alpha)$ مغلق جبرياً أم لا، ولماذا؟
4. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]$.
5. أثبت أنّ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$، وماذا تستنتج.
6. أوجد حقل التفريق لكثيرة الحدود $p(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ فوق $\mathbb{Q}$.

الحل:

1. (7 درجات).

$\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ بالتالي

$$\gamma^2 = 1 + \alpha$$

عندئذٍ

$$\gamma^2 - 1 = \sqrt[3]{3}$$

بالتالي

$$(\gamma^2 - 1)^3 = 3$$

عندئذٍ $\gamma^6 - 3\gamma^4 + 3\gamma^2 - 1 = 3$

$$\gamma^6 - 3\gamma^4 + 3\gamma^2 - 4 = 0$$

بالتالي γ جذر لكثيرة الحدود $p(x)$ التي معاملاتها من حقل الأعداد الكسرية

$$p(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 4$$

بالتالي γ عدد جبري

2. (7 درجات).

A to Z

$$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$$

نلاحظ بأنّ $\alpha = \sqrt[3]{3}$ جذر لكثيرة الحدود $p(x) = x^3 - 3$

بالإضافة إلى ذلك $p(x)$ موحدة ولا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار ايزنشتاين من أجل العدد الأولي $p = 3$ بالتالي

$$irr_{\mathbb{Q}}(\alpha) = x^3 - 3$$

بالتالي $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 3$

والقاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي $\left\{1, \sqrt[3]{3}, \left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right\} = \left\{1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}\right\}$

3. **(5 درجات)** نلاحظ بأنّ $\deg(\alpha, \mathbb{Q}) = \deg\left(\sqrt[3]{3}, \mathbb{Q}\right) = 3$

$$\deg(\beta, \mathbb{Q}) = \deg\left(\sqrt{3}i, \mathbb{Q}\right) = 2$$

نلاحظ بأنّ $\deg(\beta, \mathbb{Q}) \nmid \deg(\alpha, \mathbb{Q})$

بالتالي $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$

- **(درجتان)** الحقل $\mathbb{Q}(\alpha)$ حقل غير مغلق جبرياً لأنه توجد كثيرة الحدود $q(x) = x^2 + 3 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$ لاتملك جذر في $\mathbb{Q}(\alpha)$.

4. **(7 درجات)**.

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}]$$

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$$

نعلم أنّ $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 3$

ولنوجد $[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)]$

$$[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)] = \deg(\beta, \mathbb{Q}(\alpha))$$

نلاحظ بأنّ β جذر لكثيرة الحدود $p(x) = x^2 + 3 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$ الموحدة، نلاحظ بأنّ $p(x)$ لامختزلة فوق $\mathbb{Q}(\alpha)$ لأن أصفارها لا تنتمي إلى $\mathbb{Q}(\alpha)$

بالتالي

$$deg(\beta, \mathbb{Q}(\alpha)) = 2$$

عندئذٍ $[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)] = 2$

بالتالي

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}] = 6$$

ملاحظه: يمكن استخدام طريقه آخرى وهي

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta)(\alpha):\mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$$

5. $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}\left(\sqrt[6]{3}i\right)$ **(6 درجات)**.

Ato Z

الاحتواء الأول: $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$

$$\sqrt[6]{3}i \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$$
$$-\alpha = (\sqrt[6]{3}i)^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$$
عندئذ
$$\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)}$$

$$\sqrt[6]{3}i \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$$
$$-\beta = (\sqrt[6]{3}i)^3 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$$
عندئذ
$$\boldsymbol{\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)}$$

- وضوحاً $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$

مما سبق نجد الاحتواء الأول $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$

الاحتواء الثاني: $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

نلاحظ بأنّ $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ و $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

بالتالي $\sqrt[6]{3}i = \frac{\beta\alpha^2}{3} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times i \times 3^{\frac{2}{3}}}{3} \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

وبما أنّ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ عندئذ $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

✓ التوسيع $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ لـ $\mathbb{Q}$ هو توسيع بسيط.**(درجه واحده فقط)**

6. **(5 درجات).**

$$p(x) = x^4 - 2x^2 - 3 = (x^2+1)(x^2-3)$$

أصفار $p(x)$ هي $\{-i, i, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

بالتالي حقل التفريق لكثيرة الحدود $p(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ فوق $\mathbb{Q}$ هي $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$.

