كلية العلوم

القسم : الكيمياء

السنة : الاولى

مبوب وملخص

شامل

رياضيات عامة2

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Zمكتبة

كلية العلوم

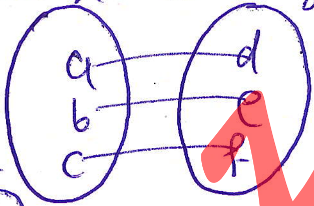
يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ملخص رياضيات
/ 12 / عامة

م١ + م٢،٣

تصنيف الدوال:

تعريف الدالة: هي علاقة تربط f فيها كل عنصر من x (منطلق) ترتبط بعنصر وحيد فقط من y (مستقر)



ملاحظة: x هو المنطلق والذي يمثل مجموعة

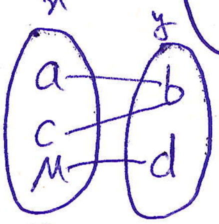
تعريف التابع

y : هو المستقر الذي يمثل صورة العدد.

حيث $y = f(x)$

فإذا قلنا أن $f(2)=4$ تقرأ (4 هي صورة العدد 2)

$x=2$ صورة $f(x)=y$



يسمى تابع

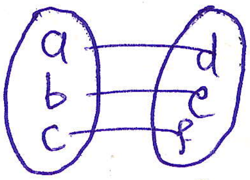
لا يسمى تابعاً (لا يجوز أن يكون للمنطلق مستقران)

$f(x)=x^2$ ، $f(x)=25$ ← $+5$ ، -5

- تصنف الدوال إلى:

1- الدالة المتباينة 2- الدالة الغامرة 3- دالة التقابل 4- الدالة العكسية

1] الدالة المتباينة: نقول عن دالة إنها متباينة إذا كان لكل عنصر من المستقر (y) صورة واحدة من المنطلق (على الأكثر) (أي عنصر واحد فقط)



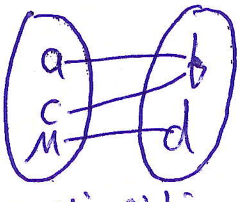
تابع متباين

شروط الدالة المتباينة:

1] $\forall\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

2] $\forall\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

2] الدالة الغامرة: نقول عن دالة إنها غامرة إذا كان فيها كل عنصر من مستقرها صورة لعنصر واحد (على الأقل) من المنطلق (أي عنصر واحد أو أكثر)



تابع غامر

ملاحظة: إذا كان التابع متباين فهو يحقق شرط الغامر

أي إذا كان التابع متباين فهو غامر، ولكن إذا كان غامر ليس بالضرورة أن يكون متباين

شرط التابع الغامر:

$$\forall\ y \in B, \exists\ x \in A : y = f(x)$$

(أجعل x بطرف والتابع الذي يحوي y بطرف)

3] دالة التقابل: هي تابع يكون متباين وغامر معاً.

تقابل ⇐ غامر ⇐ متباينة

4 **الدالة العكسية**: نستطيع أن نوجد الدالة العكسية إذا كانت الدالة تقابل نرمز للدالة العكسية بـ f^{-1} (أي نكتب بدلاً من y نكتب x)

تمرين: برهن أن الدالة $f: R/[-2] \to R/[3]$ وفق: $f(x)=\dfrac{3x-5}{x+2}$

تقابل ثم أوجد الدالة العكسية لها.

الحل: نبرهن أن الدالة متباينة:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

$$\frac{3x_1-5}{x_1+2}=\frac{3x_2-5}{x_2+2}$$ (جداء الطرفين = جداء الوسطين)

$$(3x_1-5)(x_2+2)=(3x_2-5)(x_1+2)$$

$$\cancel{3x_1x_2}+6x_1-5x_2-\cancel{10}=\cancel{3x_1x_2}+6x_2-5x_1-\cancel{10}$$

$$6x_1-5x_2=6x_2-5x_1 \Rightarrow$$

$$6x_1+5x_1=6x_2+5x_2$$

بالقسمة على 11:

$$11x_1=11x_2$$

$$x_1=x_2$$

الدالة متباينة.

نبرهن إنها غامرة:

$$\forall y\in B, \exists x\in A, y=f(x)$$

نعلم أن $f(x)=y$ نعوض:

$D=R/[-2]$

$$y=\frac{3x-5}{x+2}$$ (جداء الطرفين = جداء الوسطين)

$$(3x-5)=y(x+2)$$

$$3x-5=xy+2y \Rightarrow$$

$$3x-xy=2y+5 \Rightarrow x(3-y)=2y+5$$

$$x=\frac{2y+5}{3-y} \to D=R/[3]$$

نلاحظ أن x أصبح بطرف والدالة y بطرف الدالة غامرة وبما أن الدالة متباينة وغامرة فهي دالة تقابل.

- الدالة العكسية:

$$f^{-1}(x)=\frac{2x+5}{3-x}$$ (نستبدل كل y بـ x)

نهاية دالة : نقول أن الدالة لها نهاية عند النقطة $x=a$ اذا فقط اذا تحقق الشرط: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ (النهاية من اليمين = النهاية من اليسار) وذلك في حال كانت للدالة قيم مثل ($x<a$, $x>a$)

النهاية من اليسار $x<a$ — 0 — النهاية من اليمين $x>a$

مثال : ابحث في وجود نهاية لكل من الدوال الآتية:

1] $f(x)=\frac{|x|}{x}$, $x=0$ (القيمة المطلقة فدائماً تكون العدد الذي بداخلها موجب أو سالب)

ندرس النهاية من اليمين ومن اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{+x}{x} = +1$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

الدالة ليس لها نهاية عند $x=0$

2] $f(x)=e^{\frac{3}{x-1}}$, $x=1$ (العدد النيبري (e) قد يأخذ قيم موجبة وسالبة)

ندرس النهاية من اليمين واليسار:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{3}{1-1}} = e^{\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{3}{1-1}} = e^{-\infty} = 0$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$

الدالة ليس لها نهاية عند ما $x=1$

ملاحظة: عند ايجاد نهاية دالة ما $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ عند ما تسعى x نحو a (عند نقطة وحيدة) قد يحدث لدينا احدى الحالات التالية: $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ (وهي حالات عدم تعيين يمكن ازالتها بطريقة اوبتال)

طريقة اوبتال ، $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{h'(x)}{g'(x)}$ ← مشتق البسط / ← مشتق المقام

مثال: (امتحان وزارة)

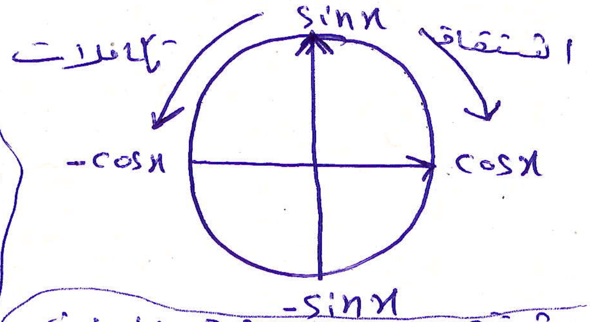
اوجد النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^3}$$

تذكر: مشتق عدد من الشكل x^n:

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

مشتقات وتكاملات الدوال المثلثية:



مشتق جداء = مشتق الأول في الثاني + مشتق الثاني في الأول

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

مشتق x يساوي الواحد

$$\lim_{x\to 0}\frac{(0)\cos(0)-\sin(0)}{(0)^3}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم التعيين (ع.ت)

باستخدام اوبيتال: نشتق البسط ونشتق المقام

$$f'(x)=\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(0)-(0)\sin(0)-\cos(0)}{3(0)}=\frac{0}{0}$$

ع.ت

نشتق مرة أخرى

$$f''(x)=\frac{-\cancel{\sin x}-\sin x-x\cos x+\cancel{\sin x}}{6x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(0)-(0)\cos(0)}{6(0)}=\frac{0}{0}$$

ع.ت

نشتق مشتق ثالث

$$f'''(x)=\frac{-\cos x-\cos x+x\sin x}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(0)-\cos(0)+(0)\sin(0)}{6}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$$

تمارين الحلول

1] اوجد نهاية كل من التوابع الآتية:

1] $f(x)=\begin{cases}x^2 & : x\le 1\\ x+1 & : x>1\end{cases}\quad , x\to 1$

الحل: ندرس النهاية من اليمين واليسار:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2)=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=1+1=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x)$$

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار الدالة ليس لها نهاية عندما $x\to 1$

2] $f(x) = \dfrac{\sin(2x) - \cos(2x) - 1}{\sin x - \cos x}$, $x \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

تذكر: مشتق $\sin(ax)$:
$(\sin ax)' = a\cos(ax)$
مشتق: $\cos(ax)$:
$(\cos(ax))' = -a\sin ax$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2\frac{\pi}{4}) - \cos(2\frac{\pi}{4}) - 1}{\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2}) - 1}{\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1 - 0 - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0} \text{ ع.ت}$$

باستخدام لوبتال:

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x) + 2\sin(2x)}{\cos x + \sin x}$$

$2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos(\frac{\pi}{2}) + 2\sin(\frac{\pi}{2})}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2(0) + 2(1)}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

3] $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 2 \\ x+2 & , x > 2 \end{cases}$, $x \longrightarrow 2$

ندرس النهاية من اليمين واليسار:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

الدالة لها نهاية عندما $x \longrightarrow 2$

ملاحظة: توجد حالات عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$ ولا نستطيع ازالتها بطريقة لوبتال اذا كانت من هذا الشكل لذلك نلجأ الى طرق أخرى مثل تغير المتحول:

4] $f(x) = (x - \frac{\pi}{2})\,tg(x)$, $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$tg(\frac{\pi}{2}) = \infty$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})\,tg(\frac{\pi}{2}) = 0\cdot\infty \text{ ع.ت}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $0\cdot\infty$ نحاول ازالة عدم التعيين بطريقة تغيير المتحول

نفرض أن :

$$f(t) = t\cdot tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -t\cot g(t)$$

$$= -t\,\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$= \frac{-t}{\sin t}\cdot\cos t$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{-t}{\sin t}\cdot\cos(t) = -(1)(1) = -1$$

مبرهنة ذكرت في الاعلى

① $x = t+\frac{\pi}{2} \Leftarrow x-\frac{\pi}{2} = t$

② عندما كان $x \to \frac{\pi}{2}$

نعوض :

$t = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = 0$

$\Rightarrow t \to 0$

ملاحظة :

$tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot g(t)$

نذكر :

$\cot g(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$

نذكر :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{tg\, x} \; ; x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(0)}{tg(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{ع.ت}$$

باستخدام اوبتال :

$$f'(x) = \frac{\sin x}{1+tg^2(x)}$$

نذكر :

$(tg(x))' = 1+tg^2(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(0)}{1+tg^2(0)} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

استمرار الدوال : نقول عن دالة إنها مستمرة اذا وفقط اذا تحقق :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار = الصورة

انقطاع دالة: حالات انقطاع دالة:

1) $a \notin A$ اذا كانت النقطة التي تسعى لها x $(x \to a)$ لا تنتمي إلى المجال (نقطة انقطاع من النوع الثاني تمكن ازالته)

2) $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ (نقطة انقطاع من النوع الأول لا يمكن ازالته)

3) احدى النهايتين على الأقل $\lim_{x\to a^+} f(x)$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ليست موجودة أو غير منتهية (غير معرفة) (نقطة انقطاع من النوع الأول لا يمكن ازالته)

4) $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ (نقطة انقطاع من النوع الثاني يمكن ازالته بالتعديل)

تمرين: بين $x=2$ نقطة انقطاع للدالة: **هام**

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x<2 \\ 4 & ; x=2 \\ x+1 & ; x>2 \end{cases}$$

بين نوعها وهل يمكن ازالتها

الحل: ندرس النهايتين من اليمين ومن اليسار:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x+1 = 2+1 = 3$$

$$f(2) = 4$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} \neq f(2)$

الدالة ليست لها نهاية عند $x=2$ لأن $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ اذاً نقطة انقطاع من النوع الأول لا يمكن ازالته.

تمرين: بين أن $x=1$ نقطة انقطاع للدالة وبين نوعها وهل يمكن ازالتها:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , x\neq 1 \\ 3 & , x=1 \end{cases}$$

الحل: ندرس النهايات: لا توجد مجالات (هو الجزء الآخر) لذلك ندرس النهاية عند الواحد

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$$

$$f(1) = 3$$

اذاً $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

النهاية لا تساوي الصورة نقطة انقطاع من النوع الثاني يمكن ازالته بالتعديل

التعديل: أي نغير قيمة الصورة بحيث تساوي النهاية.

$$\underbrace{\tilde{f}}_{\text{تعديل}} = \begin{cases} x+1 & , x\neq 1 \\ 2 & , x=1 \end{cases}$$

تعديلها نغير الصورة بحيث تصبح تساوي نهاية التابع.

تمرين: بيّن لماذا تكون الدالة $f(x)=\frac{\sin x}{2x}$ غير مستمرة عند الصفر ثم عدّل f بحيث نحصل على دالة مستمرة عندها $x=0$

الحل: نلاحظ أن الدالة $\frac{\sin x}{2x}$ غير مستمرة عند $x=0$ حيث

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(0)}{2(0)}=\frac{0}{0}$ إذا غير معرفة ولها نقطة انقطاع من النوع الثاني

نهايتها الأولية حيث نعلم أن $\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{2x}}_{\text{مبرهنة}\,=1}=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$ وبالتالي نحدد الدالة

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{2x} & , x\neq 0\\ \frac{1}{2} & ; x=0\end{cases}$$

في هذه الحالة يمكن القول انها مستمرة لأن:

$$\lim_{x\to 0}\tilde{f}(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2x}\right)=\frac{1}{2}=\tilde{f}(0)$$

تمرين عام: لتكن الدالة المعرفة بالشكل: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a & , x>2\\ bx^3+b & ; 1\leq x\leq 2\\ x & ; x<1\end{cases}$$

عيّن الثابتان b, a لتكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل: حتى تكون الدالة مستمرة يجب أن يتحقق الشرط:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

لدينا $x\longrightarrow x^2+a$ دالة مستمرة على المجال $]2,+\infty[$

$x\longrightarrow bx^3+b$ دالة مستمرة على $[1,2]$

$x\longrightarrow x$ دالة مستمرة على $]-\infty,1[$.

