كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

# اسئلة دوراة محلولة

# تحليل عقدي١

## A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم ( فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة )

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية ( SMS ) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

جامعة طرطوس — امتحان مقرر التحليل العقدي 1 — الاسم :

كلية العلوم — لطلاب السنة الثالثة الرياضيات — الدرجة :90

قسم الرياضيات — الدورة الفصلية الثانية : 2025 — المدة :ساعتين

---

السؤال الاول: ( درجة 40)

اولا: أثبت باستخدام شرطي كوشي ريمان ان الدالة $f(z) = e^z cosz$ تحليلية .

ثانيا: أحسب قيمة كل من التكاملات التالية:

a.

$$\int_c f(z)\, dz;\ c := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1, arg(z) \in [0, \pi]\}$$

b.

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{e^z z^3}\, dz.$$

ثالثا: هل الدالة $u(x, y) = x^2 ch(y) + y^2 sh(y)$ توافقية ولماذا.

السؤال الثاني: ( درجة 50)

أولا: أوجد مرتبة الصفر ونوع النقاط الشاذة للدالة

$$g(z) = .\frac{z^8}{sinz};$$

ثانيا: أوجد منطقة تقارب السلسلة

$$I := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+1/2}}$$

ثالثا: أوجد سلسلة لوران في جوار الصفر لدالة

$$h(z) = \frac{z}{z^2 + i}$$

---

مدرس المقرر

د.حنان علي

لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n}$ : مناقش السلسلة

$c_{-n} = e^{in}$ ; $c_{-n-1} = e^{i(n+1)}$

بالتالي $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|e^{i(n+1)}|}{|e^{in}|} = 1$ (5)

بالتالي السلسلة تقارب مطلقا

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n-1}|}{|c_n|}$

$|z+1| > 1$ (5)

لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{e^{in+1/2}}$ مناقش السلسلة

$c_n = e^{-in-1/2}$ ; $c_{n+1} = e^{-i(n+1)-\frac{1}{2}}$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e^{-in-1/2}|}{|e^{-i(n+1)-1/2}|} = 1$ (10)

نصف قطر تقاربها

بالتالي السلسلة I متقاربة في كل مكان $|z+1| < 1$ (5)

السلسلة متقاربة في الفتحة

مثال : اوجد سلسلة لوران في جوار الصفر للدالة

$h(z) = \frac{z}{z^2+i}$

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ ; سلسلة لوران تكتب بالشكل

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$f(z) = \frac{z}{z^2+i} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{z^2}}\right) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{i}{z^2} + \frac{i^2}{z^4} - \frac{i^3}{z^6} - \cdots\right)$

(5) $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 - \cdots$ وذلك بوضع

$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{i}{z^3} - \frac{1}{z^5} - \cdots$

Ato Z

## السؤال الثاني (25 درجة)

15 أولاً: أوجد مرتبة الصفر ونوع النقاط الشاذة للدالة $g(z)=\frac{z^8}{\sin z}$ ;

الأصفار هي حل المعادلة $z^8=0 \Leftarrow z=0$ وهو صفر مرتبته الثامنة لأن

لدينا لفشوز $\sin z$

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots}=\frac{z^7}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots}=z^7\cdot u(z)$$

حيث $u(0)=1\neq 0$ و $u(z)$ تحليلية في النقطة $z=0$.

النقاط الشاذة هي حل المعادلة $\sin z=0$

$$\sin z=\sin(\pi k) \quad ; k=0,1,2,\cdots$$

$$\Leftrightarrow z_k=\pi k \quad ; k\neq 0$$

عدد لا نهائي من النقاط الشاذة وجميعها أقطاب بسيطة لأن

$$h(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{\sin z}{z^8}$$

تملك أصفار من المرتبة الأولى $z_k=\pi k$ $k=1,2,\cdots$

$$\lim_{z\to k\pi}\frac{z^8}{\sin z}=\infty \Rightarrow z_k=k\pi$$ أو حيث $k\neq 0$

---

ثانياً: أوجد منطقة تقارب السلسلة

$$I:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$$

A+O

ثانياً: أحسب قيمة كل من التكاملات التالية:

a. $\int_C f(z)dz \; ; \; C:=\{ z\in\mathbb{C} \mid |z|=1, \arg(z)\in[0,\pi]\}$

الحل: نفرض $z=e^{i\theta}$ حيث $0\le\theta\le\pi \Leftarrow dz=ie^{i\theta}d\theta$

$$f(z)=e^z\cos z = e^{e^{i\theta}}\cdot\left(\frac{e^{ie^{i\theta}}+e^{-ie^{i\theta}}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{e^{i\theta}(1+i)}+e^{e^{i\theta}(1-i)}\right)$$

نفرض $y=e^{i\theta} \Leftarrow dy=ie^{i\theta}d\theta$, $\theta=0\Rightarrow y=1$, $\theta=\pi\Rightarrow y=-1$

$$\int_C f(z)dz=\frac{1}{2}\int_{+1}^{-1}\left(e^{y(1+i)}+e^{y(1-i)}\right)dy \quad (10)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+i}\left(e^{-(1+i)}-e^{(1+i)}\right)+\frac{1}{1-i}\left(e^{-(1-i)}-e^{(1-i)}\right)\right]$$

b. $$\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{e^z\cdot z^3}dz=\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$$

الدالة $\cos z$ تحليلية داخل وعلى محيط الدائرة $|z|=1$ بالتالي (10)

$$\int_{|z|=1}\frac{f\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0}=\pi i(-\cos z\Big|_{z=0}=-\pi i$$

ثالثاً: هل الدالة $u(x,y)=x^2chy+y^2\cdot shy$ توافقية ولماذا؟

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xchy \; ; \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2chy \quad --(1)$$ (5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2chy+2shy+2ychy+2ychy+y^2shy \quad (2)$$

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة لكن لا يتحقق الشرط (5)

بجمع (1) و (2) عند أن الشرط (3) غير محقق، والدالة غير توافقية

سلم تصحيح امتحان مقرر التحليل العقدي 1 / لطلاب السنة الثالثة / رياضيات
الدورة الفصلية الثانية 2024-2025 .