---ملاحظة---

✓ بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

Ato Z

جامعة طرطوس | امتحان مقرر مواضيع مختاره | اسم الطالب:
كلية العلوم | سنة رابعة رياضيات | المدة: ساعتان
قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الأولى- العام الدراسي 2024-2025م | الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) أثبت صحّة **قضيتين فقط** من القضايا التالية:

1. ليكن F حقلاً، عندئذٍ كلّ كثيرة حدود درجتها تساوي الواحد في حلقة كثيرات الحدود $F[x]$ هي كثيرة حدود لامختزلة في $F[x]$.
2. ليكن E توسيع حقلي لـ F و $[E:F] = n < \infty$ عندئذٍ E توسيع جبري لـ F.
3. لتكن $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ كثيرة حدود رئيسية درجتها تساوي m، وليكن $H = max_{0\le i\le m-1}\left|\frac{a_i}{a_m}\right|$ عندئذٍ إذا كان $f(n)$ عدد أولي من أجل عدد صحيح n يحقق الشرط $n \ge H + 2$ بالتالي $f(x)$ لامختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

2) لتكن $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \in Z_5[x]$ حيث $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ حقل والمطلوب

1. أوجد العناصر القابلة للقلب في $Z_5[x]$.
2. أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x+1)$ في الحلقة $Z_5[x]$.
3. أثبت أنّ $Z_5[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل، ثمّ عيّن هذا الحقل، وما هو عدد عناصره.

3) ليكن $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسرية، والمطلوب ناقش كثيرات الحدود التالية ذات المعاملات الصحيحة فيما إذا كانت مختزلة أم لا في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$:

1. $f(x) = x^5 + 19x + 23$
2. $g(x) = 3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$
3. $h(x) = -x^2 - x - 1$

السؤال الثاني: (40 درجة)

ليكن $\alpha = \sqrt[3]{2}$ و $\beta = \sqrt{2}i$ عندئذٍ:

1. أثبت أنّ العدد $\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ عدد جبري.
2. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$.
3. أثبت أنّ $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ وهل الحقل $\mathbb{Q}(\alpha)$ مغلق جبرياً أم لا، ولماذا؟
4. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]$.
5. أثبت أنّ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$، وماذا تستنتج.
6. أوجد حقل التفريق لكثيرة الحدود $p(x) = x^4 - x^2 - 2$ فوق $\mathbb{Q}$.

---انتهت الأسئلة---

مع أطيب التمنيات لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. احمد عيسى

Ato Z

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر مواضيع مختارة لطلاب السنة الرابعة رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) (16 درجة). أثبت صحة قضيتين فقط من القضايا الآتية (8 درجات لكل قضيه يتم اختيارها)

1. ليكن F حقلاً، عندئذ كلّ كثيرة حدود درجتها تساوي الواحد في حلقة كثيرات الحدود $F[x]$ هي كثيرة حدود لامختزلة في $F[x]$.
2. ليكن E توسيع حقلي لـ F و $[E:F]=n<\infty$ عندئذٍ E توسيع جبري لـ F.
3. لتكن $f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ كثيرة حدود رئيسية درجتها تساوي m، وليكن $H=max_{0\le i\le m-1}\left|\frac{a_i}{a_m}\right|$ عندئذٍ إذا كان $f(n)$ عدد أوليّ من أجل عدد صحيح n يحقق الشرط $n\ge H+2$ بالتالي $f(x)$ لامختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

الحلّ:

1. مبرهنة.
2. مبرهنه
3. مبرهنه

2) (16 درجة). لتكن $f(x)=x^3+2x^2+2x+3\in Z_5[x]$ حيث $Z_5=\{0,1,2,3,4\}$ حقل والمطلوب

1. أوجد العناصر القابلة للقلب في $Z_5[x]$. (3 درجات)
2. أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x+1)$ في الحلقة $Z_5[x]$. (3 درجات)
3. أثبت أنّ $Z_5[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل، ثمّ عيّن هذا الحقل، وما هو عدد عناصره. (10 درجات)

الحل:

1. العناصر القابلة للقلب في $Z_5[x]$ هي $\{1,2,3,4\}$
2. الباقي هو:

$$r(x)=f(-1)=2$$

.3

- **(خمس درجات).**

نلاحظ بأنّ $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \in Z_5[x]$ لا تملك جذر في $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ لأنّ:

$$f(0) = 3 \neq 0$$

$$f(1) = 3 \neq 0$$

$$f(2) = 3 \neq 0$$

$$f(3) = 4 \neq 0$$

$$f(4) = 2 \neq 0$$

بالتالي $f(x)$ لامختزلة في $Z_5[x]$ بالتالي $\langle f(x)\rangle$ ايديال أعظمي في $Z_5[x]$