ندرس استمرار الدالة عند $x=1$ و $x=2$ لتصبح مستمرة على $\mathbb{R}$.

الاستمرار عند $x=1$: يجب أن يتحقق الشرط:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}}f(x)=\lim_{x\to}x=1 \quad , \quad \lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}}f(x)=\lim_{x\to 1^+}bx^3+b=2b$$

يتبع ←

وفق شروط الاستمرار:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

$$2b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

الاستمرار عند $x=2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 + a = 4 + a$$

$$\lim_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} f(x) = \lim_{x\to 2^-} bx^3 + b = (\tfrac{1}{2})(8) + \tfrac{1}{2} = 4 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{9}{2}$$

حسب الشرط:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$4 + a = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{2} - 4$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

إذاً تكون الدالة مستمرة إذا كانت بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2} & , x > 2 \\ \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} & ; 1 \le x \le 2 \\ x & ; x < 1 \end{cases}$$

تمرين: ادرس استمرار الدالة على مجموعة تعريفها:
وهل يوجد نقاط انقطاع حدد نوعها في حال وجودها.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ x+1 & , x \ge 2 \end{cases}$$

الحل: ندرس استمرار الدالة:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} x+1 = 2+1 = 3 = f(2) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

نقول أن الدالة مستمرة من اليمين.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4 \neq f(2)$$

الدالة غير مستمرة من اليسار.

إذا $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$ إذن نقطة انقطاع من النوع الأول لا يمكن إزالتها.

تمرين: ادرس استمرار الدالة $f(x) = \frac{tg\, x}{x}$ عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(0)}{0} = \frac{0}{0}$$ الدالة غير مستمرة

لأن $0 \notin R\setminus\{0\}$ نقطة انقطاع من النوع الثاني يمكن إزالتها:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = (1)(1) = 1$$

مبرهنة $=1$

نجد لي الدالة:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{tg\, x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

دالة مستمرة عند $x=0$.

المشتقات وتفاضل الدوال

م٢ د٢ ع٢

نعطي قوانين الاشتقاقات:

مشتق العدد الثابت $=0$

1] $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

2] $f(x) = ax+b \Rightarrow f'(x) = a$

3] $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

4] $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

(مشتق لوغرتم: مشتق ما داخل اللوغرتم على ما داخل اللوغرتم)

$f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

5] $f(x) = (e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$

6] $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$

7] $f(x) = \sin ax \Rightarrow f'(x) = a\cos ax$

8) $f(x) = \cos(ax) = -a \sin ax$

9) $f(x) = \tan(x) \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$

10) $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

11) مشتق كسر:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)\cdot h(x) + h'(x)\cdot g(x)}{(h(x))^2}$$

مشتق البسط في المقام + مشتق المقام في البسط / مربع المقام

12) مشتق الجذر: مشتق ما داخل الجذر / ضعف الجذر

$$f(x) = \sqrt{h(x)} = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$$

13] $f(x) = \left(\sqrt[n]{g^m(x)}\right) = \left(g(x)^{\frac{m}{n}}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{m}{n}\, g(x)^{\frac{m}{n}+1} \cdot g'(x)$

14] $f(x) = tg(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + tg^2 x$

15] $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$\quad \hookrightarrow \arcsin(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$

16] $\arccos(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$

$\quad \hookrightarrow \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

17] $\operatorname{arctg}(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$

$\quad \hookrightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{a}{x^2 + a^2}$

18] $\operatorname{arch}(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - 1}}$

$\quad \hookrightarrow \operatorname{arch}\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

19] $\operatorname{arsh}(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 + u^2(x)}}$

$\quad \hookrightarrow \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

ع2) أوجد نهاية كل من الدوال الآتية

1] $f(x) = \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin(0) - \sin 2(0)}{(0)^3} = \dfrac{0}{0}$

ع . ــــــ نقطة انقطاع من النوع الثاني نهاية أزلية

$a \notin A$

باستخدام اوبتال :

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{3x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(0) - 2\cos(0)}{3(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{ع . ت}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{6x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2\sin(0) + 4\sin(0)}{6(0)} = \frac{0}{0} \quad \text{ع . ت}$$

$$f'''(x) = \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2\cos(0) + 8\cos(0)}{6} = \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & , x \neq 3 \\ 0 & , x = 3 \end{cases}$$

ندرس نهاية الدالة من اليمين واليسار :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{-(\cancel{x-3})}{\cancel{x-3}} = -1$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}} = +1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

نقطة انقطاع من النوع الاول للطالب ازلية والدالة ليس لها نهاية عندما $x = 3$

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} \quad , x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(0)\sin(0)}{1 - \cos(0)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{ع . ت}$$

باستخدام اوبتال

يتبع

باستخدام اوبيتال :

$$f'(x) = \frac{\sin x + x\cdot\cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(0) + 0\cos x(0)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$$ ح.ع

$$f''(x) = \frac{\cos x + \cos x - x\cdot\sin x}{\cos x} = \frac{2\cos x - x\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(0) - (0)\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{2(1) - 0}{1} = 2$$

اثبت أن

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{x-9} = \frac{1}{6}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = 4$$

1) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(4-4)}{2-2} = \frac{0}{0}$$ ح.ع

باستخدام اوبيتال :

$$\lim f'(x) = \frac{2x\cos(x^2-4)}{1}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2(2)\cos(4-4)}{1} = 4(1) = 4$$

2) $$\lim_{x\to 9} \frac{\sin(\sqrt{9}-3)}{9-9} = \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$$ ح.ع

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x}-3)}{+1} \Rightarrow \lim_{x\to 9} \frac{\frac{1}{2\sqrt{9}}\cos(\sqrt{9}-3)}{+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}(1)}{+1} = \frac{1}{6}.$$

اولا نشتق نفك من الداخل :

1] $$f(x) = [\ln(tg(x))]^2 \Leftrightarrow ([g(x)]^n)' = n(g(x))^{n-1} g'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2[\ln(tg(x))]^{2-1}\cdot[\ln(tg(x))]'$$

$$= 2\ln(tg(x))\cdot\frac{1+tg^2(x)}{tg(x)}$$

$f(x) = \sqrt{x^{2+\pi}} \Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) = \sqrt[m]{g^{n}(x)} = \left(g(x)^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}\, g(x)^{\frac{m}{n}+1}}$

$\Rightarrow f(x) = x^{\frac{2+\pi}{2}}$

$f'(x) = \frac{2+\pi}{2}\, x^{\frac{2+\pi}{2}-1} = \frac{2+\pi}{2}\, x^{\frac{2+\pi-2}{2}} = \frac{2+\pi}{2}\, x^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \frac{2+\pi}{2}\sqrt{x^{\pi}}$

$f(x) = x^{x} \Rightarrow f(x) = e^{x\ln x} = x^{x}$

ملاحظة: العنصر يلغي العدد النيبري أي

$e^{\ln x} = 1$

ملاحظة 2:

$\ln x^{n} = n\ln x$

أي أن:

$f(x) = x^{x} \Leftrightarrow \ln x$ نفرض

$f(x) = \ln x^{x} = x\ln x$

نرفع ~~نفرض~~ بالعدد النيبري:

$f(x) = e^{x\ln x}$

$f'(x) = e^{ax+b} = a e^{ax+b}$

$f'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = (x\ln x)'\, e^{x\ln x} = \left(\ln x + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\right) e^{x\ln x}$

مشتق جداء

$= (\ln x + 1)\, e^{x\ln x} \Rightarrow (\ln x + 1)\, x^{x}$

التفاضل: قانون التفاضل:

$dy = y'\,dx$

مثال 3: أوجد تفاضل $y=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a}+\frac{1}{2}a\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

الحل: هنا نوجد تفاضل الدالة:

$$dy=y'\,dx$$

نوجد y' وهي مشتقة y:

$$y'=\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+a}}_{\text{مشتقة جداء}}+\underbrace{\tfrac{1}{2}a\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}_{\text{مشتقة جداء}\ \ \text{مشتقة للوغاريتم}}\Big)'$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{1}{\cancel{2}}x\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+a}}+\frac{1}{2}a\cdot\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}+\frac{1}{2}a\,\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

نخرج $\frac{1}{2}$ عامل مشترك:

$$y'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}+a\,\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}\right)$$

نوحد مقامات البسط:

$$y'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}+a\,\frac{\frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}\right)$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}+a\,\frac{\frac{\cancel{\sqrt{x^2+a}+x}}{\sqrt{x^2+a}}}{\cancel{x+\sqrt{x^2+a}}}\right)$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}+\frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\right)$$

نوحد المقامات:

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+a+x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+2a}{\sqrt{x^2+a}}\right)$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}(x^2+a)}{\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{\sqrt{x^2+a}\cdot\cancel{\sqrt{x^2+a}}}{\cancel{\sqrt{x^2+a}}}$$

$x^2+a \leftarrow \sqrt{x^2+a}\cdot\sqrt{x^2+a}$

$$=\sqrt{x^2+a}\implies dy=\sqrt{x^2+a}\,dx$$

مثال: احسب تزايد سطح دائرة نصف قطرها $80,6$ اذا ازداد نصف قطرها بمقدار $0,1$.

الحل: بفرض أن نصف القطر هو x أي $x = 80,6 \Leftarrow dx = 0,1$

والتابع سطح الدائرة نحسب مساحة السطح (مساحة الدائرة)

$$y = \pi x^2 \Rightarrow dy = \underbrace{2\pi x\, dx}_{\text{نأخذ التفاضل}}$$

التزايد

$$dy = 2\pi(80,6)(0,1) = 16,12\pi \ .$$

م3) اوجد المشتق الأول لكل من الدوال الآتية:

1] $y = x - \sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x$ ← $\arcsin\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

مشتق جداء

$$y' = 1 - \left[\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot \arcsin x + \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\cdot \cancel{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \arcsin x + 1\right] = \cancel{1} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - \cancel{1}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \arcsin x \ .$$

2] $y = \arctan(3x) + \operatorname{arcsh}(2x+1)$

$\arctan(u(x)) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$, $\operatorname{arcsh}(u(x)) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}$

$$y' = \frac{(3x)'}{1+(3x)^2} + \frac{(2x+1)'}{\sqrt{1+(2x+1)^2}} = \frac{3}{1+9x^2} + \frac{2}{\sqrt{1+(2x+1)^2}}$$

$$y = \arccos\left(\frac{x}{7}\right) + tg^2(5x)$$

$$\arccos\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (g(x))^n \to n\, g(x)^{n-1} \cdot (g(x))'$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{49 - x^2}} + 2\,(tg(x))^{2-1}\,(5(1 + tg^2(x)))$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{49 + x^2}} + 10\, tg(5x) + 10\, tg^3(x)$$

$y = a^x \Rightarrow$ نفرض أن $a^x = e^{x \ln a}$

$$y' = \left(e^{x \ln(a)}\right)' = (x \ln(a))'\, e^{x \ln a} = (\ln a + 0)\, e^{x \ln a}$$

$$= \ln a\, e^{x \ln a} = \ln(a)\, a^x$$

أوجد تفاضل الدالة:

$$y = \ln\left[tg\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]$$

الحل: قانون تفاضل الدالة

$$dy = y'\, dx$$

لسهولة الاشتقاق نفرض أن $U(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ فيكون:

$$U'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\, x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\frac{1 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)(\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

نوجد y':

$$y' = \left(\ln\left(tg(u(x))\right)\right)' = \frac{\left(tg(u(x))\right)'}{tg(u(x))}$$

$$= \frac{u'(x)\left(1+tg^2(u(x))\right)}{tg(u(x))}$$

$$= \frac{u'(x)\cdot\frac{1}{\cos^2 u(x)}}{tg(u(x))}$$

$$= \frac{u'(x)\cdot\frac{1}{\cancel{\cos^2 u(x)}}}{\frac{\sin(u(x))}{\cancel{\cos(u(x))}}} = \frac{u'(x)}{\sin(u(x))\cdot\cos(u(x))}$$

$$= \frac{2\,u'(x)}{\sin 2u(x)} = \frac{2\,\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sin\left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}$$

$$= \frac{2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\sin\left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}$$

نعوض

نذكر: $(tg(ax))' = (ax)'(1+tg(ax))$

نذكر: $1+tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

نذكر: $\sin x\cdot\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

$$dy = \frac{2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\sin\left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}\,dx.$$

٣) التكاملات غير المحددة

نعطي قوانين التكاملات: (التكامل هو عكس الاشتقاق)

1) تكامل العدد الثابت هو cx:

$$\int c\,dx = cx + c$$

2) $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

3] $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

4] $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

5] $\int e^x dx = e^x + c$

6] $\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c$

7] $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$

8] $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + c$

9] $\int 1 + tg^2 x \, dx = tg(x) + c$

10] $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg(x) + c$

11] $\int \frac{(g(x))'}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c$

12] $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + c$

13] $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

14] $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$

15] $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c$

16] $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| \text{ أو } \operatorname{arcch}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

19) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \operatorname{arcsh}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

20) $\displaystyle\int \operatorname{sh}x\,dx = \operatorname{ch}x+c$

21) $\displaystyle\int \operatorname{ch}x\,dx = \operatorname{sh}x+c$

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}x+c$

23) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth}x+c$

طرق التكاملات غير المحددة :

1) الطريقة المباشرة ، 2) ~~الطريقة~~ طريقة التكامل لتغير المتحول

3) طريقة التكامل بالتجزئة ، 4) طريقة التكاملات الكسرية

5) طريقة التكاملات للدوال المثلثية .