السؤال الأول: (40 درجة)

أولا: اثبت باستخدام شرطي كوشي ريمان أن الدالة $f(z)=e^{z}\cos z$ تحليلية؟

الحل: لدينا شرطي كوشي ريمان $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ ; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ (5)

$z=x+iy$ أي:

$$f(z)=u+iv=e^{x+iy}\left(\frac{e^{(x+iy)i}+e^{-i(x+iy)}}{2}\right)$$

$$f(z)=\frac{e^{x+iy}}{2}\cdot\frac{e^{ix-y}+e^{x+iy-ix+y}}{2}=\frac{e^{(x-y)+i(x+y)}+e^{(x+y)+i(y-x)}}{2}$$

$$f(z)=2^{-1}\left(e^{x-y}\cos(x+y)+e^{x+y}\cos(y-x)\right)+2^{-1}\left(e^{x-y}\sin(x+y)+e^{x+y}\sin(y-x)\right)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}\left(e^{x-y}\cos(x+y)+e^{x+y}\cos(y-x)\right)$$

$$v(x,y)=\frac{1}{2}\left(e^{x-y}\sin(x+y)+e^{x+y}\sin(y-x)\right)$$

نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(e^{x-y}\cos(x+y)+e^{x+y}\cos(y-x)-e^{x-y}\sin(x+y)+e^{x+y}\sin(y-x)\right)$$

نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(e^{x-y}\sin(x+y)+e^{x+y}\sin(y-x)+e^{x-y}\cos(x+y)-e^{x+y}\cos(y-x)\right)$$

نلاحظ بأن $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ وبالتالي لم يتحقق الشرط إذن الدالة ليست تحليلية . (5)

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر التحليل العقدي_1
لطلاب السنة الثالثة رياضيات
الدورة الفصلية الاولى: 2024-2025

الاسم:
الدرجة: 90
المدة:

---

**السؤال الاول:(40 د)** ليكن لدينا الدالة العقدية التالية:

$$f(z)=\frac{e^{2z}+1}{e^{z}+i}$$

a. أثبت باستخدام شرطي كوشي-ريمان ان الدالة السابقة تحليلية

b. احسب التكاملات التالي

$$\int_C f(z)\ dz\ ;\ C:=\{z\in\mathbb{C},|z|\in(1,\frac{3}{2}),\arg(z)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\}$$

$$\int_{|z-i|=1}\frac{f(z)}{-iz+z^2}\ dz$$

c. هل الدالة التالية توافقية

$$v(x,y)=e^{xy}\ln(x^2+y^2)$$

**السؤال الثاني:(50د)**

أولا: أوجد اصفار الدالة التالية وحدد مرتبة كل منها

$$f(z)=(z^2+1)^3\ shz$$

ثانيا: أوجد منطقة تقارب السلسلة

$$I:=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{6}$$

ثالثا: أوجد سلسلة لوران في جوار الصفر لدالة

$$g(z)=\frac{z^2}{z^2-2z-3}$$

---

مدرسة المقرر: د. حنان علي

A to Z

سلم تصحيح امتحان مقرر التحليل العقدي 1 / لطلاب السنة الثالثة رياضيات / الدورة الفصلية الأولى : 2025-2024

السؤال الأول 40د : ليكن لدينا الدالة العقدية التالية $f(z) = \frac{e^{2z}+1}{e^z+i}$

15 a. 1. أثبت باستخدام شرطي كوشي - ريمان أن الدالة السابقة تحليلية :

شرطي كوشي ريمان (10)

بما أن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ / $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

بما أن $f(z) = u + iv$ ; $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \frac{(e^z)^2 - (i)^2}{e^z+i} = \frac{(e^z+i)(e^z-i)}{(e^z+i)}$$

$$f(z) = e^z - i = e^x \cos y + i(e^x \sin y - 1) \quad ; \quad z = x+iy$$

$$u = e^x \cos y \quad , \quad v = e^x \sin y - 1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \; ; \; \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \; , \; \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

الشرطين محققين والدالة تحليلية بما أن التفاضلات الجزئية موجودة ومستمرة.

b 13. $\oint_C (e^z - i)\,dz = 0$ (5)

لأن الدالة $f(z)$ تحليلية داخل المنطقة C المغلقة بالتالي التكامل معدوم حسب كوشي بما أن C محتوية داخل مضلعه

(1)

$$* \int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{-iz+z^2}dz = \int_{|z-i|=1} \frac{e^z-i}{-iz+z^2}dz = \int_{|z-i|=1} \frac{e^z-i}{z(z-i)}dz$$

الشرط المساعدة $z=0$ و $z=+i$ داخل الدائرة $|z-i|=1$ لذلك

$$\frac{e^z-i}{z(z-i)} = \frac{ie^z+1}{z} - \frac{(1+ie^z)}{z-i}$$ بتقسيم الكسر (3)

$$\Rightarrow \int_{|z-i|=1} \frac{ie^z+1}{z}dz - \int_{|z-i|=1} \frac{ie^z+1}{z-i}dz = 2\pi i(i+1) - 2\pi i(ie^i+1)$$

وذلك حسب علاقة كوشي التكاملية

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)dz}{z-z_0} = f(z_0) \quad ; \quad z_0 \in D$$ (4)

والدالة $f(z)$ تحليلية داخل وعلى $c$.

ج. هل الدالة التالية توافقية

$$u(x,y) = e^{xy}\ln(x^2+y^2)$$

حتى تكون الدالة توافقية يجب أن تحقق جزئيات مستمرة من الدرجة الثانية وتحقق الشرط

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ (5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}\ln(x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2x}{x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}\ln(x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2e^{xy}\ln(x^2+y^2) + ye^{xy}\frac{2x}{x^2+y^2} + ye^{xy}\frac{2x}{x^2+y^2} + e^{xy}\cdot\frac{2(x^2+y^2)-4x}{x^2+y^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x} = y^2e^{xy}\ln(x^2+y^2) + \frac{4xye^{xy}}{x^2+y^2} + \frac{2e^{xy}(y^2-x^2)}{x^2+y^2}.}$$ (3)

(2)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} \ln(x^2+y^2) + \frac{4xye^{xy}}{x^2+y^2} + \frac{2e^{xy}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad (3)$$

وبالتالي $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \neq 0$ (2) والدالة $v$ غير توافقية

السؤال الثاني (50 د) [15] أ) أوجد: أصفار الدالة التالية وحدد مرتبة كل منها

$$f(z) = (z^2+1)^3 \sinh z = (z+i)^3 (z-i)^3 \sinh z = 0$$

الأصفار:

$$z = \pm i, \quad \sinh z = 0 \Rightarrow z = k\pi i; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