بالتالي حقل $Z_5[x]/\langle x^3 + 2x^2 + 2x + 3\rangle$

- **(درجتان).** عدد عناصره هو $5^3 = 125$.
- **(3 درجات).**

$$Z_5[x]/\langle x^3 + 2x^2 + 2x + 3\rangle = \{ax^2 + bx + c + \langle x^3 + 2x^2 + 2x + 3\rangle ; a, b, c \in Z_5\}$$

3) **(18 درجة).** ليكن $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسرية، والمطلوب وضع كثيرات الحدود التالية ذات المعاملات الصحيحة فيما إذا كانت مختزلة أم لا في الحلقة $\mathbb{Q}[x]$:

1. $f(x) = x^5 + 19x + 23$
2. $g(x) = 3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$
3. $h(x) = -x^2 - x - 1$

الحل: (ملاحظه: هذا التمرين يمكن أن يحل بأكثر من طريقه.)

1. **(6 درجات).**

$$f(x) = x^5 + 19x + 23$$

معيار $Osada$ (أوسادا)

((p عدد أولي $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1x + p$

و $p > 1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|$ عندئذٍ $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$))

لدينا في هذا التمرين $p = 23$ ونلاحظ أن $a_1 = 19, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$ إذا

$1 + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 20$

نستنتج أن $p > 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|$ بالتالي $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$ حسب معيار $Osada$

2. **(6 درجات).**

يوجد عدد أولي $p = 5$ يحقق الشرط:

A to Z

① $p \nmid a_5$ حيث $a_5 = 3$

② $p|a_i \quad \forall\ 0 \le i \le 4$

③ $p^2 \nmid a_0$ حيث $p^2 = 25$ و $a_0 = 20$

بالتالي $g(x)$ لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار إيزنشتاين.

3. **(6 درجات).**

إن $deg\, h(x) = 2$.

أصفار (جذور) $h(x)$ هي:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \notin \mathbb{Q}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \notin \mathbb{Q}$$

نلاحظ بأن $h(x)$ لا تملك جذر في $\mathbb{Q}$ بالتالي $h(x)$ لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$

ملاحظه: هذا التمرين يمكن تطبيق معيار التقيص(الاختزال)

السؤال الثاني: (40 درجة)

ليكن $\alpha = \sqrt[3]{2}$ و $\beta = \sqrt{2}i$ عندئذٍ:

1. أثبت أنّ العدد $\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ عدد جبري. (7 درجات).
2. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$. (7 درجات).
3. أثبت أنّ $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ وهل الحقل $\mathbb{Q}(\alpha)$ مغلق جبرياً أم لا، ولماذا؟(7 درجات).
4. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]$. (7 درجات).
5. أثبت أنّ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$، وماذا تستنتج؟ (7 درجات).
6. أوجد حقل التفريق لكثيرة الحدود $p(x) = x^4 - x^2 - 2$ فوق $\mathbb{Q}$. (5 درجات).

الحل:

1. (7 درجات).

$\gamma = \sqrt{1+\alpha}$ بالتالي

$$\gamma^2 = 1 + \alpha$$

عندئذٍ

$$\gamma^2 - 1 = \sqrt[3]{2}$$

بالتالي

$$(\gamma^2 - 1)^3 = 2$$

عندئذٍ $\gamma^6 - 3\gamma^4 + 3\gamma^2 - 1 = 2$

$$\gamma^6 - 3\gamma^4 + 3\gamma^2 - 3 = 0$$

بالتالي γ جذر لكثيرة الحدود $p(x)$ التي معاملاتها من حقل الأعداد الكسرية

$$p(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 3$$

بالتالي γ عدد جبري

2. **(7 درجات).**

$$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$$

نلاحظ بأنّ $\alpha = \sqrt[3]{2}$ جذر لكثيرة الحدود $p(x) = x^3 - 2$

بالإضافة إلى ذلك $p(x)$ موحدة ولا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار ايزنشتاين من أجل العدد الأولي $p = 2$ بالتالي

$$irr_{\mathbb{Q}}(\alpha) = x^3 - 2$$

بالتالي $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 3$

والقاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي $\left\{1, \sqrt[3]{2}, \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right\} = \left\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right\}$