1) طريقة التكاملات المباشرة :

نحاول في هذه الطريقة رد التكامل إلى تكامل معروف بمكملة تكاملية

عن طريق أحد القوانين السابقة :

ملاحظة $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$

مثال : احسب التكاملات التالية :

$$I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$$

ملاحظة : اذا كانت عملية الجمع او الطرح

في البسط يمكن تفرقة الكسر : نفرق الكسر!

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

ملاحظة : في التكاملات لا نكامل

الجذر بشكل مباشر انما

نستخدم تغير متحول أو نكتب الجذر

بالشكل الأسي أي $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

يتبع

تكملة حل المثال:

$$\int \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

ملاحظة: عند رفع العدد من المقام إلى البسط نغير إشارة الأس:

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\int x^1 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\, dx \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ملاحظة:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$\int x^{1-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

ملاحظة: إذا كان أس الجذر يساوي 2 لا نكتبه

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

أس العدد

أس الجذر

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2\, x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$$

ملاحظة: إذا كان البسط لا يحوي عملية جمع أو طرح فلا يمكن أن نفرق الكسر لذلك ننظر إذا كان البسط يشبه المقام إلى حد ما نقوم بتعديل الدالة من خلال إضافة وطرح عدد مناسب المقام في مثالنا هذا البسط يشبه المقام لكنه ينقصه أن نضيف له العدد واحد لذلك نضيف ونطرح واحد حتى نستطيع تفرقة الكسر:

$$I = \int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$$

$$\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx$$

$$\int \frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x^2+1}} - \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$\int 1 - \frac{1}{x^2+1}\, dx \qquad \arctan\frac{x}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}$$

$$= x - \arctan x + C$$

نعلم ان تكامل $\int tg^2x + 1 = tg x$

لذلك حتى نستطيع اكماله نضيف واحد ونطرح واحد

$$I = \int tg^2(x)\,dx$$

$$\int tg^2x + 1 - 1\,dx = \int tg^2x + 1\,dx - \int 1\,dx$$

$$= tg(x) - x + c$$

البسط مشتق المقام اي $\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln|g(x)|$

$$I = \int \frac{dx}{x\,\ln(x)} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$$= \ln|\ln(x)| + c$$

كل الـ x الموجودة في المقام نضعها في البسط مع المحافظة عليها في المقام

② طريقة تغير المتحول:

تغير متحول في حال كان التكامل عملية ضرب او اذا كانت عملية الجمع او الطرح في المقام ولا يمكن تفرقة الكسر او في حال كانت التكامل جذر بسيط

لتغير متحول نتبع الخطوات التالية:

① نفرض الـ x هي t

② نشتق الطرفين مع المحافظ على التفاضل اي نقول مشتق t هي dt ومشتق الـ x هي dx وهكذا

③ نعوض في الدالة ونكامل

ملاحظة: في حال كان التكامل جذر نضيف خطوة حيث نفرض ان $\sqrt{h(x)} = t$ ثم نربع الطرفين $h(x) = t^2$ ثم نشتق الطرفين ونتابع بالخطوات السابقة.

ملاحظة: بعض التكاملات يمكن استخدام تغير المتحول او التجزئة مثل المثال الاول:

مثال:

$$I_1 = \int e^{\overset{t}{x^3}} \cdot \underbrace{x^2\,dx}_{\frac{1}{3}dt}$$

يمكن استخدام التجزئة او تغير متحول

باستخدام تغير متحول

1- نفرض الاعلى درجة لها t:

① $t = x^3$

② نشتق الطرفين: $dt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dt$ نعوض

$$\int e^t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t + c \Rightarrow \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

$$I_2=\int \frac{dx}{3-2x}$$

نلاحظ أن عملية الجمع أو الطرح تقع في المقام وليس البسط ولا يوجد في البسط ما يشبه المقام نضيف أو نطرح عدد لذلك نستخدم تغير المتحول.

نفرض أن: $t=3-2x$

نشتق: $dt=-2dx$

$dx=-\frac{1}{2}dt$

نعوض:

الطريقة المقام

$$\int \frac{-\frac{1}{2}dt}{t}=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|t|+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|3-2x|+c$$

$$I_3=\int\sqrt{3x+1}\,dx$$

حالة الجذر يمكن تحويله إلى أس كما حلينا في الطريقة المباشرة أو نغير متحول:

باستخدام تغير متحول:

1) نفرض: $\sqrt{3x+1}=t$

2) نربع: $3x+1=t^2$

3) نشتق: $3dx=2t\,dt$

$\Rightarrow dx=\frac{2}{3}t\,dt$

نعوض

$$\int t\cdot\frac{2}{3}t\,dt=\frac{2}{3}\int t\cdot t\,dt$$

$$=\frac{2}{3}\int t^2dt=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{3}+c$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+c$$

نهاية الكتابة $=\frac{2}{9}\left(\sqrt{(3x+1)^3}\right)+c$

لا يوجد خطأ في المحاضرة في الناتج الأخير

إذا كان لدينا جذر يحوي معادلة من الدرجة الثانية يجب أن نفرض قيمة الـ x هو t حتى نحول التكامل إلى أحد التكامل الـ arc باستخدام تغير المتحول

$$I_4=\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$$

نهاية كتابة التكامل بالشكل

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(3)^2-(2x)^2}}\Rightarrow$$

نفرض أن $2x=t$

نشتق $2dx=dt\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

$$\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t}{3}\right)+c\Rightarrow\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x}{3}\right)+c$$

بعض تمارين العمل ؛ احسب التكاملات التالية ؛

$$I_1 \int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx$$

لا يمكن تفرقة الكسر اذا باستخدام تغيير المتحول ؛

نفرض أن $t = x-1 \Leftarrow x = t+1$

نشتق ؛ $dt = dx$

نعوض :

$$\int \frac{(t+1)^3}{t^2}\,dt$$

$$\int \frac{(t+1)(t+1)^2}{t^2}\,dt = \int \frac{(t+1)(t^2+2t+1)}{t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{t^3+2t^2+t+t^2+2t+1}{t^2}\,dt = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}\,dt$$

نفرق الكسر ؛

$$\int \frac{\cancel{t^3}}{\cancel{t^2}} + 3\frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} + 3\frac{\cancel{t}}{\cancel{t^2}} + \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$\int t + 3 + 3\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$\int t\,dt + 3\int dt + 3\int \frac{1}{t}\,dt + \int t^{-2}\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| + \frac{t^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + c$$

نعوض x ؛

$$= \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

$$I_2 = \int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}} \quad dt$$

لا يمكن تفرقة الكسر نكامل بتغيير المتحول

نفرض أن $t = e^x$

نشتق $dt = e^x dx$

لدينا $e^{2x} = (e^x)^2 = (t)^2 = t^2$

نعوض ؛

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c$$

$$= \arctan(e^x) + c$$

$$I_5 = \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

حالة الجذر من درجة x^n
نحول إلى المدى الـ arc

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$$

نغير متحول ،
نفرض أن $x^2 = t$
نشتق : $2x\,dx = dt$

$$x\,dx = \frac{1}{2}dt$$

$$= 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$$

$$= 3\int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{3}{2}\arcsin t + c$$

$$= \frac{3}{2}\arcsin x^2 + C$$

$$I_6 = \int \frac{dx}{x^2+3} = \int \frac{1}{x^2+3}\,dx$$

نضرب $\sqrt{3}$ بالبسط ونقسم على $\sqrt{3}$ ، فيصبح :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\int \frac{a}{x^2+a^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

نضرب البسط والمقام بـ $\sqrt{3}$ لنتخلص من الجذر من المقام :

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$I_7 = \int \frac{dx}{x^2+25} = \int \frac{dx}{x^2+(5)^2}$$

نضرب البسط والمقام بـ 5 لتصبح الدالة:

$$= \frac{1}{5}\int \frac{5}{x^2+25}\,dx = \frac{1}{5}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

3- طريقة التكاملات بالتجزئة: قانون التجزئة المعروف

$$\int \underbrace{u}_{\text{نشتق}} \cdot \underbrace{dv}_{\text{نكامل}} = u\cdot v - \int v\,du$$

نستخدم التكامل بالتجزئة في حالة الضرب

2- يمكن استخدام حالة التجزئة في حالة الدوال

ذات الأشكال التالية:

1- $\int P_n(x)\cdot e^{ax+b}\,dx$

2- $\int P_n(x)\cdot \cos ax\,dx$

3- $\int P_n(x)\cdot \sin ax\,dx$

4- $\int P_n(x)\,\text{arcsin}\,x\,dx$

5- $\int P_n(x)\cdot \text{arccos}\,x\,dx$

6- $\int P_n(x)\cdot \ln(x)\,dx$

7- $\int P_n(x)\,\text{arctg}(x)\,dx$

$\int P_n(x)\cdot \text{arccotg}(x)\,dx$

هذه الأشكال تحل بطريقة التجزئة

أمثلة: احسب التكاملات التالية:

ملاحظة: إذا كان التكامل من الشكل

$$\int P_n(x)\cdot \ln x\,dx$$

دائما نوظف $u = \ln x$ و $P_n(x) = dv$

$$I = \int x\cdot \ln x\,dx$$

قانون التجزئة:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

نوظف أن:

$u = \ln x \qquad dv = x$

نشتق

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$\frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

سوف نصنف تكاملات التجزئة الى مجموعات :

المجموعة الاولى: هي التكاملات من الشكل :

$$\int P_n(x)\, e^{ax}\, dx \;,\; \int P_n(x)\cdot \sin ax\, dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \cos ax\, dx$$

هذا النوع من التكاملات يمكننا اختيار u , dv بشكل صحيح لان الاشتقاقة وتكاملها سهل الايجاد ولكن يفضل أن نعرض dv هي $\cos ax, \sin ax, e^{ax}$.

مثال:

$$I = \int x\cdot \cos x\, dx$$

باستخدام التجزئة (تكامل مباشر):

$$\int u\, dv = u\cdot v - \int v\, du$$

نفرض أن

$u = x \qquad dv = \cos x$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$$= x\cdot \sin x - \int \sin x\, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

مثال 2

$$I = \int (x^2 - 6x + 2)\, e^{3x}\, dx$$ (تكامل مباشر (تجزئة))

نفرض أن:

$u = x^2 - 6x + 2 \qquad dv = e^{3x}$

نشتق

$du = 2x - 6 \qquad v = \frac{1}{3} e^{3x}$

$$\int u\, dv = u\cdot v - \int v\, du$$

$$\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2)e^{3x} - \frac{1}{3}\int (2x-6)\cdot e^{3x}\, dx \;---\; *$$

نلاحظ أن التكامل هو I_1 ذات العبارة التي يؤول تكامل مرة أخرى:

$$I_1 = \int (2x-6)\, e^{3x}\, dx$$

$u = 2x - 6 \qquad dv = e^{3x}$

$du = 2 \qquad v = \frac{1}{3} e^{3x}$

$$\frac{1}{3}(2x-6)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}(2x-6)e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} e^{3x} + c$$

$$= \frac{1}{3}(2x-6)e^{3x} - \frac{2}{9} e^{3x} + c$$

نعوض في * :

$$\frac{1}{3}(x^2-6x+2)e^{3x} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(2x-6)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x}\right]+c$$

المجموعة الثانية: التكاملات من الشكل:

$$\int P_n(x)\cdot \arcsin(x)\,dx \quad ; \quad \int P_n(x)\cdot \arccos(x)\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \text{arctg}(x)\,dx \quad ; \quad \int P_n(x)\cdot \text{arccotg}(x)\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \ln(x)\,dx$$

جميع هذه التكاملات دائما نفرض أن:

أو $u(x)=\ln(x)$ ،
أو $u(x)=\text{arccotg}\,x$ ،
أو $u(x)=\text{arctg}\,x$ ،

أو $u(x)=\arcsin x$ ،
أو $u(x)=\arccos x$ ،

أما $dv=P_n(x)$

مثال: احسب التكامل:

$$I_1=\int \arcsin(x)\,dx$$

نفرض $u=\arcsin x$ $\qquad dv=1$

$$du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad v=x$$

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

$$x\cdot\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

ملاحظة: اذا كان المقام جذر والبسط مشتقة الجذر فإن التكامل يؤول إلى الشكل:

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}dx = \sqrt{g(x)}+c$$

نضرب ونقسم على 2- ; حتى يصبح البسط مشتق ما داخل الجذر

احسب التكامل :

$$I_2 = \int \ln x \, dx$$

نفرض :

$$u = \ln x \qquad dv = 1$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x + x + C$$

$$\Rightarrow x(\ln x + 1) + C$$

$$I_3 = \int x \cdot \operatorname{arctg}(x)\,dx$$

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

نفرض

$$u = \operatorname{arctg}(x) \qquad dv = x$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

كي نجعل البسط شبيه إلى حد ما المقام نضيف واحد ونطرح واحد

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$

الحل عملية تبديل

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\left[\int \boxed{1\,dx} - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ?\right.$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int [x - \operatorname{arctg}(x)]$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)$$

المجموعة الثالثة من الشكل:

$$\int e^{ax}\cdot \cos bx\,dx \qquad \int e^{ax}\cdot \sin bx\,dx$$

لهذه التكاملات تسمى تكاملات دورية (ترجع التكامل)

ولا يهم اختيار الـ u ، dv بشكل كيفي.