من أجل $z = -i$ بالتالي $f(z)$ يمكن كتابتها

$$f(z) = (z+i)^3 v(z), \quad v(z) = (z-i)^3 \sinh z \quad (3)$$

$v(z)$ دالة تحليلية في النقطة $z = -i$ و

$$v(-i) = 8i \sinh i = -8 \sin 1 \neq 0 \quad (2)$$

وهذا يعني أن $z = -i$ (2) صفر من المرتبة الثالثة (3) بالمثل نثبت أن $z = i$ صفر من المرتبة الثالثة. ولنبحث في مرتبة $z = k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) بالاستقامة

$$f'(z) = 6z(z^2+1)^2 \sinh z + (z^2+1)^3 \cosh z \quad (2)$$

في النقطة $z = k\pi i$ الدالة $f'(z)$ مختلفة عن الصفر

$z = k\pi i$ صفر من المرتبة الأولى. (2)

ثانياً: أوجد منطقة تقارب السلسلة:

$$I := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{6}$$

لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$ السلسلة

$C_{-n-1} = (3+4i)^{n+1}$

$C_{-n} = (3+4i)^n$

$\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \frac{|(3+4i)^{n+1}|}{|(3+4i)^n|} = \lim_{n\to\infty} |3+4i| = 5$ (5)

(2) $|z+2i| > 5$ السلسلة الأولى تتقارب في المنطقة

لدينا $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{6}$ السلسلة

$C_n = 6^{-1}$ , $C_{n+1} = 6^{-1}$

$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = 1$ (5)

(2) $|z+2i| < 1$ السلسلة تتقارب في المنطقة

$r = 5 > R = 1$ متباعدة في كل مكان (6)

ثانياً 15 أوجد سلسلة لورانت في جوار الصفر للدالة

$g(z) = \frac{z^2}{z^2-2z-3} = 1 + \frac{2z+3}{z^2-2z-3}$

$\frac{2z+3}{z^2-2z-3} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-3} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, B = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow \frac{z^2}{z^2-2z-3} = 1 + \frac{9}{4}\frac{1}{z-3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z+1}$ (5)

$= 1 + \frac{9}{4}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \cdots\right) - \frac{1}{4}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots\right)$

(5) (5)

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل عقدي 1
سنة ثالثة رياضيات
الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023-2024م

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: تسعون

---

**السؤال الأول: (54 درجة)**

**1)** بيّن أن التابع $u = u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ توافقي في المستوي العقدي وأوجد مرافقا توافقياً له $v$ بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في المستوي العقدي.

**2)** ليكن لدينا التابع $f(z) = e^{-x}cosy - ie^{-x}siny$ المعرف في جميع نقاط المستوي العقدي.

1. أثبت أن التابع $f$ يحقق معادلتي كوشي- ريمان في جميع نقاط المستوي العقدي، وماذا تستنتج؟
2. أوجد $f'(z)$.

**3)** ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n\geq 0}$ حيث $z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^n$.

**4)** ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أثبت بأنّ التابع $h(z) = \frac{z}{f(z)}$ ليس له نهاية عند الصفر.
2. أوجد معادلة القطعة المستقيمة $C$ الواصلة بين العددين العقديين $z_0 = 0$ , $z_1 = 1 + 2i$ ثم أوجد

$$\int_C f(z)dz$$

3. استخدم مبرهنة غرين في إيجاد التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ هو محيط المثلث الذي رؤوسه الأعداد العقدية $z_2 = -1 + i$ , $z_1 = 0$ , $z_0 = -1$

**السؤال الثاني: (36 درجة)**

**1)** أوجد ناتج ما يلي بأبسط شكل ممكن:

$$A = ch\left(\frac{9\pi}{4}i\right), \qquad B = Log(ei)$$

**2)** ليكن $w = f(z) = \frac{z+1}{2z-1}$ تابع عقدي معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أوجد صورة دائرة الوحدة $C: |z| = 1$ وفق $w = f(z)$.
2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ الدائرة التي مركزها العدد $z_0 = -1$ ونصف قطرها 1.
3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z^2}dz$ حيث $C$ الدائرة التي مركزها $z_0 = \frac{1}{2}$ ونصف قطرها $\frac{1}{4}$.

---انتهت الأسئلة---

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي 1 لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

---

مكتبة A to Z

**السؤال الأول: (54 درجة)**

**1) (12 درجة).** بيّن أن التابع $u = u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ توافقي في المستوي العقدي وأوجد مرافقا توافقيا له $v$ بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في المستوي العقدي.

**الحلّ:**

- (6 درجات)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(معادلة لابلاس محققة)}$$

المشتقات الجزئية مستمرة في جميع نقاط المستوي العقدي وتتحقق معادلة لابلاس بالتالي الدالة $u$ توافقية في المستوي العقدي.

- (6 درجات)

إيجاد المرافق التوافقي $v$

بما أنّ التابع $f = u + iv$ تحليلي في $\mathbb{C}$ عندئذ تتحقق معادلتي كوشي –ريمان أي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots.(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ldots.(2)$$

من (1) نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

بالتالي $v = \int (3x^2 - 3y^2)dy$

عندئذ

$$v = 3x^2y - y^3 + \varphi(x)$$

من (2) نجد:

$$-6xy - 5 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

بالتالي

$$-6xy - 5 = -6xy - \acute{\varphi}(x)$$

عندئذ

$$\acute{\varphi}(x) = 5$$

بالتالي

$$\varphi(x) = 5x + c; c \in \mathbb{C}$$

$$v = 3x^2y - y^3 + 5x + c; c \in \mathbb{C}$$

مكتبة A to Z

**2) (12 درجة).** ليكن لدينا التابع $f(z) = e^{-x}cosy - ie^{-x}siny$ المعرف في جميع نقاط المستوي العقدي.

1. أثبت أن التابع $f(z)$ يحقق معادلتي كوشي- ريمان في جميع نقاط المستوي العقدي، وماذا تستنتج؟
2. أوجد $\acute{f}(z)$.

**الحلّ:**

1. (6 درجات).

$$u = Ref(z) = e^{-x}cosy \ , \ v = Imf(z) = -e^{-x}siny$$

نلاحظ بأنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}cosy \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x}siny$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}siny \ , \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x}cosy$$

نلاحظ بأنّ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ بالتالي معادلتي كوشي- ريمان محققة.