3. **(5 درجات)** نلاحظ بأنّ $\deg(\alpha, \mathbb{Q}) = \deg(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = 3$

$$\deg(\beta, \mathbb{Q}) = \deg(\sqrt{2}i, \mathbb{Q}) = 2$$

نلاحظ بأنّ $\deg(\beta, \mathbb{Q}) \nmid \deg(\alpha, \mathbb{Q})$

بالتالي $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$

- **(درجتان)** الحقل $\mathbb{Q}(\alpha)$ حقل غير مغلق جبرياً لأنه توجد كثيرة الحدود $q(x) = x^2 + 2 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$ لاتملك جذر في $\mathbb{Q}(\alpha)$

4. **(7 درجات).**

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}]$$

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$$

نعلم أنّ $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 3$

ولنوجد $[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)]$

$$[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)] = \deg(\beta, \mathbb{Q}(\alpha))$$

نلاحظ بأنّ β جذر لكثيرة الحدود $p(x) = x^2 + 2 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$ الموحده، نلاحظ بأنّ $p(x)$ لامختزلة فوق $\mathbb{Q}(\alpha)$ لأن أصفارها لاتنتمي إلى $\mathbb{Q}(\alpha)$

بالتالي $deg(\beta, \mathbb{Q}(\alpha)) = 2$

عندئذ $[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta):\mathbb{Q}(\alpha)] = 2$

بالتالي

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}] = 6$$

ملاحظه: يمكن استخدام طريقه آخرى وهي

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta)(\alpha):\mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$$

A to Z

5. $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)=\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$ **(6 درجات).**

الاحتواء الأول: $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$

- $$\sqrt[6]{2}i\in\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$$
$$-\alpha=(\sqrt[6]{2}i)^2\in\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$$
عندئذ
$$\boldsymbol{\alpha\in\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)}$$

- $$\sqrt[6]{2}i\in\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$$
$$-\beta=(\sqrt[6]{2}i)^3\in\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$$
عندئذ
$$\boldsymbol{\beta\in\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)}$$

- وضوحاً $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$

مما سبق نجد الاحتواء الأول $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)$

الاحتواء الثاني: $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)\subseteq\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

نلاحظ بأنّ $\alpha\in\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ و $\beta\in\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

بالتالي $\sqrt[6]{2}i=\frac{\beta\alpha^2}{2}=\frac{2^{\frac{1}{2}}\times i\times 2^{\frac{2}{3}}}{2}\in\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

وبما أنّ $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ عندئذ $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}i)\subseteq\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

✓ التوسيع $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ لـ $\mathbb{Q}$ هو توسيع بسيط.**(درجه واحده فقط)**

6. **(5 درجات).**

$$p(x)=x^4-x^2-2=(x^2-2)(x^2+1)$$

أصفار $p(x)$ هي $\{-\sqrt{2},\sqrt{2},i,-i\}$

بالتالي حقل التفريق لكثيرة الحدود $p(x)=x^4-x^2-2$ فوق $\mathbb{Q}$ هي $\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$

ملاحظة

✓ **بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.**

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

A to Z

جامعة طرطوس　　امتحان مقرر مواضيع مختارة / الدورة الأولى ٢٠٢٤　　اسم الطالب:

كلية العلوم　　السنة: الرابعة　　المدة: ساعتان

السؤال الأول (5*6=30 درجة)

اكتب في كل فراغ الخرج المناسب للسطر البرمجي السابق (قد يكون الخرج مكون من أكثر من سطر):

```
>>>  X = [1,2,-2]
>>>  Y = [-1,3,2]
>>>  M = 'exam'
>>>  Z = Y + X
>>>  pr int( Z )
```

1) [-1,3,2,1,2,-2]

```
>>>  pr int( Y[-1])
```

2) ...2... ....

```
>>>  pr nt( M [  :1]
```

3) ...e... ....

```
>>>  complex  (X [1])
```

4) ...2+ oj... .....

```
>>>  0  in  Z
```

5) ...No. / ...False...

```
>>>  List (range (3,7))
```

6) [...3 , 4 , 5 , 6...]