مثال: احسب التكامل:

$$I = \int e^{2x}\cdot \sin(3x)\,dx$$

نأخذ أن: $u = e^{2x}$ $\qquad dv = \sin(3x)$

$du = 2e^{2x}$ $\qquad v = -\frac{1}{3}\cos(3x)$

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cdot\cos(3x)\,dx \quad \text{———} \ *$$

نفرضه I_1

لنحل I_1:

$$= \int e^{2x}\cdot\cos(3x)\,dx$$

$u = e^{2x}$ $\qquad dv = \cos 3x$

$du = 2e^{2x}$ $\qquad v = \frac{1}{3}\sin(3x)$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \frac{2}{3}\int e^{2x}\cdot\sin(3x)\,dx$$ → I السابق

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \frac{2}{3}I$$

نعوض في $*$:

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \frac{2}{3}I\right)$$

التكاملات التي تأخذ الشكل $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$ نرجع إلى المحولات السابقة ونكامل بالتجزئة بالشكل:

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = \int x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$$

$$u = x \qquad dv = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$du = dx \qquad v = -\cot g\, x$$

$$= -x\cot g(x) + \int \cot g\, x\, dx$$

البسط مشتق المقام

$$= -x\cot g(x) + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$= -x\cot g(x) + \ln|\sin x| + C$$

تمارين عملي 4

$$I_3 = \int e^{-x} \cdot \sin x\, dx$$

$$u = e^{-x} \qquad dv = \sin x$$

$$du = -e^{-x} \qquad v = -\cos x$$

$$= -\cos x \cdot e^{-x} - \underbrace{\int e^{-x} \cdot \cos x\, dx}_{J} \quad --- *$$

تكامل J

$$J = \int e^{-x} \cdot \cos x\, dx$$

$$u = e^{-x} \qquad dv = \cos x$$

$$du = -e^{-x} \qquad v = \sin x$$

$$= e^{-x}\sin x + \int e^{-x} \cdot \sin x\, dx$$

I_3

$$= e^{-x}\sin x + I_3$$

سوف نعوض في *

$$= -\cos x \cdot e^{-x} - e^{-x} \sin x - I_3 + c$$

$$I_4 = \int \operatorname{arctg}(x)\, dx$$

$u = \operatorname{arctg}(x) \qquad dv = 1$

$du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx \qquad v = x$

$$= x \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$$

تكامل الدوال الكسرية

بعض اشكال الدوال الكسرية

$I: \dfrac{A}{x-a}$, $II: \dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3, 4, \ldots$

$III: \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $IV: \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

اولا: حساب التكامل من الشكل $\int \dfrac{A}{x-a} dx$

غالبا ما يكون هذا التكامل يؤدي إلى اللوغرتم المقام حيث أن البسط يكون مشتق المقام أي عند التكامل

$$\int \frac{A}{x-a}\, dx = A \int \frac{1}{x-a}\, dx = A \cdot \ln|x-a| + c$$

مثال:

$$\int \frac{2}{3x+5}\,dx = 2\int \frac{1}{3x+5}\,dx$$

مشتق المقام هو 3

لذلك نضرب ونقسم على 3:

$$= \frac{2}{3}\int \frac{3}{3x+5}\,dx = \frac{2}{3}\ln|3x+5| + c$$

ثانياً: حساب التكاملات من الشكل

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx$$

هذا التكامل نحوله إلى تكامل اوسي $(g(x))^n$ ثم نكامل

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx$$

$$= A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c$$

مثال: احسب التكامل:

$$\int \frac{9}{(3x+2)^7}\,dx = 9\int \frac{1}{(3x+2)^7}\,dx = 9\int (3x+2)^{-7}\,dx$$

$$= 9\,\frac{(3x+2)^{-6}}{-6} = -\frac{\cancel{9}}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{(3x+2)^6} = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{(3x+2)^6} + c$$

ثالثاً: حساب التكاملات من الشكل:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$$

اذا كانت $Q(x)$ (المقام) معادلة من الدرجة الثانية x^2+px+q لا يمكن تحليلها إلى جداء عوامل بسيطة

أي عندما Δ يكون $p^2-4q<0$ نتبع الخطوات التالية:

1) نتمم المعادلة إلى مربع كامل بالشكل التالي:

2) نأخذ امثال الـ x ونقسمه على 2 ثم نربعه ليكون لدينا المقدار $(\frac{p}{2})^2$ ثم نضيفه الى المعادلة بشكل:

$$x^2 + \overset{(\frac{p}{2})^2}{\overset{\downarrow}{p}}\,x + q$$

$$\boxed{x^2+px+(\tfrac{p}{2})^2} - (\tfrac{p}{2})^2 + q$$

3) نأخذ اول ثلاث مقدارات ونحللها شكل

(جذر الأول ± اشارة الثاني و جذر الثالث)^2

(جذر الأول و اشارة الثاني و جذر الثالث)^2

$$\Rightarrow \underbrace{(x+\tfrac{p}{2})^2}_{t} - \underbrace{(\tfrac{p^2}{4}) + q}_{a^2}$$

4) نفرض متحول وذلك نفرض $t = x+\frac{p}{2}$

ونفرض $\frac{p^2}{4}+q = a^2$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

5) نعوض ثم نكامل.

مثال: اوجد التكامل :

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx$$

درجة المقام أكبر من درجة البسط :

نأخذ المقام ونحلله عند استخدام المميز Δ نلاحظ أن :

$$\overset{a}{1}x^2 \overset{b}{-2}x + \overset{c}{5}$$

$$\Delta : b^2-4ac = (-2)^2-4(1)(5) = 4-20 = -16<0$$

لا يوجد عوامل بسيطة لذلك نلجأ إكمال المقام إلى مربع كامل :

$$x^2-\boxed{2}x+5 \Rightarrow \boxed{x^2-2x+1}-1+5$$

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$$

$$=(\underbrace{x-1}_{t})^2+4$$

نغير متحول :

نفرض : $x-1=t$

$x=t+1$

نشتق : $dx=dt$

نفرض $a^2=4$

$\Rightarrow a=\sqrt{4}=2$

نعوض :

$$\int \frac{2(t+1)+1}{t^2+4}\,dt$$

$$\int \frac{2t+2+1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{2t+3}{t^2+4}\,dt$$

نفرق الكسر

$$\int \frac{2t}{t^2+4}\,dt + \int \frac{3}{t^2+4}\,dt$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+4}\,dt + 3\int \frac{1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+4}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{2}{t^2+4}\,dt$$

البسط مشتق المقام

اذا ضربنا وقسمنا على 2 نحصل إنكاملاً من $arctg\left(\frac{x}{2}\right)$

تذكير :

$$\left(arctg\left(\frac{t}{a}\right)\right)' = \frac{a}{t^2+a^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{a}{t^2+a^2}\,dt = arctg\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$= \ln|t^2+4| + \frac{3}{2}\,arctg\left(\frac{t}{2}\right)+c$$

$$= \ln|(x-1)^2+4| + \frac{3}{2}\,arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

$$= \ln|x^2-2x+1+4| + \frac{3}{2}\,arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

$$= \ln|x^2-2x+5| + \frac{3}{2}\,arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

رابعاً: تفريق الكسور:

إذا كانت الدالة $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$، $Q(x)$ كثيرات حدود ودرجة البسط أقل من درجة المقام تؤول إلى حساب التكامل لكسور بسيطة ونميز الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كان المقام $Q(x)$ تتحلل إلى جداء عوامل جميعها من الدرجة الأولى وغير مكررة (أي درجة الـ x^n حيث n يساوي الواحد) ولا تكرار للحلول:

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

نكتب:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a_n)}$$

سنكتب خطوات الحل ضمن المثال:

تمرين: أوجد تكامل الدالة: $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx$

الحل: نلاحظ أن درجة البسط أقل من درجة المقام نكتب:

$$Q(x)=x^3-x^2-6x=x(x^2-x-6)$$

$\Delta: b^2-4a\cdot c$

$(-1)^2-4(1)(-6)=1+24=25>0$

لدينا $\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$ لنا حلان:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+1-5}{2(1)}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+5}{2(1)}=\frac{6}{2}=3$$

حلول المعادلة هي:

$x-2$
$x+3$

أصبحت المقام بشكل:

$$Q(x)=x(x-2)(x+3)$$

عوامل بسيطة من الدرجة الأولى وغير مكررة نكتب:

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{x+3}\quad ---*$$

في الحالة الأولى يمكن استخدام الطريقة التالية

ملاحظة: لا يمكن استخدام هذه الطريقة إلا في هذه الحالة

لإيجاد A: نضرب الطرفين بـ x (مقام الأس):

$$\frac{\cancel{x}(7x-5)}{\cancel{x}(x-2)(x+3)}=\frac{A\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{Bx}{x-2}+\frac{Cx}{x+3}$$

$$\frac{7x-5}{(x-2)(x+3)} = A + \frac{Bx}{x-2} + \frac{Cx}{x+3}$$

أن العدد الذي يهدم مقام الأسر $\frac{A}{x}$ هو الصفر لذلك نفرض $x=0$ ،

$$\frac{7(0)-5}{(0-2)(0+3)} = A + \frac{B(0)}{0-2} + \frac{C(0)}{0+3}$$

$$= \frac{-5}{-6} = A + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{5}{6}}$$

لإيجاد B نضرب الطرفين بـ $x-2$ لإزالة المقام

$$\frac{\cancel{(x-2)}(7x-5)}{x\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{A(x-2)}{x} + \frac{B\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{C(x-2)}{x+3}$$

$$\frac{7x-5}{x(x+3)} = \frac{A(x-2)}{x} + B + \frac{C(x-2)}{x+3}$$

العدد الذي يهدم المقام هو 2 لذلك نفرض $x=2$

$$\frac{7(2)-5}{2(2+3)} = \frac{A(2-2)}{2} + B + \frac{C(2-2)}{2+3}$$

$$\frac{9}{10} = 0 + B + 0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{9}{10}}$$

لإيجاد C نضرب بـ $x+3$ (مقام c لإزالته)

$$\frac{\cancel{(x+3)}(7x-5)}{x(x-2)\cancel{(x+3)}} = \frac{A(x+3)}{x} + \frac{B(x+3)}{x-2} + \frac{C\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}$$

العدد الذي يهدم المقام هو -3 نفرض $\boxed{x=-3}$

$$\frac{7(-3)-5}{-3(-3-2)} = \frac{A(-3+3)}{-3} + \frac{B(-3+3)}{-3-2} + C$$

$$= \frac{-26}{15} = 0 + 0 + C \Rightarrow \boxed{C = \frac{-26}{15}}$$

نعوض في *

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{5}{6}}{x} + \frac{\frac{9}{10}}{x-2} + \frac{-\frac{26}{15}}{x+3}$$

$$\int \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}dx = \frac{5}{6}\int \frac{1}{x}dx + \frac{9}{10}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{26}{15}\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= \frac{5}{6}\ln|x| + \frac{9}{10}\ln|x-2| - \frac{26}{15}\ln|x+3| + C$$

الحالة الثانية:

$Q(x)$ تتحلل إلى جداء عوامل جميعها من الدرجة الأولى ولكن مكررة!

$Q(x)=(x-a)^k$ (تكرار الحد في نفس الحد إلى القوة k)

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

تمرين: أوجد التكامل:

$$I=\int\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,dx$$

الحل: نلاحظ أن درجة البسط أقل من درجة المقام ونحلل المقام:

$$Q(x)=x^4-3x^3+3x^2-x=x(x^3-3x^2+3x-1)$$

نعوض أن $x=1$

$1^3-3(1)^2+3(1)-1$

$=1-3+3-1=0$

إذاً $x-1=0$ هو حل

باستخدام القسمة الطويلة:

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x+1 \\ x-1 & x^3-3x^2+3x-1 \\ & -(x^3-x^2) \\ & 0-2x^2+3x-1 \\ & -(-2x^2+2x) \\ & 0\quad x-1 \\ & -(x-1) \\ & 0\quad 0 \end{array}$$

$=x(x-1)(x^2-2x+1)$

$\Delta: b^2-4a\cdot c$

$:(-2)^2-4(1)(1)$

$=4-4=0$

نحصل على حل مضاعف

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2(1)}$

$\Rightarrow \boxed{x_1=1,\ x_2=1}$ حل مضاعف

$=x(x-1)(x-1)(x-1)$

$=x(x-1)^3$

إذاً تتحلل إلى جداء عوامل بسيطة من الدرجة الأولى ومكررة

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

لإيجاد المجاهيل الأربعة (A, B, C, D) نتبع الخطوات التالية:

1] نوحد المقامات

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A(x-1)^3}{x(x-1)^3}+\frac{Bx(x-1)^2}{x(x-1)^3}+\frac{Cx(x-1)}{x(x-1)^3}+\frac{Dx}{x(x-1)^3}$$

2] نحذف المقامات:

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$$

3] نفك الطرف الثاني

$$x^3+1=A(x-1)(x-1)^2+Bx(x^2-2x+1)+Cx^2-Cx+Dx$$

$$x^3+1=A(x-1)(x-1)^2+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-Cx+Dx$$

$$x^3+1=(Ax-A)(x^2-2x+1)+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2$$

$$x^3+1=Ax^3-2Ax^2+Ax-Ax^2-2Ax-A+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-Cx+Dx$$

$$x^3+1=Ax^3-3Ax^2-Ax-A+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-Cx+Dx$$

$$x^3+1=Ax^3+Bx^3-3Ax^2-2Bx^2+Cx^2-Ax+Bx-Cx+Dx-A$$

$$x^3+1=(A+B)x^3+(-3A-2B+C)x^2+(-A+B-C+D)x-A$$

مقارنة مع الطرف الآخر

$A+B=1$ ← معامل x^3 --- (1)

لا يوجد x^2 في الطرف الثاني

$-3A-2B+C=0$ --- (2)

لا يوجد x في الطرف الثاني

$-A+B-C+D=0$ --- (3)

$-A=1$ --- (4)

من العلاقة (4) $\boxed{A=-1}$

نعوض في (1)

$-1+B=1 \Rightarrow \boxed{B=2}$

نعوض في (2)

$-3(-1)-2(2)+C=0$

$3-4+C=0$

$\Rightarrow -1+C=0 \Rightarrow \boxed{C=1}$

نعوض في (3)