- ( 3 درجات) المشتقات الجزئية مستمرة وتتحقق معادلتي كوشي ريمان في جميع نقاط المستوي العقدي بالتالي التابع $f$ اشتقاقي في جميع نقاط المستوي العقدي بالتالي $f$ تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي.
- ( 3 درجات)

$$\acute{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = (-e^{-x}cosy) + i(e^{-x}siny) = -e^{-z} = -f(z)$$

**3) (6 درجات)**

ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n\geq 0}$ حيث $z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^n$.

**الحلّ:** المتتالية الهندسية $\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^n$ متقاربة من الصفر لأنّ $\left|\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

بالتالي $lim_{n\to\infty} z_n = 0$

فالمتتالية $(z_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من 0.

**4) (24 درجة)**. ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أثبت بأنّ التابع $h(z) = \frac{z}{f(z)}$ ليس له نهاية عند الصفر.
2. أوجد معادلة القطعة المستقيمة $C$ الواصلة بين العددين العقديين $z_0 = 0$ , $z_1 = 1 + 2i$ ثم أوجد

$$\int_C f(z)dz$$

3. استخدم مبرهنة غرين في إيجاد التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ هو محيط المثلث الذي رؤوسه الأعداد العقدية $z_2 = -1 + i$ , $z_1 = 0$ , $z_0 = -1$

مكتبة A to Z

**الحلّ:**

1. (8 درجات)

ليكن $h(z) = \frac{z}{\bar{z}}$، لنأخذ المتتاليتين $(z_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ حيث $z_n = \frac{1}{n}$ و $w_n = \frac{i}{n}$

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow h(z_n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow h(w_n) = \frac{\frac{i}{n}}{-\frac{i}{n}} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

نلاحظ بأنّ $-1 \neq 1$ بالتالي التابع $h(z) = \frac{z}{f(z)}$ ليس له نهاية عند الصفر.

ملاحظة : يمكن اثبات بأن $h(z)$ ليس له نهاية عند الصفر باستخدام طريقة المسارات.

مثلاً : المسار الأول: $y = 0;\ x \longrightarrow 0$

المسار الثاني: $y = x;\ x \longrightarrow 0$

2. (8 درجات)

$$C: z = z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t; 0 \leq t \leq 1$$
$$z = z(t) = 0 + (1 + 2i - 0)t = (1 + 2i)t; 0 \leq t \leq 1$$
$$\acute{z}(t) = 1 + 2i$$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 f\big(z(t)\big)\acute{z}(t)dt = \int_0^1 (1 - 2i)(1 + 2i)tdt = \int_0^1 5tdt = \frac{5}{2}$$

3. (8 درجات)

$$\int_C f(z)dz = \int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i\int_C -ydx + xdy$$

$$= \iint_D 0dxdy + i \iint_D 2dxdy = i \int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x} 2dydx = i \int_{-1}^{0} -2xdx = i$$

**السؤال الثاني: (36 درجة)**

**1) (12 درجة)** (6 درجات لكلّ تمرين) أوجد ناتج ما يلي بأبسط شكل ممكن:

$$A = ch\left(\frac{9\pi}{4}i\right), \qquad B = Log(ei)$$

**الحل:**

✓ $A = ch\left(\frac{9\pi}{4}i\right)$

$$A = ch\left(\frac{9\pi}{4}i\right) = cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

✓ $B = Log(ei)$

$$B = Log(ei) = \ln(|ei|) + i\big(Arg(ei)\big) = \ln(e) + i(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi}{2}i$$

**2) (24 درجة).** ليكن $w = f(z) = \frac{z+1}{2z-1}$ تابع عقدي معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أوجد صورة دائرة الوحدة $C: |z| = 1$ وفق $w = f(z)$.
2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ الدائرة التي مركزها العدد $z_0 = -1$ ونصف قطرها 1.
3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z^2}dz$ حيث $C$ الدائرة التي مركزها $z_0 = \frac{1}{2}$ ونصف قطرها $\frac{1}{4}$.

**الحلّ:**

1. (9 درجات).

$$w = f(z) = \frac{z+1}{2z-1}$$

بالتالي:

$$z = \frac{w+1}{2w-1}$$

$$\left|\frac{w+1}{2w-1}\right| = |z| = 1$$

بالتالي

$$|w+1| = |2w-1|$$

نضع $w = u + iv$ نجد:

$$|u+1+iv| = |2u-1+i2v|$$

بالتالي:

$$(u+1)^2 + (v)^2 = (2u-1)^2 + (2v)^2$$

A to Z مكتبة

بالتالي $(u-1)^2+v^2=1$

صورة دائرة الوحدة وفق $w=f(z)$ هي دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 1.

2. (6 درجات).

$C$ منحني بسيط مغلق موجه بالاتجاه الموجب، والدالة $f$ تحليلية في $\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ فهي تحليلية داخل المنحني $C$ (منطقة بسيطة الترابط) وعلى محيطه بالتالي حسب مبرهنة كوشي نجد $\int_C f(z)dz=0$

3. (9 درجات).

التابع المكامل هو $\frac{f(z)}{z^2}=\frac{z+1}{2z^3-z^2}=\frac{\frac{z+1}{2z^2}}{z-\frac{1}{2}}$ تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{0,\frac{1}{2}\}$.

$$h(z)=\frac{z+1}{2z^2}$$

$h$ تابع تحليلي في المنطقة الداخلية للمنحني $C$ البسيطة الترابط وعلى المنحني $C$ البسيط المغلق الموجه بالاتجاه الموجب.

$z=\frac{1}{2}$ يقع داخل المنحني $C$

نستخدم صيغة كوشي التكاملية الأولى:

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}dz=\int_C \frac{h(z)}{z-\frac{1}{2}}dz=2\pi i\times h\left(\frac{1}{2}\right)=2\pi i\times\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=6\pi i$$

مكتبة A to Z

---

✓ **بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.**

**مدرس المقرر: د. أحمد عيسى**

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | امتحان مقرر تحليل عقدي 1 | اسم الطالب: |
| كلية العلوم | سنة ثالثة رياضيات | المدة: ساعتان |
| قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2023-2024م | الدرجة: تسعون |

---

**السؤال الأول: (60 درجة)**

**1)** بيّن أن التابع $u = u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ توافقي في المستوي العقدي وأوجد مرافقا توافقياً له $v$ بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في المستوي العقدي.