السؤال الثاني (10*3 = 30 درجة)

1) أكتب خرج البرنامج التالي:

```
for  i  in  range (5,0,-2):
    for  j  in  range (i) :
        print(i + j, end =' ')
    print()
```

٢) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def  sss(n) :
    i = 0
    A = [ ]
    while  i < 11  :
        A.append(n * i)
        i = i + 1
    return(A)
```

٣) عبر بكلمات وافية عن الوظيفة التي تفيدها الدالة التالية:

```
def  bb(y) :
    f = 0
    for  j  in  range (1, y) :
        if  y%j == 0  :
            f = f + j
    if  f == 1:
        return("yes")
    else :  return("no")
```

مكتبة A to Z

السؤال الثالث (15*2=30 درجة)

١) اكتب برنامج يحسب ويطبع قيمة التابع التالي من أجل أي قيمة من مجموعة تعريفه:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & ;x>5 \\ 8 & ;x=5 \\ \dfrac{3}{x-7} & ;x<5 \end{cases}$$

٢) اكتب برنامج يستخدم دالة اسمها *comp* وظيفتها اختبار عدد صحيح فيما اذا كان تاما ام غير ذلك ترجع كلمة *complete* في حال كان العدد تام وترجع *not complete* في حال كان غير ذلك، ثم استدعها لاختبار عدد يدخله المستخدم.

انتهت الأسئلة

A to Z مكتبة

طرطوس في ٢٠٢٤ / ٧ / ٤ مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح د. سراب محمود

سلم تصحيح فقرر مواضيع مختارة / الدورة الثانية / 2024/2023

[1] 30 درجة

(5) 1) [-1, 3, 2, 1, 2, -2]

(5) 2) 2

(5) 3) e

(5) 4) 2 + 0j

(5) 5) NO / False

(5) 6) [3, 4, 5, 6]

مكتبة AtoZ

[2] 30 درجة

(10) 1)
5 6 7 8 9
3 4 5
1

(10) 2) يرجع قائمة بمضاعفات العدد n وعددها 11 بدءاً من 0

(10) 3) ترجع كلمة yes في حال العدد أولي , no في حال غير أولي

السؤال الثالث: 30 درجة

1)
```
float(input("x="))
if x>5:
    f=x**3
elif x==5:
    f=8
else:
    f=3/(x-7)
print("f(x)=",f)
```

2)
```
def comp(m):
    s=0
    for i in range(1,m):
        if m%i==0:
            s=s+i
    if s==m:
        print("complet")
    else:
        print("not complet")
int(input("n="))
comp(n)
```

مكتبة Ato Z

جامعة طرطوس — امتحان مقرر مواضيع مختارة / الدورة الأولى 2024 — اسم الطالب:

كلية العلوم — السنة: الرابعة

الهدة: ساعتان

السؤال الأول (5*6=30 درجة)

اكتب في كل فراغ الخرج المناسب للسطر البرمجي السابق (قد يكون الخرج مكون من أكثر من سطر):

```
>>> X = [-4,-3,-2]
>>> Y = [4,3,2]
>>> box = 'exam'
>>> print(X + Y)
```

i) [-4, -3, -2, 4, 3, 2] 5

```
>>> print(X[-1])
```

2) -2 5

```
>>> print(X[ :-1])
```

3) [-4, -3] 5

```
>>> complex(X[1])
```

4) -3 + 0j 5

```
>>> 0 in box
```

5) No, False 5

```
>>> List(range(1,7))
```

6) [1, 2, 3, 4, 5, 6] 5

السؤال الثاني (10*3 = 30 درجة)

1) أكتب خرج البرنامج التالي:

```
for i in range (5,0,-2):
    for j in range (i) :
        print(i+ j, end =' ')
    print()
```

5 6 7 8 9
3 4 5
1

10

2) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def aa(x) :
    i = 0
    A = [ ]
    while i < 10 :
        A.append(x**i)
        i = i + 1
    return(A)
```

إيجاد قائمة تحوي العدد x العشرة الأولى [x^0, x^1, ..., x^9]

10

3) عبر بكلمات وافية عن الوظيفة التي تفيدها الدالة التالية:

```
def bb(y) :
    f = 1
    for j in range (1, y) :
        if y%j == 0 :
            f = f * j
    if f == 1:
        return("yes")
    else : return("no")
```

تحوي جداء قواسم العدد y الأصغر تماماً من y فإذا كانت الجداء = 1 أي y أولي فقط yes والا ليس أولي ونطبع no.