$-(-1)+2-1+D=0$

$2+D=0$

$\boxed{D=-2}$

نعوض في *

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-\int\frac{2}{(x-1)^3}dx$$

$$=-\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{x-1}dx+\int(x-1)^{-2}dx-2\int(x-1)^{-3}dx$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}-\cancel{2}\,\frac{(x-1)^{-2}}{-\cancel{2}}+C$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+C$$

الحالة الثالثة: عوامل المقام من الدرجة الثانية وغير مكررة أي تكون من الشكل $Q(x)=(x-a)(x^2+px+q)$ حيث أن $x^2+px+q<0$ لذلك في هذه الحالة المعادلة x^2+px+q نستخدم الاتمام إلى مربع كامل ونغير فنحول كما في الحالة السابقة

تمرين: احسب التكامل:

$$\int \frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}\,dx$$

درجة البسط أقل من درجة المقام نحلل المقام:

$Q(x) = x^4+4x^3+4x^2-9 \iff$ الحدودية بتجميع ثلاث:

$$(x^4+4x^3+4x^2)-9 = \underbrace{x^2(x^2+4x+4)}_{(\text{الجذر الأول} \pm \text{الجذر الثاني})^2}-9$$

$$= x^2(x+2)^2-(3)^2 = (x(x+2))^2-(3)^2$$

$$= (x^2+2x)^2-(3)^2$$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ (متطابقة شهيرة من الثالثة)

$$= (x^2+2x-3)(x^2+2x+3)$$

$\Delta: b^2-4ac$

$4-4(1)(-3)$

$4+12 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$

لها حلان:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2(1)} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$\Delta: b^2-4ac$

$4-4(1)(3)$

$4-12 = -8 < 0$

مستحيلة الحل ليس لها حلول:

تصبح المعادلة:

$$Q(x) = (x+3)(x+1)(x^2+2x+3)$$

تؤول إلى الشكل:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \frac{A_3x+A_4}{x^2+px+q}$$

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-3)(x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

لإيجاد الثوابت نوحد المقامات:

$$\frac{7x^2+26-9}{(x-3)(x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{A(x+1)(x^2+2x+3)}{(x+3)(x+1)(x^2+2x+3)} + \frac{B(x+3)(x^2+2x+3)}{(x+3)(x+1)(x^2+2x+3)} + \frac{(Cx+D)(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x^2+2x+3)}$$

نحذف المقامات

$7x^2+26x-9 = A(x-1)(x^2+2x+3) + B(x+3)(x^2+2x+3)$

$+(Cx+D)(x-1)(x+3)$ نفك الطرفين :

$7x^2+26x-9 = (Ax-A)(x^2+2x+3)+(Bx+3B)(x^2+2x+3)$

$+(Cx+D)(x^2+\overset{+2x}{3x-x}-3)$

$7x^2+26x-9 = Ax^3+2Ax^2+3Ax-Ax^2-2Ax-3A+Bx^3+2Bx^2$

$+3Bx+3Bx^2+6Bx+9B+Cx^3+2Cx^2-3Cx+Dx^2+2Dx-3D$

$\Rightarrow 7x^2+26x-9 = Ax^3+Ax^2+Ax-3A+Bx^3+5Bx^2+9Bx+9B$

$+Cx^3+2Cx^2-3Cx+Dx^2+2Dx-3D$

$\Rightarrow 7x^2+26x-9 = Ax^3+Bx^3+Cx^3+Ax^2+5Bx^2+2Cx^2+Dx^2$

$+Ax+9Bx-3Cx+2Dx-3A+9B-3D$

$\Rightarrow 7x^2+26x-9 = (A+B+C)x^3+(A+5B+2C+D)x^2$

$+(A+9B-3C+2D)x+(-3A+9B-3D)$ بمقارنة مع الطرف الآخر

$A+B+C=0$ — (1)

$A+5B+2C+D=7$ — (2)

$A+9B-3C+2D=26$ — (3)

$-3A+9B-3D=-9$ — (4)

نطرح العلاقة (3) مع (4)

$4A-3C+5D=35$

$\boxed{A=\dfrac{35+3C-5D}{4}}$ — $*$

نعوض في (2)

$\dfrac{3C-5D+35}{4}+5B+2C+D=7$

نضرب ب 4 :

$3C-5D+35+20B+8C+4D=28$

$20B+11C-D=-7 \Rightarrow \boxed{B=\dfrac{-11C+D-7}{20}}$ — $**$

من العلاقة (1)

$A+\dfrac{-11C+D-7}{20}+C=0 \Rightarrow 20A-11C+D-7+20C=0$

$20A+9C+D=7 \Rightarrow \cancel{20}^{5}\left(\dfrac{35+3C-5D}{4}\right)+9C+D=7$

$=15C-25D+175+9C+D=7 \Rightarrow 24C-24D=-168$

$\Rightarrow 24(C-D)=-168$

$C - D = \frac{-168}{24} \Rightarrow C - D = -7 \Rightarrow \boxed{D = C+7}$ — ★★★

نعوض في (4)

$-3A + 9B - 3(C+7) = -9$

$-3A + 9B - 3C - 21 = -9$

$-3A + 9B - 3C = 12$ — ★★★

~~بالتعويض~~

بالقسمة ★ على 3 :

$\cancel{-3A + 9B - 3C = 12}$

$\cancel{A+B}\ -A + 3B - C = 4$

$A + B + C = 0$ (1) تابع

$0 + 4B + 0 = 4$

$4B = 4 \Rightarrow \boxed{B = 1}$

بالتعويض في ★★ :

$1 = \frac{-11C + D - 7}{20} \Rightarrow 20 = -11C + D - 7$

$-11C + \underset{C+7}{D} = 27 \Rightarrow -11C + C + 7 = 27$

$-10C = +20 \Rightarrow C = \frac{+20}{-10}$

$\Rightarrow \boxed{C = -2}$

نعوض في ★★★ :

$D = -2 + 7 = 5$

$\Rightarrow \boxed{D = 5}$

نعوض في (1) :

$A + 1 - 2 = 0 \Rightarrow A - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 1}$

$$\int \frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}\,dx = \int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \underbrace{\int \frac{-2x+5}{x^2+2x+3}\,dx}_{I}$$

(5)

نلاحظ أن I هو تكامل كسري درجة البسط أصغر من درجة المقام

$\int \frac{-2x+5}{x^2+2x+3}\,dx \Rightarrow$ نحلل المقام $q(x) = x^2 + 2x + 3$

$\Delta: b^2 - 4a \cdot c$

$4 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 < 0$

نتم إلى مربع كامل :

$$x^2+\boxed{2}x+3 = \underline{x^2+2x+1}-1+3$$
$$\left(\tfrac{2}{2}\right)^2=1 \qquad (x+1)^2+2$$

نفرض متحول t

نفرض $x+1=t$

$\Rightarrow x=t-1$

نشتق $dx=dt$

نفرض $a^2=2$

$\Rightarrow a=\sqrt{2}$

نعوض:

$$\int \frac{-2(t-1)+5}{t^2+2}\,dt$$

$$\int \frac{-2t+2+5}{t^2+2}\,dt$$

$$=\int \frac{-2t+7}{t^2+2}\,dt = \int \frac{-2t}{t^2+2}\,dt + 7\int \frac{1}{t^2+2}\,dt$$

اسلوب مشتق المقام

نضرب ونقسم على $\sqrt{2}$ حتى نحول الشكل الى $arctg(t)$

$$=-\int \frac{2t}{t^2+2}\,dt + \frac{7}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{t^2+2}\,dt$$

$$=-\ln|t^2+2| + \frac{7}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=-\ln|(x+1)^2+2| + \frac{7}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=-\ln|x^2+2x+1+2| + \frac{7}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=-\ln|x^2+2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

نعوض في (5)

$$=\int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \ln|x^2+2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=\underbrace{\ln|x+3|+\ln|x-1|}_{\ln|x^2+2x-3|} - \ln|x^2+2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=\ln|x^2+2x-3| - \ln|x^2+2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=\ln\left|\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+3}\right| + \frac{7}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

نذكر: $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

42

تكاملات الدوال الجذرية ، نحول هذه التكاملات الى تكاملات دوال كسرية من خلال تحويل الجذور $\sqrt[n]{x^m}$ الى الشكل الاسي $x^{\frac{m}{n}}$ ونغير متحول وذلك بفرض أن $x = t^k$ حيث k هو المقام المشترك للجذور بعد تحويلها الى اعداد اسية.

<u>مثال</u>: أوجد تكامل

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

أولاً نكتب التكامل بالشكل التالي:

$$I=\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}$$

نلاحظ أن القوى هو: توحيد المقامات $\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{3+2}{6}$ اذاً المقام المشترك هو $k=6$

وبالتالي نفرض أن $x=t^6 \Rightarrow t=\sqrt[6]{x} \Rightarrow t=x^{\frac{1}{6}}$

نشتق: $dx=6t^5dt$ نعوض في التكامل:

$$\int \frac{6t^5\,dt}{(t^6)^{\frac{1}{2}}+(t^6)^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{6t^5}{t^{\frac{6}{2}}+t^{\frac{6}{3}}}\,dt$$

$$= \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt = \int \frac{6t^{\cancel{5}}}{\cancel{t^2}(t+1)}\,dt = \int \frac{6t^3}{t+1}\,dt = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}$$

نلاحظ أن درجة البسط أعلى من درجة المقام في هذه الحالة نستخدم طريقة القسمة الاقليدية ونعوض بالقانون التالي:

$$\frac{P(x)}{g(x)} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

المقسوم عليه $\leftarrow t+1$ ، الناتج $\leftarrow t^2-t+1$

$$\begin{array}{r} t^3+0 \\ -\;(t^3+t^2) \\ \hline 0-t^2 \\ -\;(-t^2-t) \\ \hline 0+t \\ -\;(t+1) \\ \hline 0-1 \end{array}$$

الباقي $\leftarrow -1$

$$\frac{t^3}{t+1} = (t^2-t+1) + \frac{-1}{t+1}$$

$$\Rightarrow 6\int t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\,dt$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+c$$

$$=2(x^{\frac{1}{6}})^3-3(x^{\frac{1}{6}})^2+6(x^{\frac{1}{6}})-6\ln|x^{\frac{1}{6}}+1|+c$$

$$=2(x^{\frac{1}{2}})-3(x^{\frac{1}{3}})+6(x^{\frac{1}{6}})-6\ln|x^{\frac{1}{6}}+1|+c$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+c$$

مثال: أوجد التكامل $I=\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ ؟

الحل: نكتب التكامل بالشكل الأسي:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

المقام المشترك للأسس $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ هو 6

لذلك نفرض: $x=t^6 \Rightarrow \sqrt[6]{x}=t \Rightarrow x^{\frac{1}{6}}=t$ ومنه نشتق $dx=6t^5dt$ نبدل التكامل:

$$\int \frac{(t^6)^{\frac{1}{2}}}{1+(t^6)^{\frac{1}{3}}}\,6t^5dt$$

$$=\int \frac{t^3}{1+t^2}\,6t^5dt=\int \frac{6t^8}{1+t^2}\,dt$$

درجة البسط أكبر من درجة المقام نستخدم قانون القسمة الإقليدية:

$$\frac{6t^8}{1+t^2}=\text{الناتج}+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

المقسوم عليه $1+t^2$، الناتج $t^6-t^4+t^2-1$

t^8

$-\;t^8+t^6$

$0\;-t^6$

$-\;-t^6-t^4$

$0\;\;t^4$

$-\;t^4+t^2$

$0\;-t^2$

$-\;-t^2-1$

$0\;+1$ الباقي

$$\int \frac{6t^8}{1+t^2}dt=6\int (t^6-t^4+t^2-1)+\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$=6\left[\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg} t\right]$$

$$=\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+2t^3-6t+6\operatorname{arctg} t$$

$$=\frac{6}{7}(x^{\frac{1}{6}})^7-\frac{6}{5}(x^{\frac{1}{6}})^5+2(x^{\frac{1}{6}})^3-6(x^{\frac{1}{6}})+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$$

$$=\frac{6}{7}(x^{\frac{7}{6}})-\frac{6}{5}(x^{\frac{5}{6}})+2(x^{\frac{1}{2}})-6(x^{\frac{1}{6}})+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$$

$$=\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c$$

حساب التكاملات من الشكل: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

لحساب هذه التكاملات نقوم برد ثلاثي الحدود الموجود تحت الجذر، إلى مجموع مربعي مقدارين أو فرق مربعي مقدارين لنتبع إحدى العلاقات الآتية:

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}=\operatorname{arcsh}\left(\frac{t}{k}\right)+c=\ln\left|t+\sqrt{t^2+k^2}\right|+c$$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}}=\operatorname{arcch}\left(\frac{t}{k}\right)+c=\ln\left|t+\sqrt{t^2-k^2}\right|+c$$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=\arcsin\left(\frac{t}{k}\right)+c$$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{(t+k)^2}}=\int\frac{dt}{|t+k|}=\ln|t+k|+c$$

تمارين: أوجد كل من التكاملات التالية،

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$x^2+4x+6=\boxed{x^2+4x+4}-4+6$$

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2=2^2=4 \qquad (x+2)^2+2$$

نفرض أن

$$x+2=t$$

$$x=t-2$$

نستنتج:

$$dx=dt$$

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}$$

$$=\text{arcsh}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=\text{arcsh}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)+c$$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2=4$$

$$I_2=\int\frac{3\,dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$x^2-4x+3=x^2-4x+4-4+3$$

$$(x-2)^2-1$$

نفرض

$$x-2=t$$

$$x=t+2$$

$$dx=dt$$

$$\int\frac{3\,dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}=3\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$=3\,\text{arcch}\left(\frac{t}{1}\right)+c$$

$$=3\,\text{arcch}\left(\frac{x-2}{1}\right)+c$$

بالإتمام إلى مربع كامل نجد:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x}}$$

$$-x^2+6x=-x^2+6x+9-9$$

$$-(x-3)^2+9$$

نفرض أن

$$x-3=t$$

$$dx=dt$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x-3)^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{t}{3}\right)+c$$

$$=\arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right)+c$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1}}$$