**2)** ليكن $f(z) = e^{3x}cos3y + ie^{3x}sin3y$ تابع معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أثبت أنّ $f$ يحقق معادلتي كوشي– ريمان في جميع نقاط المستوي العقدي، وماذا تستنتج؟
2. أوجد $\acute{f}(z)$.

**3)** ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أثبت بأنّ التابع $g(z) = \left(\frac{z}{f(z)}\right)^2$ ليس له نهاية عند الصفر.
2. أوجد معادلة القطعة المستقيمة $C$ الواصلة بين العددين $z_0 = 1$ و $z_1 = 1 + i$ ثم أوجد $\int_C f(z)dz$.
3. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ المنحني المعرف بالشكل $C: y = x + 1;\ 0 \le x \le 2$.
4. استخدم مبرهنة غرين في إيجاد التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ هو محيط المثلث الذي رؤوسه الأعداد العقدية $z_2 = 1 + 2i\,,\ z_1 = 1 + i\,,\ z_0 = i$

**4)** ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n\ge1}$ حيث $z_n = \frac{3+ni}{n+2ni}$.

**السؤال الثاني: (30 درجة)**

**1)** أوجد ناتج **اثنين** فقط مما يلي:

$$A = sh\left(\frac{5\pi}{3}i\right)\ ,\qquad B = lim_{z\to 2+i}\frac{z^2-4z+5}{z^3-z-10i}\ ,\qquad C = sh^{-1}(i)$$

**2)** ليكن $w = f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$ والمطلوب:

1. أوجد صورة $C: |z| = 1$ وفق $w = f(z)$.
2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ الدائرة التي مركزها $i$ ونصف قطرها 1.
3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{z+1}{z^3+2iz^2}dz$ حيث $C$ دائرة الوحدة.

---انتهت الأسئلة---

طرطوس: الثلاثاء 2024/2/13م — تمنياتي بالتوفيق والنجاح — مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي 1 لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

---

مكتبة A to Z

**السؤال الأول: (60 درجة)**

**1)** (12 درجة). بيّن أن التابع $u = u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ توافقي في المستوي العقدي وأوجد مرافقا توافقياً له $v$ بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في المسوي العقدي.

الحل:

- **(6 درجات)**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(معادلة لابلاس محققة)}$$

المشتقات الجزئية مستمرة في جميع نقاط المستوي العقدي وتتحقق معادلة لابلاس بالتالي الدالة $u$ توافقية في المستوي العقدي.

- **(6 درجات)**

**إيجاد المرافق التوافقي $v$**

بما أنّ التابع $f = u + iv$ تحليلي في $\mathbb{C}$ عندئذ تحقق معادلتي كوشي –ريمان أي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ldots.(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ldots.(2)$$

من (1) نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

بالتالي $v = \int (3x^2 - 3y^2)dy$

عندئذ

$$v = 3x^2y - y^3 + \varphi(x)$$

من (2) نجد:

$$-6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

بالتالي $-6xy = -6xy - \acute{\varphi}(x)$

عندئذ $\acute{\varphi}(x) = 0$

بالتالي

$$\varphi(x) = c; c \in \mathbb{C}$$
$$v = 3x^2y - y^3 + c; c \in \mathbb{C}$$

**2) (12 درجة).** ليكن $f(z) = e^{3x}cos3y + ie^{3x}sin3y$ تابع معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أثبت أنّ $f$ يحقق معادلتي كوشي- ريمان في جميع نقاط المستوي العقدي، وماذا تستنتج؟
2. أوجد $\acute{f}(z)$.

**الحلّ:**

1. **(6 درجات).**

$$u = Ref(z) = e^{3x}cos3y \ , \ v = Imf(z) = e^{3x}sin3y$$

نلاحظ بأنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}cos3y \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3e^{3x}sin3y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3e^{3x}sin3y \ , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3e^{3x}cos3y$$

نلاحظ بأنّ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ بالتالي معادلتي كوشي- ريمان محققة.

- **( 3 درجات)** المشتقات الجزئية مستمرة وتتحقق معادلتي كوشي ريمان في جميع نقاط المستوي العقدي بالتالي التابع $f$ اشتقاقي في جميع نقاط المستوي العقدي بالتالي $f$ تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي.

2. **(3 درجات)** $\acute{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = (3e^{3x}cos3y) + i(3e^{3x}sin3y) = 3f(z)$

**3) (29 درجة).** ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أثبت بأنّ التابع $g(z) = \left(\frac{z}{f(z)}\right)^2$ ليس له نهاية عند الصفر.
2. أوجد معادلة القطعة المستقيمة $C$ الواصلة بين العددين العقديين $z_0 = 1$ و $z_1 = 1 + i$، ثم أوجد

$$\int_C f(z)dz .$$

3. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ المنحني المعرف بالشكل $C: y = x + 1; \ 0 \le x \le 2$.
4. استخدم مبرهنة غرين في إيجاد التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ هو محيط المثلث الذي رؤوسه الأعداد العقدية

$$z_2 = 1 + 2i \ , \ z_1 = 1 + i \ , \ z_0 = i$$

**الحلّ:**

1. **(7 درجات)** ليكن $g(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$، لنأخذ المتتاليتين $(z_n)_{n\ge1}$ و $(w_n)_{n\ge1}$ حيث $z_n = \frac{1}{n}$ و $w_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{n}$

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow g(z_n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

مكتبة A to Z

$$w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow g(w_n) = \left(\frac{\frac{1}{n}+\frac{i}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{i}{n}}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = -1$$

نلاحظ بأنّ $-1 \neq 1$ بالتالي التابع $g(z) = \left(\frac{z}{f(z)}\right)^2$ ليس له نهاية عند الصفر.