10

مكتبة A to Z

السؤال الثالث (15*2=30 درجة)

1) اكتب برنامج يحسب ويطبع قيمة التابع التالي من أجل أي قيمة من مجموعة تعريفه:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3} & ;x>5\\ 0 & ;x=5\\ \dfrac{1}{x-7} & ;x<5\end{cases}$$

2) اكتب برنامج يستخدم دالة اسمها *comp* وظيفتها اختبار عدد صحيح فيما اذا كان تاما أم غير ذلك ترجع كلمة *complete* في حال كان العدد تام وترجع *not complete* في حال كان غير ذلك، ثم استدعها لاختبار عدد يدخله المستخدم.

انتهت الأسئلة

مكتبة A to Z

طرطوس في 22 / 2 / 2024 ؛ مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح د. سراب محمود

السؤال الثالث: 30

السؤال الثالث:

```
import math
x=float(input("x="))
if x>5:
    f= sqrt(x-3)
elif x==5:
    f=0
else:
    f=1/(x-7)
print(f)
```

```
def comp(n):
    s=0
    i=1
    while (i<n):
        if n%i==0:
            s=i+s
        i=i+1
    if s==n:
        print("complete")
    else:
        print("not complete")
x=int(input("x="))
comp(x)
```

جامعة طرطوس امتحان مقرر مواضيع مختارة الدورة التكميلية ٢٠٢٣ اسم الطالب:

كلية العلوم السنة: الرابعة المدة: ساعتان

السؤال الأول (5*6=30 درجة)

اكتب في كل فراغ الخرج المناسب للسطر البرمجي السابق (قد يكون الخرج مكون من أكثر من سطر):

```
>>>  X = [4,3,2,1]
>>>  S = 3
>>>  X.append (7)
>>>  print( X )
```

1) ..[4,3,2,1,7].. 5

```
>>>  print( Len (X))
```

2) .....5..... 5

```
>>> X..Sort ()
```

3) .[1,2,3,4,7]. 5

```
>>>  X[2]**3
```

4) ..... 27 ... 5 .....

```
>>> for  k  in  X :
        S = S + i
>>> print( S )
```

5) ...13... ..... 5 .....

```
>>>  List (range (10,15))
```

6) 10 11 12 13 14 5

السؤال الثاني (10*3 = 30 درجة)

1) أكتب خرج البرنامج التالي:

```
for  i  in  range (3) :
    for  j  in  range (5-i) :
        print(j,end=' ')
    print()
```

i=0 j= 0 0 0 0 0
i=1 j= 1 1 1 1
i=2 j= 2 2 2

10

2) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def  aa(n) :
    f = 1
    for  i  in  range(1, n+1):
        f = f * i
    return(f)
```

صاب n!

10

٣) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def  bb(x) :
    j = 1
    B = [ ]
    while(  j  <=  x):
        if  x%j == 0:
            B.append(j)
        j = j + 1
    return(B)
```

10 ترجع قائمة بقواسم العدد x

السؤال الثالث (15*2=30 درجة)

30

١) اكتب دالة تحسب مجموع جميع قواسم عدد صحيح (n) ما عداه، بكلام آخر، (مجموع جميع قواسم عدد صحيح (n) الأصغر تماما منه)

٢) اكتب برنامج، مستخدماً الدالة السابقة، لكتابة برنامج، يدخل عدداً صحيحاً ويختبر فيما اذا كان أولي أم لا فيطبع كلمة Yes في حال كان أولي و No في حال كان غير أولي..

A to Z

انتهت الأسئلة

```
int input(x)
if fact(x)==1:
    print("yes")
else print("No")

def fact(n):
    S=0
    i=1
    while(i<n):
        if(n%i==0):
            S=S+i
        i=i+1
    return(S).
```

جامعة طرطوس　　امتحان مقرر مواضيع مختارة　　اسم الطالب:

كلية العلوم　　السنة: الرابعة　　المدة: ساعتان

السؤال الأول (5*6=30 درجة)

اكتب في كل فراغ الخرج المناسب للسطر البرمجي السابق (قد يكون الخرج مكون من أكثر من سطر):

```
>>> m = 1
>>> n = 1
>>> X = [5]
>>> X.append(m)
>>> Y = [4,1,2,5,3]
>>> Z = Y.sort()
>>> print(X)
```

1)..... ....

```
>>> pr int( Z )
```

2) ....

```
>>> pr int( Len ( X ))
```

3) ....

```
for a in Y :
    if a > 3 :
        m = m + a
    else : n = n * a
```

```
>>> pr int( m )
```

4) ....

```
>>> pr int( n )
```

5)..... ....

```
>>> pr int( rang (5,10 ))
```

6) ....