باستخدام Δ:

x^2+2x+1

b^2-4ac

$4-4(1)(1)$

$4-4=0$ لدينا حل مضاعف

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(1)}=-1$$

$(x+1)(x+1)=0$

$(x+1)^2=0$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2}}=\int\frac{dx}{|x+1|}$$

$$=\ln|x+1|+C$$

حساب التكامل من الشكل

$$I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

لحل مثل هذه التكاملات نفرض أن:

$$t=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'$$

$$t=\frac{1}{2}(2ax+b)$$

$$t=ax+\frac{1}{2}b$$

نشتق:

$$dt=a\,dx$$

$$\Rightarrow dx=\frac{1}{a}dt$$

$t=x-\dfrac{t-\frac{b}{2}}{a}$ نبدل في التكامل

المطلوب نميز حالتين:

$a>0\Rightarrow I=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+m}}$ ← إشارة الـ x موجبة

$a<0\Rightarrow I=\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$ ← إشارة الـ x سالبة

أمثلة: أوجد التكاملات الآتية:

$$I_1=\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx$$

نفرض أن:

$$t=\frac{1}{2}(x^2-4x+3)'$$

$$t=\frac{1}{2}(2x-4)$$

$$t=x-2\Rightarrow x=t+2$$

$dx=dt$ نعوض:

$$\int\frac{2(t+2)+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

ونلاحظ أن: بالإتمام إلى مربع كامل

x^2-4x+3

$x^2-4x+4-4+3$

$(x-2)^2-1$

$=t^2-1$

$$=\int\frac{2t+4+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=\int\frac{2t+5}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

$$=\int\frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}+5\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

ونقوم بتقريب 2 لكي يصبح البسط هو مشتق المقام

$$\Rightarrow 2\sqrt{t^2-1}+\operatorname{arcch}t+C$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(x-2)^2-1}+\operatorname{arcch}(t^2-1)+C$$

$$I_2=\int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx$$

نفرض أن :

$$t=\frac{1}{2}(6-2x-x^2)'$$

$$t=\frac{1}{2}(-2-2x)$$

$$t=(-1-x) \Rightarrow -x=t+1$$

$$x=-t-1$$

$$dt=-dx$$

$$6-\boxed{2}x-x^2$$

بالاتمام إلى مربع كامل $(\frac{2}{2})^2=1$

$$-(x^2+2x+1-1)+6$$

$$-(x+1)^2+7$$

نعوض في التكامل :

$$\int \frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}}(-dt)$$

$$\int \frac{-t+4}{\sqrt{7-t^2}}(-dt)$$

$$\int \frac{t-4}{\sqrt{7-t^2}}\,dt=\int\frac{t}{\sqrt{7-t^2}}dt-\int\frac{4}{\sqrt{7-t^2}}dt$$

$$=-\sqrt{7-t^2}-4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+c$$

$$=-\sqrt{6-2x-x^2}-4\arcsin\frac{-x-1}{\sqrt{7}}+c$$

٤٥أ) احسب التكاملات الآتية :

$$I_1=\int\frac{dx}{3x^2-2x+4}$$

<u>الحل</u> لنتأكد اذا كان المقام يحلل :

$$3x^2-2x+4$$

باستخدام $\Delta : (-2)^2-4(3)(4)$

$$4-4(3)(4)=-44<0$$

لا تحلل نستخدم الاتمام الى مربع كامل

$$3x^2-2x+4$$

$$3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{6}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

<u>ملاحظة هامة : للاتمام إلى مربع كامل</u>
اذا كانت امثال x^2 الحرف الظاهر
فإذا كانت تخرج امثال الـ x^2 عامل
مشترك كما في مثالنا هذا

$$3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\right)$$

$$3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right)=3\left(\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right)=3\left(\frac{(3x-1)^2}{9}+\frac{11}{9}\right)$$

$$=\frac{\cancel{3}}{9}\left((3x-1)^2+11\right)=\frac{1}{3}\left((3x-1)^2+11\right)$$

نعوض :

$$\int\frac{dx}{\frac{1}{3}((3x-1)^2+11)}=3\int\frac{dx}{(3x-1)^2+11}$$

بالقسمة على 11

$$= \frac{3}{11}\int \frac{dx}{\frac{(3x-1)^2}{11}+1} = \frac{3}{11}\int \frac{dx}{\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right)^2+1}$$

نفرض أن $t = \frac{3x-1}{\sqrt{11}}$ بالاشتقاق: $dt = \frac{3\sqrt{11}-0}{(\sqrt{11})^2}dx$

$$dt = \frac{3}{\sqrt{11}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{11}}{3}dt$$

$$I_1 = \frac{3}{11}\int \frac{\frac{\sqrt{11}}{3}dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{11}}{\underset{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}}{11}}\int \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{11}}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{\sqrt{11}}\,\mathrm{arctg}(t) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{11}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right) + c$$

$$I_2 = \int \frac{x^4+1}{x(x^2-1)}dx = \int \frac{x^4+1}{x(x^2-1^2)}dx = \int \frac{x^4+1}{x(x-1)(x+1)}dx$$

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(x-1)(x+1)$$

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1} \quad \text{---} *$$

لايجاد A نضرب ب x ونعوض $x=0$:

$$\frac{x^4+1}{(x-1)(x+1)} = A + \frac{B(x)}{x-1} + \frac{C(x)}{x+1}$$

$$\frac{0^4+1}{(0-1)(0+1)} = A + 0 + 0 \Rightarrow A = \frac{1}{-1} \Rightarrow \boxed{A=-1}$$

لايجاد B نضرب ب $x-1$ ونعوض $x=1$:

$$\frac{x^4+1}{x(x+1)} = \frac{A(x-1)}{x} + B + \frac{C(x-1)}{x+1}$$

$$\frac{1+1}{1(1+1)} = 0 + B + 0 \Rightarrow B = \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{B=1}$$

لايجاد C نضرب ب $x+1$ ونعوض $x=-1$:

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)} = \frac{A(x+1)}{x} + \frac{B(x+1)}{x-1} + C$$

$$\frac{1+1}{-1(-1-1)} = 0 + 0 + C \Rightarrow C = \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{C=1}$$

نعوض في *

$$\int \frac{x^4+1}{x(x-1)(x+1)}dx = \int -\frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| + C$$

$$I_3 = \int \frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3}dx$$

مقام كثير حدود من الدرجة الأولى ومكرر :

$$\frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} \quad \text{---} *$$

لتوحيد المقامات ثم نضرب :

$$\frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2}{(x-2)(x-2)^2} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

نحذف المقامات :

$$5x^2-20x+17 = A(x-2)^2 + B(x-2) + C$$

$$5x^2-20x+17 = A(x^2-4x+4) + Bx - 2B + C$$

$$5x^2-20x+17 = Ax^2 - 4Ax + 4A + Bx - 2B + C$$

$$5x^2-20x+17 = Ax^2 - 4Ax + Bx + 4A - 2B + C$$

$$5x^2-20x+17 = Ax^2 + (-4A+B)x + 4A - 2B + C$$

$$A = 5 \quad \text{---} ①$$

$$-4A + B = -20 \quad \text{---} ②$$

$$4A - 2B + C = 17 \quad \text{---} ③$$

بالمقارنة من العلاقة ① :

$$\boxed{A = 5}$$

نعوض في ② :

$$-4(5) + B = 20$$

$$-20 + B = 20 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

نعوض في ③ :

$$4(5) - 2(0) + C = 17$$

$$20 + C = 17 \Rightarrow \boxed{C = -3}$$

نعوض في *

$$\frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3} = \frac{5}{x-2} + \frac{0}{(x-2)^2} + \frac{-3}{(x-2)^3}$$

$$\int \frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3}dx = 5\int \frac{1}{x-2}dx - 3\int (x-2)^{-3}dx$$

$$= 5\ln|x-2| - 3 \cdot \frac{(x-2)^{-2}}{-2} + C \Rightarrow 5\ln|x-2| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-2)^2} + C$$

$$I_n=\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

المقام محلل الى جداء عوامل بسيطة من الدرجة الثانية وغير مكررة :

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \text{———} *$$

بتوحيد المقامات والطرفين

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

بالطرف :

$$x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$

$$x=Ax^2+A+Bx^2+Bx+Cx+C$$

$$x=Ax^2+Bx^2+Bx+Cx+A+C$$

$$x=(A+B)x^2+(B+C)x+A+C$$

بالمقارنة

$$A+B=0 \quad \text{——} \ (1)$$

$$B+C=1 \quad \text{——} \ (2)$$

$$A+C=0 \quad \text{——} \ (3)$$

من العلاقة (1) : $B=-A$

ومن العلاقة (3) : $C=-A$

نعوض في (2)

$$-A-A=1$$

$$-2A=1 \Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{2}}$$

نعوض في (1) : $-\frac{1}{2}+B=0$, $\boxed{B=\frac{1}{2}}$

نعوض في (3) : $-\frac{1}{2}+C=0$, $\boxed{C=\frac{1}{2}}$

نعوض في * :

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int \boxed{\frac{x+1}{x^2+1}}\,dx \quad **$$

$$\cancel{\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx}=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\arctan(x)\right]+C$$

التكاملات المثلثية
التكامل المحدد

حساب التكاملات من الشكل $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ حيث

عند تحليل ax^2+bx+c حسب $\Delta\ (b^2-4ac)$ نحصل ثلاث حالات، وبالعكس

لإيجاد هذه التكاملات نستخدم الإتمام إلى مربع كامل فيحول التكامل إلى أحد الأشكال:

1- $I_1=\int R(t,\sqrt{k^2-t^2})\,dt$ ، لحلها نفرض $t=k\sin u$ ويكون $dt=k\cos u\,du$

2- $I_2=\int R(t,\sqrt{k^2+t^2})\,dt$ لحلها نفرض $t=k\,sh\,u$ فيكون $dt=k\,ch\,u\,du$

3- $I_3=\int R(t,\sqrt{t^2-k^2})\,dt$ لحلها نفرض $t=k\,ch\,u$ فيكون $dt=k\,sh\,u$.

أمثلة: أوجد التكامل:

$$I=\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$$

نلاحظ أن الجذر بالشكل: $\sqrt{9-x^2}$ نحول إلى الشكل: $\sqrt{3^2-x^2}$ أي $\sqrt{k^2-x^2}$

لذلك نفرض أن $x=k\sin u$

$x=3\sin u \Rightarrow u=\frac{1}{3}\arcsin x$ فيكون $dx=3\cos u\,du$ نعوض:

$$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{9-(3\sin u)^2}}{(3\sin u)^2}\cdot 3\cos u\,du$$

$$=\int\frac{\sqrt{9-9\sin^2u}}{9\sin^2u}\cdot 3\cos u\,du=\int\frac{\sqrt{9(1-\sin^2u)}}{9\sin^2u}\,3\cos u\,du$$

نذكر: $\cos^2u=1-\sin^2u$ ، $\sin^2u=1-\cos^2u$

$$=\int\frac{\cancel{3}\sqrt{(1-\sin^2u)}}{\cancel{9}_{3}\sin^2u}\cdot\cancel{3}\cos u\,du$$

$$=\int\frac{\sqrt{\cos^2u}}{\sin^2u}\cdot\cos u\,du=\int\frac{\cos u\cdot\cos u}{\sin^2u}du=\int\frac{\cos^2u}{\sin^2u}du$$

$$=\int\left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)^2du=\int \cot g^2u\,du=\int \cot g^2u+1-1\,du$$

$$=-\cot g\,u-u+c\Rightarrow -\cot g\left(\tfrac{1}{3}\arcsin x\right)-\tfrac{1}{3}\arcsin x+c$$

تكامل الدوال المثلثية من الشكل : $I=\int R(\sin x,\cos x)\,dx$

(التكاملات التي تحتوي $\sin x$, $\cos x$ من الدرجة الأولى)

لحساب هذه التكاملات نتبع الخطوات التالية:

1- نفرض $t=tg(\frac{x}{2})$

2- نوجد المجهول فنجد: $\frac{x}{2}=arctg\,t \Rightarrow x=2arctg\,t$

3- نشتق : $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

4- نعوض بالدساتير التالية (يجب حفظ الخطوات مع الدستور):

$$\boxed{\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad , \quad \boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2}}$$

مثال : احسب التكامل:

$$I_1=\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

الحل: نفرض أن:

$t=tg(\frac{x}{2})$

نوجد المجهول:

$\frac{x}{2}=arctg(t) \Rightarrow x=2arctg(t)$

نشتق:

$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

نعوض بالدساتير:

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

نعوض:

$$\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \Rightarrow \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

توحيد المقامات

$$\Rightarrow\int\frac{\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1+\cancel{t^2}+2t+1-\cancel{t^2}}{\cancel{1+t^2}}}=\int\frac{2dt}{2t+2}=\int\frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}(t+1)}=\int\frac{1}{t+1}dt$$

$$=\ln|t+1|+c \Rightarrow \ln\left|tg(\frac{x}{2})+1\right|+c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)}$$

الكل دوال $\sin x$ و $\cos x$ من الدرجة الأولى ؛

نفرض : $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

نوجد المعلوم : $\frac{x}{2} = arctg\, t \Leftarrow x = 2\, arctg\, t$

نشتق : $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ / نكتب بالمشتور : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

نعوض :

$$\int \frac{\frac{2\,dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2(2t)}{1+t^2}\right)} = \int \frac{\cancel{2}\,dt}{\cancel{2}\,t\underbrace{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)}_{\text{نوحد المقام}}}$$

$$= \int \frac{dt}{t\left(\frac{2(1+t^2)}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t\left(\frac{2+2t^2+1-t^2-4t}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}\,dt$$ (كثير حدود نقوم بتفريق المقام ؛)

t^2-4t+3

$\Delta : b^2-4ac$

$16-4(1)(3)$

$16-12=4 \Rightarrow \sqrt{4}=2$

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

الحلول : $(t-3)(t-1)$

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-1} \quad *$$

لإيجاد A نضرب بـ t ونعوض $t=0$

$$\frac{1+t^2}{(t-3)(t-1)} = A + \frac{Bt}{t-3} + \frac{Ct}{t-1}$$

نعوض $t=0$

$$\frac{1}{(-3)(-1)} = A + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}}$$

لإيجاد B نضرب بـ $t-3$ ونعوض $t=3$ ؛

$$\frac{1+t^2}{t(t-1)} = \frac{A(t-3)}{t} + B + \frac{C(t-3)}{(t-1)} \Rightarrow \frac{10}{6} = B \Rightarrow \boxed{B = \frac{5}{3}}$$

لإيجاد C نضرب بـ $t-1$ ونعوض $t=1$

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)} = \frac{A(t-1)}{t} + \frac{B(t-1)}{t-3} + C \Rightarrow \frac{2}{-2} = C \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

نعوض في *

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{\frac{1}{3}}{t} + \frac{\frac{5}{3}}{t-3} + \frac{-1}{t-1}$$

$$\int \frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{5}{3}\int \frac{1}{t-3}\,dt - \int \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| + \frac{5}{3}\ln|t-3| - \ln|t-1| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{5}{3}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)-3\right| - \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)-1\right| + c$$

تكاملات بعض الأشكال الخاصة من الدوال المثلثية

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

في هذا النوع من التكامل تكون $\sin x$ و $\cos x$ من الدرجة n حيث $n>1$

أي ليست من الدرجة الأولى.