**ملاحظة :** يمكن اثبات بأن $g(z)$ ليس له نهاية عند الصفر باستخدام طريقة المسارات.

مثلاً : المسار الأول: $y = 0;\ x \longrightarrow 0$

المسار الثاني: $y = x;\ x \longrightarrow 0$

2. **(8 درجات)**

$$C: z = z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t; 0 \le t \le 1$$
$$z = z(t) = -1 + (1 + i - 1)t = 1 + it; 0 \le t \le 1$$
$$\acute{z}(t) = i$$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 f(z(t))\acute{z}(t)dt = \int_0^1 (1-it)idt = \int_0^1 (i+t)dt = \int_0^1 tdt + i\int_0^1 dt = \frac{1}{2} + i$$

3. **(7 درجات)**

$$\int_C f(z)dz = \int_C (x - iy)(dx + idy) = (1+i)\int_0^2 \big(x - i(x+1)\big)dx = (1+i)\left(\int_0^2 xdx - i\int_0^2 (x+1)dx\right)$$

$$= (1+i)(2-4i) = 6 - 2i$$

4. **(7 درجات)**

$$\int_C f(z)dz = \int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i\int_C -ydx + xdy$$

$$= \iint_D 0dxdy + i\iint_D 2dxdy = i\int_0^1\int_1^{x+1} 2dydx = i\int_0^1 2xdx = i$$

4) **(7 درجات)**. ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n\geq 1}$ حيث $z_n = \frac{3+ni}{n+2ni}$.

$$z_n = \frac{3+ni}{n+2ni} = \left(\frac{2n^2+3n}{5n^2}\right) + i\left(\frac{n^2-6n}{5n^2}\right)$$

$$lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{5n^2} = \frac{2}{5}$$

$$lim_{n\to\infty} \frac{n^2-6n}{5n^2} = \frac{1}{5}$$

بالتالي $lim_{n\to\infty} z_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

فالمتتالية $(z_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

**السؤال الثاني: (30 درجة)**

1) **10 درجات (5 درجات لكلّ تمرين)**. أوجد ناتج اثنين فقط مما يلي:

$$A = sh\left(\frac{5\pi}{3}i\right) \quad , \quad B = lim_{z\to 2+i} \frac{z^2-4z+5}{z^3-z-10i} \quad , \quad C = sh^{-1}(i)$$



A to Z مكتبة

**الحل:**

**1)**

$A = sh\left(\frac{5\pi}{3}i\right)$ ✓

$$A = sh\left(\frac{5\pi}{3}i\right) = i\,sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = i\,sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = i\,sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$B = lim_{z\to 2+i}\frac{z^2-4z+5}{z^3-z-10i}$ ✓

$$B = lim_{z\to 2+i}\frac{z^2-4z+5}{z^3-z-10i} = \frac{0}{0}\text{ (عدم تعيين)}$$

نطبق أوبيتال

$$B = lim_{z\to 2+i}\frac{z^2-4z+5}{z^3-z-10i} = lim_{z\to 2+i}\frac{2z-4}{3z^2-1} = lim_{z\to 2+i}\frac{2i}{8+12i} = \frac{i}{4+6i} = \frac{3+2i}{26} = \frac{3}{26}+\frac{i}{13}$$

$C = sh^{-1}(i)$ ✓

$$sh^{-1}(z) = \ell og\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$$

$$C = sh^{-1}(i) = \ell og\left(i+\sqrt{i^2+1}\right) = \ell og(i) = \ln(|i|) + i(Arg(i)+2\pi k)$$
$$= \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) = i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right); k\in\mathbb{Z}$$

مكتبة A to Z

**2) (20 درجة).** ليكن $w = f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$ والمطلوب:

1. أوجد صورة $C: |z| = 1$ وفق $w = f(z)$.
2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ الدائرة التي مركزها $i$ ونصف قطرها 1.
3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{z+1}{z^3+2iz^2}dz$ حيث $C$ دائرة الوحدة.

**3) الحلّ:**

1. **(8 درجات).**

$$w = f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$$

بالتالي:

$$z = \frac{2iw-1}{1-w}$$

$$\left|\frac{2iw-1}{1-w}\right| = 1$$

بالتالي

$$|2iw-1| = |1-w|$$

نضع $w = u+iv$ نجد:

$$|2i(u+iv)-1| = |1-(u+iv)|$$
$$|-1-2v+2ui| = |1-u-iv|$$

بالتالي:

$$(-1-2v)^2+(2u)^2 = (1-u)^2+(-v)^2$$

بالتالي $\left(u+\frac{1}{3}\right)^2+\left(v+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

صورة دائرة الوحدة وفق $w = f(z)$ هي دائرة مركزها $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2. **(4 درجات).** $C$ منحني بسيط مغلق موجه بالاتجاه الموجب، والدالة $f$ تحليلية في $\mathbb{C}\backslash\{-2i\}$ فهي تحليلية داخل المنحني $C$ (منطقة بسيطة الترابط) وعلى محيطه بالتالي حسب مبرهنة كوشي نجد $\int_C f(z)dz = 0$

3. **(8 درجات).** التابع المكامل هو $\frac{z+1}{z^3+2iz^2} = \frac{f(z)}{z^2}$ تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{0, -2i\}$.

$$f^{(1)}(z) = \frac{-1+2i}{(z+2i)^2}$$

$f$ تابع تحليلي في المنطقة الداخلية للمنحني $\boldsymbol{C}$ البسيطة الترابط وعلى المنحني $\boldsymbol{C}$ البسيط المغلق الموجه بالاتجاه الموجب.

$\boldsymbol{C}$ يقع داخل المنحني $z = 0$

$n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1$

نستخدم صيغة كوشي التكاملية الثانية:

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}dz = \frac{2\pi i \times f^{(1)}(0)}{1!} = 2\pi i \times \frac{(-1+2i)}{-4} = \pi + \frac{\pi}{2}i$$

---

✓ **بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.**

**مدرس المقرر: د. أحمد عيسى**

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل عقدي 1
سنة ثالثة رياضيات
الدورة الفصلية الثانية- العام الدراسي 2022-2023م

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: تسعون

---

**السؤال الأول: (56 درجة)**

**1)** بيّن أن التابع $u = u(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ توافقي في $\mathbb{C}$ وأوجد مرافقاً توافقياً له $v$ بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في $\mathbb{C}$.

**2)** ليكن $f(z) = (2e^x cosy) + i(2e^x siny)$ تابع معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أوجد $u = Ref(z)$ و $v = Imf(z)$ ، ثمّ أوجد صورة المستقيم $x = 0$ وفق $f$.
2. أثبت أنّ $f$ يحقق معادلتي كوشي- ريمان في جميع نقاط المستوي العقدي، وماذا تستنتج؟
3. أوجد $\acute{f}(z)$.

**3)** ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. ماذا تمثل المجموعة $E = \{z\,; z \in \mathbb{C} \;\&\; |Im(f(z))| > 0\}$ في المستوي العقدي.
2. أثبت بأنّ التابع $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ ليس له نهاية عند الصفر.
3. أوجد المحل الهندسي للنقاط $M(z)$ الممثلة بالمعادلة $|z - i|^2 = Re(f(z))$.
4. أوجد معادلة القطعة المستقيمة $C$ الواصلة بين العددين $z_0 = 1$ و $z_1 = 1 + i$ ثم أوجد $\int_C f(z)dz$.