السؤال الثاني (10*3 = 30 درجة)

1) أكتب خرج البرنامج التالي:

```
for i in range (2) :
    for j in range (2*i) :
        if (i <= j)
            print(i,end=' ')
    print()
```

2) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def aa(x, y) :
    if x != y :
        if x > y :
            x = x - y
        else : y = y - x
    return(x)
```

3) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def bb() :
    f = 1
    B = [ ]
    for j in range (10) :
        B.append(j**3)
    return(B)
```

A to Z

السؤال الثالث (15*2=30 درجة)

1) اكتب دالة تحسب مجموع جميع قواسم عدد صحيح (n) ما عداه، بكلام آخر، (مجموع جميع قواسم عدد صحيح (n) الأصغر تماما منه)
2) اكتب برنامج، مستخدماً الدالة السابقة، لكتابة برنامج، يطبع الأعداد التامة الموجودة في المجال $[0,100]$.

توضيح: العدد التام هو العدد الصحيح الذي مجموع قواسمه ما عداه يساوي هذا العدد.

انتهت الأسئلة

A to Z

طرطوس في 13 / 7/ 2023 مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح د. سراب محمود

جامعة طرطوس　　امتحان مقرر مواضيع مختارة　　اسم الطالب:

كلية العلوم　　السنة: الرابعة　　المدة: ساعتان

السؤال الأول (5*6=30 درجة)

اكتب في كل فراغ الخرج المناسب للسطر البرمجي السابق (قد يكون الخرج مكون من أكثر من سطر):

```
>>> m = 1
>>> n = 1
>>> X = [5]
>>> X.append(m)
>>> Y = [4,1,2,5,3]
>>> Z = Y.sort()
>>> print(X)
```

1) [5, 1] (5)

```
>>> print( Z )
```

2) [1, 2, 3, 4, 5] (5)

```
>>> print( Len ( X ))
```

3) 2 (5)

```
for a in Y :
    if a > 3 :
        m = m + a
    else : n = n * a
>>> print( m )
```

4) 10 (5)

```
>>> print( n )
```

5) 6 (5)

```
>>> print( rang (5,10 ))
```

6) 5 6 7 8 9 (5)

السؤال الثاني (10*3 = 30 درجة)

1) أكتب خرج البرنامج التالي:

```
for i in range (2) :
    for j in range (2+i) :
        if (i <= j)
            print(i,end=' ')
    print()
```

(3) 0 0 (3) 1 1

2) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def aa(x, y) :
    if x!= y :
        if x > y :
            x = x - y
        else : y = y - x
    return(x)
```

(10) إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين (x,y)

3) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def bb() :
    f = 1
    B = [ ]
    for j in range (10) :
        B.append(j**3)
    return(B)
```

حساب مكعبات الأعداد من 0 إلى 9 (10)

A to Z

السؤال الثالث (15*2=30 درجة)

1) اكتب دالة تحسب مجموع جميع قواسم عدد صحيح (n) ما عداه، بكلام آخر، (مجموع جميع قواسم عدد صحيح (n) الأصغر تماما منه)

2) اكتب برنامج، مستخدماً الدالة السابقة، لكتابة برنامج، يطبع الأعداد التامة الموجودة في المجال $[0,100]$.

توضيح: العدد التام هو العدد الصحيح الذي مجموع قواسمه ما عداه يساوي هذا العدد.

A to Z

```
def ff(n):
    S=0
    i=1
    for i in rang(n):
        if n%i==0:
            S=S+i
    while(i<n):
        if n%i==0:
            S=S+i
        i=i+1
    return S.
```

انتهت الأسئلة

```
A=[ ]
n=input(
n=int(input(n))
for i in rang(101):
    if ff(i)==i:
        A.append(i)
print(A)
```

طرطوس في 13 / 7/ 2023 مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح د. سراب محمود

جامعة طرطوس امتحان مقرر مواضيع مختارة اسم الطالب:

كلية العلوم السنة: الرابعة المدة: ساعتان

السؤال الأول (5*6=30 درجة)

اكتب في كل فراغ الخرج المناسب للسطر البرمجي السابق (قد يكون الخرج مكون من أكثر من سطر):

```
>>> X = [4,3,2]
>>> Y = [6,2,4]
>>> print(X + Y)
```

1) .....

```
>>> print(Len(X))
```

2) .....

```
>>> print(List())
```

3) .....

```
>>> print(X[1]**2)
```

4) .....

```
>>> if 10 in X + Y :
        print('ok')
    else : print('no')
```

5) .....

```
>>> print(List(range(10,30,5))
```

6) .....