وتنقسم إلى ثلاث حالات:

اذا كانت درجة الـ $\cos x$ عدد فردي نفرض $t=\sin x$

اذا كانت درجة الـ $\sin x$ عدد فردي نفرض $t=\cos x$

اذا كانت درجة $\sin x$ و $\cos x$ عدد زوجي $t=tg\,x$

ملاحظة: الاعداد الفردية تحافظ على القيمة السالبة.

مثال: أوجد التكامل:

$$I = \int \frac{(\cos x)^3}{(\sin x)^2}\,dx$$

نلاحظ أن اذا استبدلنا $\cos x$ بـ $-\cos x$ تصبح الدالة سالبة

(لأن درجة الـ $\cos x$ فردية)

لذلك نفرض $t=\sin x$ ومنه نشتق: $dt=\cos x\,dx$ نعوض:

$$\int \frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2}\cdot\cos x\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}\underbrace{\cos x\,dx}_{dt}$$

تذكير: $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$

ثم نحاول التبديل $\sin x, \cos^3 x$

$$= \int \frac{1-t^2}{t^2}\cdot dt \Rightarrow \int \frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2} - 1\,dt = \int t^{-2} - 1\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} - t + c$$

$$= -\frac{1}{t} - t + c \Rightarrow -\frac{1}{\sin x} - \sin x + c$$

مثال: احسب التكامل:

$$I=\int \sin^5 x\cdot\cos^2 x\,dx$$

نلاحظ أن $\sin x$ دالة فردية

أي إذا استبدلنا $\sin x$ بـ $-\sin x$ تصبح الدالة سالبة وبالتالي

نفرض $t=\cos x \Leftarrow (dt)=-\sin x\,dx$ نعوض:

$$\int(\sin^2x)^2\cdot\cos^2x\cdot\sin x\,dx$$

نذكر: $\sin^2x=1-\cos^2x$

جزئنا $\sin^5x$ إلى قسمين

$\sin^5x=(\sin^2x)^2\cdot\sin x$

$$\int(1-\cos^2x)^2\cdot\cos^2x\cdot\underbrace{\sin x\,dx}_{-dt}$$

$$\int(1-t^2)^2\cdot t^2(-dt) \Rightarrow -\int(1-2t^2+t^4)\,t^2\,dt$$

$$=-\int t^2-2t^4+t^6\,dt \Rightarrow \int -t^6+2t^4-t^2\,dt$$

$$=\left[-\frac{t^7}{7}+\frac{2t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]+C=-\frac{1}{7}\cos^7x+\frac{2}{5}\cos^5x-\frac{1}{3}\cos^3x+C$$

مثال: أوجد التكامل:

$$I=\int\frac{\sin^4x}{\cos^6x}\,dx$$

نلاحظ أن دالة $\sin x$ ، $\cos x$ زوجية

أي إذا استبدلنا $\sin x$ أو $\cos x$ بـ $-\sin x$ أو $-\cos x$ لم تصبح الدالة سالبة لذلك نفرض $t=\mathrm{tg}\,x \Leftarrow x=\arctan t$ ، $dx=\frac{dt}{1+t^2}$

استنتاج الدستور:

(غير مطالب استنتاج دستور الـ $\cos x$ لكن للفهم)

$t=\mathrm{tg}\,x \Rightarrow t=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$

$\sin x=t\cdot\cos x$

نعلم أن: $\sin^2x+\cos^2x=1$

نعوض: $(t\cos x)^2+\cos^2x=1$

$t^2\cos^2x+\cos^2x=1$

نخرج $\cos^2x$ عامل مشترك:

$\cos^2x(t^2+1)=1$

$\boxed{\cos^2x=\frac{1}{t^2+1}}$ نحفظ

$\Rightarrow \boxed{\cos x=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}$ نحفظ

نكتب الدالة بالشكل:

$$\int\frac{\sin^4x}{\cos^4x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}\,dx$$

حيث $\cos^6x=\cos^4x\cdot\cos^2x$

$$\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^4\cdot\frac{1}{\cos^2x}\,dx$$

$$\int \mathrm{tg}^4x\cdot\frac{1}{\cos^2x}\,dx$$

نعوض بالقوانين:

$$\int tg^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

$$\int t^4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int t^4 \cdot \cancel{(1+t^2)} \cdot \frac{dt}{\cancel{1+t^2}}$$

$$= \int t^4\, dt = \frac{t^5}{5} + C \Rightarrow \frac{1}{5}\, tg^5 x + C$$

اذا كان الـ $\sin x$ و $\cos x$ درجتهما فرديان فإننا نطبق حالة اذا كانت درجتيهما زوجيان أي نفرض $t = tg x$.

مثال:

$$I = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-5} x\, dx$$

درجتا الـ $\sin x$ و $\cos x$ فرديان

نفرض أن $t = tg x$ و $x = arctg\, t$ نشتق:

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

الدساتير:

نعوض: $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\, dx \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int tg^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int t^3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int t^3 \cdot \cancel{(1+t^2)} \cdot \frac{dt}{\cancel{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C \Rightarrow \frac{1}{4}\, tg^4(x) + C$$

التكاملات من النمط: $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x\, dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x\, dx$ و $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x\, dx$. نستخدم الدساتير: / فقط بجمع /:

1) $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right]$

2) $\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right]$

3) $\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x - \cos(\alpha-\beta)x\right]$

مثال: أوجد التكامل:

$$I=\int \sin \underset{\alpha}{6}x \cdot \cos \underset{\beta}{2}x \, dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int [\sin(6+2)x+\sin(6-2)x]\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \sin 8x+\sin 4x \, dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{8}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 4x\right]+c$$

$$=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{8}\cos 4x+c$$

التكاملات المحددة

الشكل العام للتكامل المحدد:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

أي بعد تكامل الدالة نعوض (أكبر قيمة للمجال ناقص أصغر قيمة للمجال)

ملاحظة هامة: في حال استخدام تغير متحول يجب أن تغير المجال ليناسب مع المجهول الجديد (t).

أمثلة: احسب التكاملات:

باستخدام تغير المتحول:

نفرض $x^2=t$

$2x\,dx=dt$

$x\,dx=\frac{1}{2}dt$

نغير المجال بالشكل التالي:

$t=x^2$ من الفرض

عندما كانت $x=-1$: $t=(-1)^2 \Rightarrow t=1$

وعندما كانت $x=2$: $\Rightarrow t=(2)^2$, $t=4$

المجال الجديد هو: $[1,4]$

$$I_1=\int_{-1}^{2} x\cdot \sin(x^2)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\sin(x^2)\cdot \underbrace{x\,dx}_{\frac{1}{2}dt}$$

نعوض:

$$=\int_1^4 \sin t\cdot \frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}[-\cos t]_1^4$$ نعوض أكبر قيمة ناقص (-) الأصغرية

$$=\frac{1}{2}[-\cos(4)-(-\cos(1))]+c$$

$$=\frac{1}{2}[-\cos 4+\cos(1)]+c$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$$

دالة مثلثية تحتوي $\cos x$ من العائلة الأولى نتبع خطوات هذه الحالة:

1- نفرض أن $t = tg(\frac{x}{2})$

$\frac{x}{2} = arctg\, t \Rightarrow x = 2arctg\, t$

2- نشتق: $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

نعوض بالدستور $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

ثانياً: تغير المجال بما يناسب المتحول الجديد:

$t = tg(\frac{x}{2})$

عندما $x=0$ $\Rightarrow t = tg(0) = 0$

$t = 0$

عندما $x=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow t = tg(\frac{\frac{\pi}{2}}{2})$

$t = tg(\frac{\pi}{4})$

$\boxed{t=1}$

المجال الجديد $[0,1]$ نعوض

$$\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

نوحد المقامات =

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{2(1+t^2)+1-t^2}{\cancel{1+t^2}}}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3} = 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,dt$$

هنا نحول التكامل إلى $arctg(\frac{x}{a})$ نضرب ونقسم على $\sqrt{3}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{t^2+3}\,dt =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left[arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\overbrace{arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}^{\frac{\pi}{6}} - \overbrace{arctg(0)}^{0}\right]$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{\cancel{6}_{3}} - 0\right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

احسب التكامل

$$I_3 = \int_0^1 x^2 \cdot arctg\, x\, dx$$

نحول التكامل إلى تكامل بالتجزئة من الشكل $\int \underbrace{P_n(x)}_{dv} \underbrace{arctg\, x}_{u}\, dx$

نفرض $u = arctg\, x$ $\quad dv = x^2$

$du = \frac{dx}{1+x^2}$ $\quad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int u\,dv = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b v\,du \Rightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot arctg(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

يتبع ←

$$\left[\frac{1}{3}\cdot x^3 \operatorname{arctg}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

$$\left[\frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x\cdot x^2}{1+x^2}\,dx$$

نضيف ونطرح واحد

$$=\left[\frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x(x^2+1-1)}{1+x^2}\,dx$$

نفرق الكسر

$$=\left[\frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x\left(\cancel{\frac{x^2+1}{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x - \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

نضرب ونقسم على 2 ليؤول التكامل إلى لوغاريتم

$$=\left[\frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{3}(1)^3 \underbrace{\operatorname{arctg}(1)}_{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3}(0)\operatorname{arctg}(0)\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+1| - \frac{0}{2} + \frac{1}{2}\ln|1+0|\right]$$

$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - 0\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) - 0 + \frac{1}{2}\ln(1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln(2) - \frac{1}{6}\ln(1)$$

$$\left\{ \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right.$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(\ln(2) - \ln(1)\right) + C$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{2}{1}\right) + C$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln(2) + C$$

تمارين العمل :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\, dx \quad dt$$

باستخدام تغيير المتغير :

نفرض أن $\ln x = t$ ⇐ نشتق $\frac{1}{x}dx = dt$

لتخلص من اللوغاريتم نفرض e : $e^{\ln x} = e^t$

$x = e^t$

تغيير الحدود :

عندما $x = e \Rightarrow t = \ln e$

$t = 1$

عندما $x = 1 \Rightarrow t = \ln(1) = 0$

$t = 0$

نعوض :

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\cancel{t}}\, dt$$

$$= \int_0^1 \sin t\, dt = [-\cos t\, dt]_0^1 = [-\cos(1) + \cos(0)]$$

$$= -\cos(1) + 1 \Rightarrow 1 - \cos(1) + C$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$$

نحول التكامل إلى تكامل بالتجزئة

$$\int \frac{P_n(x)}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} P_n(x)$$

$dv \qquad u$

نعوض $u = x \qquad dv = \frac{1}{\cos^2 x}$

$du = dx \qquad v = tg(x)$

$$\int_a^b u\, dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

$$= [x \cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg(x)\, dx$$

غير الاشارات حتى يصبح البسط مشتق المقام

$$= [x\, tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$= [x\, tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = [\frac{\pi}{4} tg(\frac{\pi}{4}) - 0]$$

$$+ [\ln|\cos \tfrac{\pi}{4}| - \ln|\cos(0)|]$$

$$= \frac{\pi}{4}(1) + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln(1)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + C$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

باستخدام تغير المتحول:

نفرض أن $e^x = t$

نضرب بالعدد اللوغاريتمي:

نجد $x = \ln t$

$dx = \frac{1}{t}\,dt$

تغير المجال:

عندما $x=0$: $t = e^x$، $t = e^0 = 1$، $t=1$

عندما $x=1$: $t = e^x$، $t = e^1 \Rightarrow t = e$

المجال $[1,e]$

نعوض:

$$\int_1^e \frac{\cancel{t}}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{\cancel{t}}$$

$$\int_1^e \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

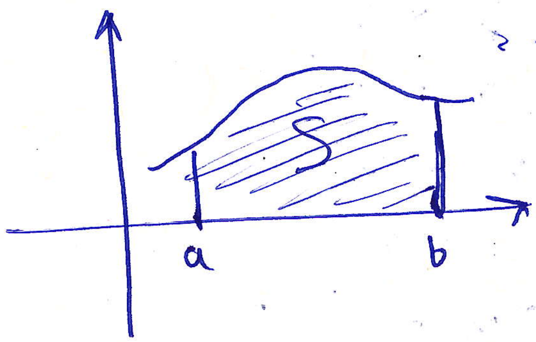
$$= [\operatorname{arctg}(t)]_1^e$$

$$= \operatorname{arctg}(e) - \operatorname{arctg}(1) \quad \frac{\pi}{4}$$

$$= \operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{4} + c$$

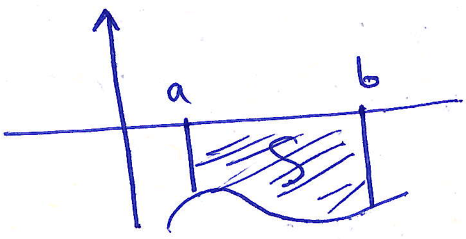
حساب المساحات

[1] حساب المساحات بالإحداثيات العادية، نميز الحالات التالية لحساب المساحات:



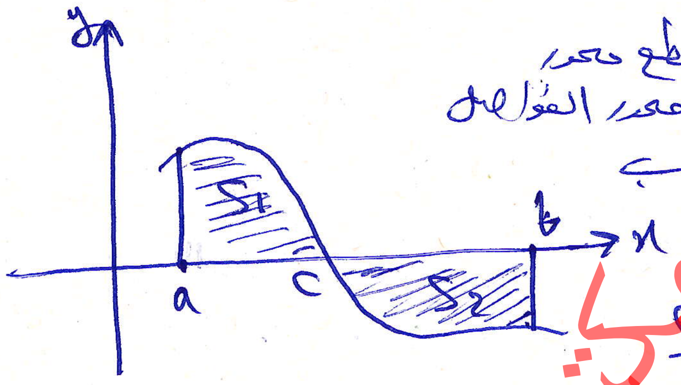
الحالة الأولى: الخط البياني يقع بالكامل فوق محور الفواصل عندئذ تعطى المساحة بالعلاقة التالية:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



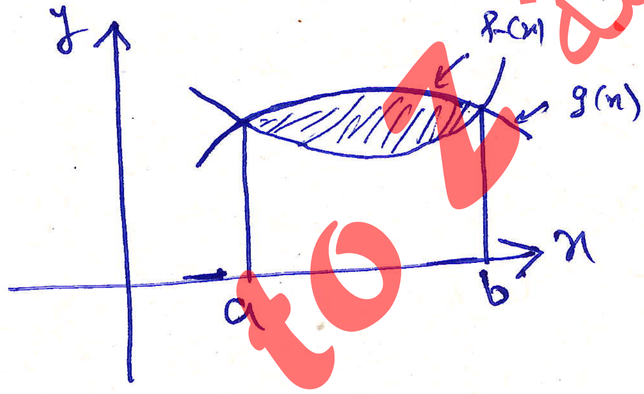
الحالة الثانية: الخط البياني يقع بالكامل تحت محور الفواصل عندئذ تعطى المساحة:

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$



الحالة الثالثة: إذا كان الخط البياني يقطع محور الفواصل بأكثر من نقطة (أي جزء فوق محور الفواصل وجزء تحت محور الفواصل) نحول حساب المساحة إلى التكامل من الشكل:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_c^b -f(x)\,dx$$



الحالة الرابعة: إذا كان سطح المستوي مغلق ومحصور بين منحنيين $f(x)$ و $g(x)$ فإن قانون المساحة يعطى بالشكل:

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

حيث a و b هي فواصل نقاط التقاطع لكل من $f(x)$ و $g(x)$:

$$\boxed{\begin{matrix}a=x_0\\ b=x_1\end{matrix}} \Leftarrow \begin{cases} f(x)=(x_0,y_0)\\ g(x)=(x_1,y_1)\end{cases}$$

مثال: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالتين:

$$f(x)=x^2 \;,\; g(x)=2x-x^2$$

الحل: نوجد تقاطع المنحنيين:

$f(x)=g(x)$

$x^2=2x-x^2$

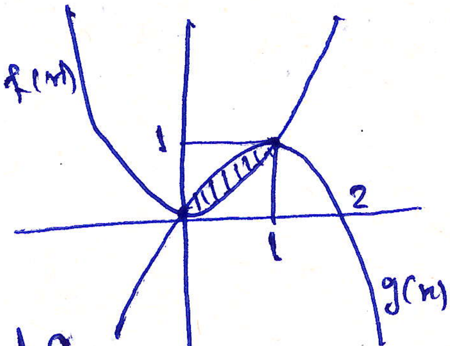
$x^2-2x+x^2=0$

$2x^2-2x=0$

$2x(x-1)=0$

إما $2x=0 \Rightarrow x=0$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$



نعوض $x=0$ عن $f(x)$: $f(x)=(0)^2=0$

نعوض $x=1$ عن $f(x)$: $f(x)=(1)^2=1$

$g(x) \Rightarrow x=0$

$g(x)=2(0)-0^2=0$

نعوض $x=1$

$g(x)=2(1)-1=1$

~~f(x) = (o~~

$(0,0)-(1,1)$

$(0,1)$ وهو المجال

$$S=\int_0^1 (g(x)-f(x))\,dx$$

$$\int_0^1 2x-x^2-x^2\,dx$$

$$\int_0^1 2x-2x^2\,dx$$

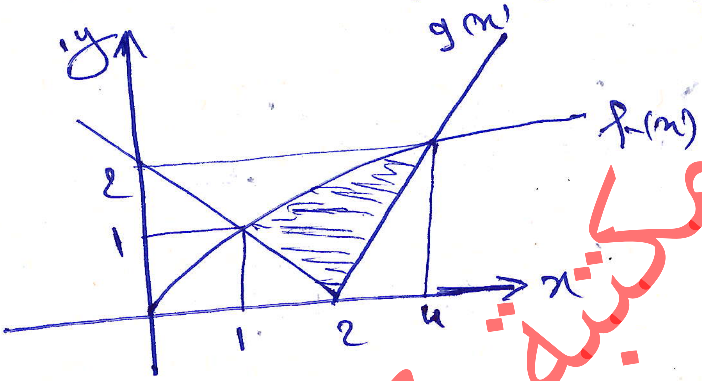
$$\left[2\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$\left[x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\left(1-\frac{2}{3}-0\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

مثال: احسب المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين:

$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=|x-2|$



الحل:

نلاحظ أن

$$g(x)=|x-2|=\begin{cases}-x+2 & ; x\le 2\\ x-2 & ; x\ge 2\end{cases}$$

على المجال $]-\infty,2[$ نرسم المستقيم

$y=-x+2$

x	0	1
y	2	1

$(0,2)$ $(1,1)$ (نرسم أول خط)

على المجال $]2,+\infty[$ نرسم المستقيم

$y=x-2$

x	0	1
y	-2	-1

$(0,-2)$ $(1,-1)$ (نرسم ثاني خط وتقاطعه)

نتذكر عند تربيع القيمة المطلقة يبقى التربيع ونحذف القيمة المطلقة

أما بالنسبة لمعادلة $f(x)$ ؛ $f(x)=\sqrt{x}$ وهو جذر تربيعي ثابت يبدأ من نقطة المبدأ وهو تربيعي ( )

نحدد النقطة المشتركة على [illegible] نوجد حدود التكامل:

$$f(x)=g(x)$$

$$\sqrt{x}=|x-2|$$ نربع الطرفين

$$x=(x-2)^2$$

$$x=x^2-4x+4$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4-x=0$$

$$x^2-5x+4=0$$

بالتحليل المباشر أو Δ :

$$(x-1)(x-4)=0 \Rightarrow \text{إما } x=1 \text{ أو } x=4$$

إذا المجال $[1,4]$

$$S=\int_1^4 (f(x)-g(x))\,dx$$

$$=\int_1^4 [\sqrt{x}-|x-2|]\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sqrt{x}-(-x+2)\,dx+\int_2^4 \sqrt{x}-(x-2)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sqrt{x}+x-2\,dx+\int_2^4 \sqrt{x}-x+2\,dx$$

$$\int_1^2 x^{\frac{1}{2}}+x-2\,dx+\int_2^4 x^{\frac{1}{2}}-x+2\,dx$$

$$\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{2} - 2(2) - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} + 2(1)\right]$$

$$+ \left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{2} + 8 - \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{2} + 4\right]$$

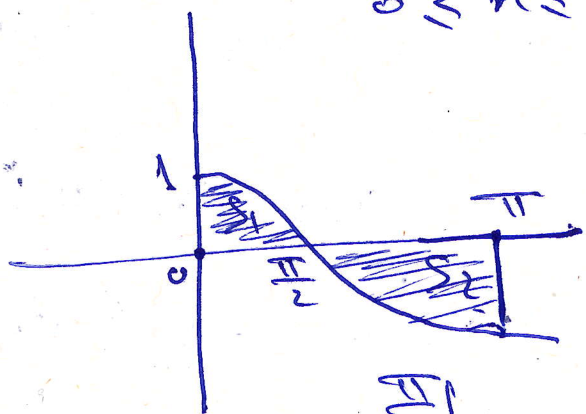
$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{2^3} + 2 - 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - 8 + 8 - \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - 2 + 4\right]$$

$$= \left[\cancel{\frac{2}{3}\sqrt{8}} - \cancel{2} - \frac{2}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{2} + \frac{2}{3}\sqrt{64} - \cancel{\frac{2}{3}\sqrt{8}}\right]$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{64} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(8) = -\frac{2}{3} + \frac{16}{3}$$

$$= \frac{+14}{3}$$

مثال: احسب مساحة الشكل المحصور بين منحنى التابع $y = \cos x$ والمحور ox بحيث $0 \leq x \leq \pi$



$$S = S_1 + S_2$$

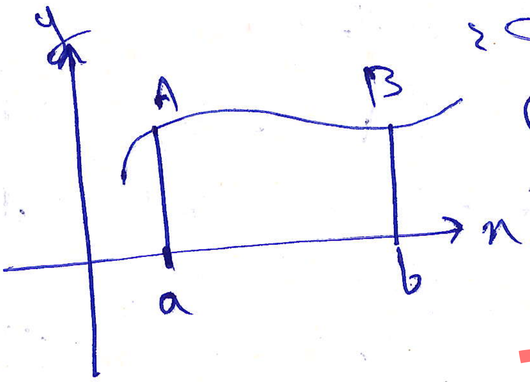
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin(0)\right] + \left[-\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= (1 - 0) + (0 + 1) = 1 - 0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

حساب طول المنحنى: نميز حالتين:



1] إذا كان المنحنى معطى ديكارتياً (عن طريق الدوال)

نحسب طول جزء المنحنى AB بالعلاقة:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

نعلم أن $f(x)=y$

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

2] المنحنى معطى وسيطياً (معادلات) بالعلاقات $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

نعوض طول القوس AB بالعلاقة:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

مثال: احسب طول القوس المنحنى المعطى بالعلاقة الآتية: $y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ وذلك على المجال $[0, 8]$

$$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \sqrt{x}$$

$$l = \int_0^8 \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$= \int_0^8 \sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^8 (1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^8 = \left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\right]_0^8 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+8)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+0)^3}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{9^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} = \frac{2}{3}\cdot 27 - \frac{2}{3} \Rightarrow 18 - \frac{2}{3} = \frac{54-2}{3}$$

$$= \frac{52}{3}.$$

مثال: احسب طول المنحني السيكلوئيدي المعرف بالمعادلتين:

$$x = a(t - \sin t) \quad , \quad y = a(1-\cos t) \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

الحل: قانون طول المنحني:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

بالاشتقاقات لـ x و y:

$$x' = a(1-\cos t)$$

$$y' = a\sin t$$

نعوض:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left((1-\cos t)^2 + \sin^2 t\right)}\; dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1=}}\; dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + 1}\; dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\; dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(\underbrace{1-\cos t}_{2\sin^2\frac{t}{2}})}\; dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(2\sin^2\tfrac{t}{2}\right)}\; dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\tfrac{t}{2}}\; dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{t}{2}\, dt = 2a\left[-2\cos\tfrac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2a\left[-2\cos\tfrac{2\pi}{2} + 2\cos\tfrac{0}{2}\right] = 2a\left[-2(-1) + 2(1)\right]$$

$$= 2a(+2+2) = 8a$$ وحدة طول

حساب حجم مجسم دوراني:

قانون حجم المجسم الناتج عن دوران سطح مستوي حول محور ox يعطى بالعلاقة:

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

- قانون حجم المجسم الناتج عن دوران سطح مستوي حول محور oy:

$$V=\pi\int_\alpha^\beta x^2\,dy=\pi\int_\alpha^\beta (\varphi(y))^2\,dy$$

مثال: احسب حجم المخروط الناتج عن دوران المستقيم $y=ax$ حول محور ox:

نأخذ نقطة من المستقيم فاصلتها h فرضاً

يكون المجال $[0,h]$ حسب القانون:

$$V=\pi\int_0^h y^2\,dx=\pi\int_0^h (ax)^2\,dx$$

$$=a^2\pi\int_0^h x^2\,dx=a^2\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=a^2\pi\left[\frac{h^3}{3}-0\right]$$

$$=\frac{1}{3}a^2h^3\pi \Rightarrow \frac{1}{3}(ah)^2\pi\cdot h$$

نفرض أن: $(ah)^2=R^2$ نصف قطر القاعدة:

$$=\frac{1}{3}R^2\pi\cdot h.$$

مثال: احسب حجم المجسم الدوراني الذي تولده دوران القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول المحور (ox):

نأخذ نقطة من القطع ولتكن a فيكون المجال $[0,a]$ نطبق القانون لكن القطع متناظر لذلك نضرب بـ 2:

$$V=2\pi\int_0^a y^2\,dx \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

نعوض بالقانون

$$y^2 = b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$V = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2}\int_0^a a^2 - x^2\,dx.$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left[a^3 - \frac{a^3}{3} - 0\right]$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left[\frac{3a^3 - a^3}{3}\right]$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{\cancel{a^2}}\left(\frac{2\,\cancel{a^3}^{\,a}}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}\,ab^2.$$

انس الملكي