**4)** ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n\geq 1}$ حيث $z_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$.

**السؤال الثاني: (34 درجة)**

**1)** أوجد ناتج ما يلي:

$$A = Log(1+i) \quad , \quad B = lim_{z\to i}\frac{z^8 - 1}{z^4 - 1} \quad , \quad C = sh^{-1}(i)$$

**2)** ليكن $f(z) = e^z + 1$ تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أوجد قيمة التكامل $\int_\gamma f(z)dz$ حيث $\gamma$ دائرة الوحدة والموجّه بالاتجاه الموجب.
2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ المنحني المعرف بالشكل $C: y = 2;\ 0 \leq x \leq 1$.
3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z}dz$ حيث $C$ دائرة موجّه بالاتجاه الموجب مركزها $z = 0$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$.
4. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^3}dz$ حيث $C$ دائرة موجّه بالاتجاه الموجب مركزها $z = 0$ ونصف قطرها 2.

---انتهت الأسئلة---

**تمنياتي بالتوفيق والنجاح**

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

A to Z

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي 1 لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الدورة الفصلية الثانية– العام الدراسي 2022–2023م

الدرجة: تسعون

---

**السؤال الأول: (56 درجة)**

**1) (12 درجة)**. بيّن أن التابع $u = u(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ توافقي في $\mathbb{C}$ وأوجد مرافقاً توافقياً له $v$ بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في $\mathbb{C}$.

الحلّ:

- (6 درجات)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(معادلة لابلاس محققة)}$$

المشتقات الجزئية مستمرة في جميع نقاط المستوي العقدي وتتحقق معادلة لابلاس بالتالي الدالة $u$ توافقية في المستوي العقدي.

- (6 درجات)

**إيجاد المرافق التوافقي $v$**

بما أنّ التابع $f = u + iv$ تحليلي في $\mathbb{C}$ عندئذ تحقق معادلتي كوشي –ريمان أي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots.(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ldots.(2)$$

من (1) نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

بالتالي $v = \int 2x dy$

عندئذ

$$v = 2xy + \varphi(x)$$

من (2) نجد:

$$-2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$



A to Z

بالتالي $-2y = -2y - \acute{\varphi}(x)$ عندئذ $\acute{\varphi}(x) = 0$ بالتالي

$$\varphi(x) = c; c \in \mathbb{C}$$

$$v = 2xy + c; c \in \mathbb{C}$$

**2) (17 درجة)**. ليكن $f(z) = (2e^x cosy) + i(2e^x siny)$ تابع معرف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أوجد $u = Ref(z)$ و $v = Imf(z)$ ، ثمّ أوجد صورة المستقيم $x = 0$ وفق $f$. **(6 درجات)**
2. أثبت أنّ $f$ يحقق معادلتي كوشي- ريمان في جميع نقاط المستوي العقدي، وماذا تستنتج؟**(8 درجات)**
3. أوجد $\acute{f}(z)$. **(3 درجات)**

**الحلّ:** $f(z) = (2e^x cosy) + i(2e^x siny)$

1. $u = Ref(z) = 2e^x cosy$ , $v = Imf(z) = 2e^x siny$ ..... (درجتان)
   - **(4 درجات)** نعوض $x = 0$ نجد $u = 2cosy$ و $v = 2siny$ نلاحظ أنّ $u^2 + v^2 = 4$ بالتالي صورة المستقيم $x = 0$ هي دائرة مركزها $O$ ونصف قطرها 2 في المستوي $Ouv$.
2. **(6 درجات)** نلاحظ بأنّ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x cosy\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x siny$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x siny\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x cosy$$

نلاحظ بأنّ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ بالتالي معادلتي كوشي- ريمان محققة.

- **(درجتان)** المشتقات الجزئية مستمرة وتتحقق معادلتي كوشي- ريمان في جميع نقاط المستوي العقدي بالتالي التابع $f$ اشتقاقي في جميع نقاط المستوي العقدي بالتالي $f$ تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي.

3. $\acute{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = (2e^x cosy) + i(2e^x siny) = 2e^z = f(z)$ ..... (3 درجات)

**3) (23 درجة)**. ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرّف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. ماذا تمثل المجموعة $E = \{z\,; z \in \mathbb{C}\ \&\ |Im(f(z))| > 0\}$ في المستوي العقدي. **(2 درجات)**
2. أثبت بأنّ التابع $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ ليس له نهاية عند الصفر. **(5 درجات)**
3. أوجد المحل الهندسي للنقاط $M(z)$ الممثلة بالمعادلة $|z - i|^2 = Re(f(z))$. **(6 درجات)**
4. أوجد معادلة القطعة المستقيمة $C$ الواصلة بين العددين $z_0 = 1$ و $z_1 = 1 + i$ ثم أوجد $\int_C f(z)dz$. **(10 درجات)**

**الحلّ:**

1. تمثل المجموعة

$$E = \{z\,; z \in \mathbb{C}\ \&\ |Im(f(z))| > 0\} = \{z\,; z \in \mathbb{C}\ \&\ |Im(\bar{z})| > 0\} = \{z = x + iy\,;\ |y| > 0\}$$

جميع نقاط المستوي العقدي ماعدا المحور الحقيقي

$E$ ليست منطقة لأنها ليست مجموعة مترابطة

2. ليكن $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$، لنأخذ المتتاليتين $(z_n)_{n\geq 1}$ و$(w_n)_{n\geq 1}$ حيث $z_n = \frac{1}{n}$ و $w_n = \frac{i}{n}$

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow g(z_n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{1}$$

$$w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow g(w_n) = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{-1}$$

نلاحظ بأنّ $-1 \neq 1$ بالتالي التابع $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ ليس له نهاية عند الصفر.

A to Z

**طريقة ثانية:** $g(z)=\frac{\bar{z}}{z}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}i$

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\qquad v(x,y)=-\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

الدالة $u(x,y)$ ليس لها نهاية عند $(0,0)$ من خلال أخذ المسارين المختلفين:

المسار الأول: $y=0, x\longrightarrow 0$

المسار الثاني: $x=0, y\longrightarrow 0$

كذلك $v(x,y)$ ليس لها نهاية عند$(0,0)$ من خلال أخذ مسارين مختلفين مثلاً

المسار الأول: $y=2x;\ x\longrightarrow 0$

المسار الثاني: $y=x;\ x\longrightarrow 0$

نستنتج بأن التابع $g(z)=\frac{\bar{z}}{z}$ ليس له نهاية عند الصفر.