السؤال الثاني (10*3 = 30 درجة)

1) أكتب خرج البرنامج التالي:

```
for i in range (5) :
    for j in range (i+1) :
        print(j)
    print
```

2) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def aa(x) :
    i = 0
    A = [ ]
    while i < 13 :
        A.append(i * x)
        i = i + 1
    return(A)
```

3) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def bb(y) :
    f = 1
    B = [ ]
    for j in range (10) :
        f = f * y
        B.append(f)
    return(B)
```

السؤال الثالث (15*2=30 درجة)

١) اكتب برنامج يتضمن دالة تحسب $n!$ واستعملها لحساب

$$A = n!.m!.p! \quad \text{و} \quad B = \binom{n}{m}$$

٢) اكتب برنامج يدخل عددا صحيحاً x ويختبر فيما اذا كان هذا العدد أولي أم لا فيطبع كلمة yes في حال كان العدد أولي ويطبع no في حال كان غير أولي.

طرطوس في ٩ / ٣ / ٢٠٢٣ مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح د. محمود سراب محمود

سلم التصحيح

جامعة طرطوس | امتحان مقرر مواضيع مختارة | اسم الطالب:

كلية العلوم | السنة: الرابعة | المدة: ساعتان

30

السؤال الأول (5*6=30 درجة)

اكتب في كل فراغ الخرج المناسب للسطر البرمجي السابق (قد يكون الخرج مكون من أكثر من سطر):

30

```
>>> X = [4,3,2]
>>> Y = [6,2,4]
>>> pr int(X + Y)
```

1) [4,3,2,6,2,4] 5

```
>>> pr int(Len(X))
```

2) ....3.... 5

```
>>> pr int(List())
```

3) [....] 5

```
>>> pr int(X[1]**2)
```

4) ....9.... 5

```
>>> if 10 in X+Y :
        pr int('ok')
    else : pr int('no')
```

5) ....no.... 5

```
>>> pr int(List(range(10,30,5))
```

6) [10,15,20,25] 5

السؤال الثاني (10*3 = 30 درجة)

1) أكتب خرج البرنامج التالي:

```
for i in range (5) :
    for j in range (i+1) :
        pr int(j)
    pr int
```

0 1 10
0 1 2
0 1 2 3
0 1 2 3 4
0 1 2 3 4 5

2) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def aa(x) :
    i = 0
    A = [ ]
    while i < 13 :
        A.append(i * x)
        i = i + 1
    return(A)
```

حساب مضاعفات العدد x الأقل من 13

3) اكتب (بعبارة مختزلة) وظيفة الدالة:

```
def bb(y) :
    f = 1
    B = [ ]
    for j in range (10) :
        f = f * y
        B.append(f)
    return(B)
```

ارجاع قائمة بقوى العدد y [y, y², ..., y¹⁰]

السؤال الثالث (15*2=30 درجة)

١) اكتب برنامج يتضمن دالة تحسب $n!$ واستعملها لحساب 20

$$A = n!.m!.p! \quad \text{و} \quad B = \binom{n}{m}$$

٢) اكتب برنامج يدخل عددا صحيحاً x ويختبر فيما اذا كان هذا العدد أولي أم لا فيطبع كلمة yes في حال كان العدد أولي ويطبع no في حال كان غير أولي. 10

```
m= int( input("m="))
S=0
i=2
while (i < m) :
    if m % i ==0
        S= S+i
    i=i+1
if  S==0  :
    print ("yes")
else :
    print ("no")
```

(2) 5 — 5

```
def  fact ( n) :
    i=1
    f=1
    while (i <=n) :
        f=f *i
        i=i+1
    return(f)
```

(1) 10

```
m=int(input("m="))
n = int(input("n="))
print
A = fact(n) * fact(m) * fact(p)
B = fact(n) / (fact(m) * fact(n-m))
print("A=",A)
print ("B=", B)
```

5 = 2+2+1

مكتبة A to Z