3. نضع $z=x+iy$ في العلاقة $|z-i|^2=Re(f(z))$ نجد $|x+i(y-1)|^2=Re(f(z))=x$

$$x^2+(y-1)^2=x$$
$$x^2-x+(y-1)^2=0$$

نتمم إلى مربع كامل نجد: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$ المحل الهندسي هو عبارة عن دائرة مركزها $\left(\frac{1}{2},1\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{1}{2}$.

4.

$$C: z=z(t)=z_0+(z_1-z_0)t;\ 0\le t\le 1$$
$$z=z(t)=1+(1+i-1)t=1+it;\ 0\le t\le 1$$
$$\acute{z}(t)=i$$
$$\int_C f(z)dz=\int_0^1 f(z(t))\acute{z}(t)dt=\int_0^1(1-it)idt=\int_0^1 t+idt=\int_0^1 tdt+i\int_0^1 dt=\frac{1}{2}+i$$

**طريقة ثانية للحلّ:** معادلة القطعة ديكارتياً $x=1$ و $y\in[0,1]$

$$\int_C f(z)dz=\int_C(x-iy)(dx+idy)=\int_0^1(1-iy)idy=i\int_0^1 dy+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}+i$$

**4) (4 درجات)**. ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n\ge1}$ حيث $z_n=\frac{(1+i)^n}{2^n}$.

$$z_n=\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

المتتالية الهندسية $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ متقاربة من الصفر لأنّ $\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$

## السؤال الثاني: (34 درجة)

**1) 12 درجة (4 درجات لكلّ تمرين)**. أوجد ناتج ما يلي:

$$A=Log(1+i)\ ,\qquad B=lim_{z\to i}\frac{z^8-1}{z^4-1}\ ,\qquad C=sh^{-1}(i)$$

**الحل:**

**(1**

$A=Log(1+i)$ ✓

$$A = \ln(|1+i|) + i(Arg(1+i)) = \ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4})$$

$\boldsymbol{B = lim_{z\to i}\ \frac{z^8-1}{z^4-1}}$ ✓

$$B = lim_{z\to i}\ \frac{z^8-1}{z^4-1} = \frac{0}{0}\ (\text{عدم تعيين})$$

نطبق أوبيتال

$$B = lim_{z\to i}\ \frac{z^8-1}{z^4-1} = lim_{z\to i}\ \frac{8z^7}{4z^3} = lim_{z\to i}\ 2z^4 = 2$$

$\boldsymbol{C = sh^{-1}(i)}$ ✓

$$sh^{-1}(z) = \ell og\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$

$$\boldsymbol{C} = sh^{-1}(i) = \ell og\left(i + \sqrt{i^2+1}\right) = \ell og(i) = \ln(|i|) + i(Arg(i) + 2\pi k) = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$
$$= i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); k \in \mathbb{Z}$$

**2) (22 درجة).** ليكن $f(z) = e^z + 1$ تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أوجد قيمة التكامل $\int_\gamma f(z)dz$ حيث $\gamma$ دائرة الوحدة والموجّه بالاتجاه الموجب. **(5 درجات)**
2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ المنحني المعرف بالشكل $C: y = 2;\ 0 \le x \le 1$. **(5 درجات)**
3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z}dz$ حيث $C$ دائرة موجّه بالاتجاه الموجب مركزها $z = 0$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$. **(5 درجات)**
4. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^3}dz$ حيث $C$ دائرة موجّه بالاتجاه الموجب مركزها $z = 0$ ونصف قطرها 2. **(7 درجات)**

**الحلّ**

1. $\gamma$ دائرة الوحدة ( منحني بسيط مغلق موجه بالاتجاه الموجب) والدالة $f$ تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي فهي تحليلية داخل دائرة الوحدة (منطقة بسيطة الترابط) وعلى محيطها بالتالي حسب مبرهنة كوشي نجد $\int_\gamma f(z)dz = 0$
2. $\int_C f(z)dz = \int_C (e^z+1)dz = \int_C (1 + e^x cosy + ie^x siny)(dx + idy)$

$$= \int_C (1 + e^x cos2 + ie^x sin2)dx = \int_0^1 (1 + e^x cos2 + ie^x sin2)dx = \int_0^1 1 + (cos2 + isin2)e^x dx$$
$$= \int_0^1 1 + e^{2i}e^x dx = \int_0^1 dx + e^{2i}\int_0^1 e^x dx = 1 + e^{2i}(e-1)$$

**طريقة ثانية للحلّ:**

بداية المنحني هو العدد العقدي $2i$

نهاية المنحني هو العدد العقدي $1+2i$

$$\int_C f(z)dz = \int_{2i}^{1+2i} (e^z+1)dz = [e^z + z]_{2i}^{1+2i} = e^{1+2i} + 1 + 2i - e^{2i} - 2i = 1 + e^{2i}(e-1)$$

3.

التابع المكامل $\frac{f(z)}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

$f$ تابع تحليلي في المنطقة الداخلية للمنحني $\boldsymbol{C}$ البسيطة الترابط وعلى المنحني $\boldsymbol{C}$ البسيط المغلق الموجه بالاتجاه الموجب.

$z = 0$ يقع داخل المنحني $\boldsymbol{C}$

نستخدم صيغة كوشي التكاملية الأولى.

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \times f(0) = 4\pi i$$

.4

التابع المكامل $\frac{f(z)}{(z-i)^3}$ تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{i\}$.

$$f(z) = e^z + 1 \Rightarrow f^{(1)}(z) = e^z, \qquad f^{(2)}(z) = e^z$$

$f$ تابع تحليلي في المنطقة الداخلية للمنحني $\boldsymbol{C}$ البسيطة الترابط وعلى المنحني $\boldsymbol{C}$ البسيط المغلق الموجه بالاتجاه الموجب.

$z = i$ يقع داخل المنحني $\boldsymbol{C}$

$$n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$$

نستخدم صيغة كوشي التكاملية الثانية.

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i \times f^{(2)}(i)}{2!} = e^i \pi i$$

---

✓ **بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.**

**مدرس المقرر: د. أحمد عيسى**

تصحيح المقرر د. أشرف دراج

A to Z

مكتبة A to Z