كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثالثة

اسئلة دوراة محلولة

جبر المنطق

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

مكتبة A to Z

جامعة حلب
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول:

$$F_n > \frac{2(2-0)}{0.6} = \frac{4}{0.6} = 6.66$$ وبالتالي $n = 5$

[1] نعرف الدالة f دالة الهوف كما وردت في نص السؤال [2] [3] [4]

$n=5$ (5)

$d = b - a = 2$ (5)

$n=5$ ، $k=1$

$$d = 2\frac{F_4}{F_5} = 2\frac{5}{8} = 1.25$$ (5)

$$\begin{cases} x_1 = b - d = 2 - 1.25 = 0.75 \\ x_2 = a + d = 0 + 1.25 = 1.25 \end{cases}$$

$$f(x_1) = f(0.75) = -24.33$$
$$f(x_2) = f(1.25) = -18.65$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$a = a$ ، $b = x_2 = 1.25$

والمجال المبرهن هو $[0, 1.25]$ (5)

ونكمل تكرار الخوارزمية حتى تحقق الشرط (5)

السؤال الثاني:

$$X_{k+1} = X_k - [H]^{-1}\nabla f$$ (5)

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$ (5)

$$\nabla f(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 + 4 \end{bmatrix}$$ (5)

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$ (5)

$$\nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ (5)

ونكمل التكرار حتى الوصول

p	q	r	$q \to r$	$q \downarrow r$	$p \uparrow (q \to r)$	$p \wedge (q \downarrow r)$	$B \oplus C$
T	T	T	T	F	F	F	F
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T	F	T
F	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	F	F

B ≡ C

السؤال الأول:

(10)

السؤال الثاني: • الإخاده: $A(x,y)$ تمثل $x \geqslant y$ تحول إلى عبارة منطقية

باضافة اسكمات الوجود والشمول:

(10)

$$(\forall x,y \in \mathbb{R})[A(x,y)]$$

• العبارة المنطقية هي:

$$(\forall x,y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{R})(z = \sqrt{x^2+y^2})$$

(5) العبارة المنطقية السابقة تكافئ استدلال كاذب التربيعي لجمع وبين كدرية صحيح هو كدد حقيقي

$$(\exists x,y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{R})(z \neq \sqrt{x^2+y^2})$$

(5) النفي: $\equiv$ هي تناقض.

السؤال الثالث: • الحالة $A \to B \equiv T$ تكون صحيحة دائما $\frac{A}{\therefore B}$

G	H	$G \wedge H$	$(G \wedge H) \to G$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

او أ- اذا كان $\frac{G \wedge H}{\therefore G}$ صحيح.

(10)

مكتبة A to Z

السؤال الثالث:

$f(x)$ أعطى

$x \in [a,b]$

$x_2 = a + r(b-a)$ ①

$b - x_1 = r(b-a)$ ②

$d_2 = x_1 - a = x_2 - x_3$ ③

$x_1 - a = r(x_2 - a)$ ④

$x_2 - x_3 = r(x_2 - a)$ ⑤

$x_2 - a = d_1$ ، $x_1 - a = d_2$ حيث $d_2 = r d_1$

$d_{n+1} = r d_n$

بعد التوقف، الحل هو:

$(b-a)(1-r-r^2) = 0$

$1 - r - r^2 = 0$ ①

$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ، $r = 0.618$ الجواب المطلوب

الخطوات:

① نرسم $f(x)$

② $d = b - a$

③ $d = d \cdot r$

④ $x_1 = b - d$ ، $x_2 = a + d_1$

⑤ إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ فإن $a = x_1$، $b = x_2$

⑥ نتوقف إذا كان $b - a < \varepsilon$ وإلا نعود إلى الخطوة 2

مثال: $f(x) = e^{-x} - \cos x$

مكتبة A to Z

$P \to q,\ q \to r,\ \neg r$ / $\therefore \neg P$ — طريقة: البرهان غير المباشر

$P \to q,\ q \to r,\ \neg r$ / $\therefore P \to r,\ \neg r$ / $\therefore \neg P$ — الطريقة: البرهان المباشر

السؤال الرابع:

$\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$

$(a.b) + (\bar{a} + \bar{b})$

$= (\bar{a} + \bar{b} + a).(\bar{a} + \bar{b} + b) = (\bar{a} + a + \bar{b}).(a + \bar{b} + b) =$

$= (1 + \bar{b}).(a + 1) = 1.1 = 1$

$(a.b).(\bar{a} + \bar{b}) = (a.b\bar{a}) + (ab.\bar{b}) = 0 + 0 = 0$

$a = a + 0 = a + a\bar{a} = (a + a).(a + \bar{a})$

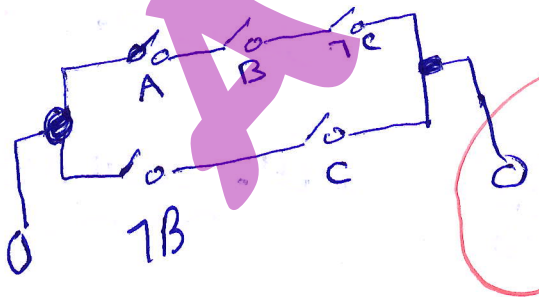
$= (a + a).1 = a + a$

السؤال الخامس: صمم دارة كهربائية

$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee [(A \vee \neg A) \wedge (\neg B \wedge C)] = (A \wedge B \wedge \neg C) \vee [T \wedge (\neg B \wedge C)]$

$= (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$



A to Z مكتبة

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

مقرر جبر المنطق
الدرجة : تسعون
السنة الثالثة رياضيات
الدورة الفصلية الثانية
24-8-2025

السؤال الأول: (15) درجة

- برهن أن $(p \uparrow q) \downarrow r \not\equiv p \uparrow (q \downarrow r)$
- نظم جدول الحقيقة للعبارة المنطقية التالية

$$A \equiv [p \leftrightarrow (q \rightarrow r)] \oplus [(p \leftrightarrow) \downarrow r]$$

السؤال الثاني: (10) درجة

بين فيما إذا كانت المحاكمة المنطقية التالية صحيحة أم لا $\frac{\neg p \rightarrow q, \neg q \rightarrow \neg r, \neg p \vee r, \neg r}{\therefore \neg q}$

السؤال الثالث : (15) درجة

أوجد مجموعة الصواب للإفادة $A(x,y,z)$ التي تمثل

$$(x^2 - 5)(y^2 + z^2 + 1) \geq 0$$

و أوجد قيمة الحقيقة للعبارة المنطقية التالية ثم أوجد نفيها

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[(x.y < 0) \rightarrow A(x,y,x)]$$

السؤال الرابع: (10) درجة

نرمز لمجموعة قواسم العدد 12 بالرمز $D(12)$، أنشئ مخطط هاس ل $D(12)$ مع علاقة يقسم $|$. هل $(D(12), |)$ تمثل شبكة بولينية.

السؤال الخامس: (10) درجة

في جبر بول $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ أثبت تحقق خاصيتي اللانمو $\forall a \in B \Rightarrow (a + a = a)$ و الامتصاص $\forall a, b \in B \Rightarrow (a + ab = a)$

السؤال السادس: (15) درجة

أوجد العبارة البولينية الأصغرية للتابع البولياني

$$f(a,b,c,d) = ab\bar{c} + \bar{b}cd + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + ab\bar{c}d + abcd$$

السؤال السابع: (15) درجة

صمم و بسط دارة كهربائية سلوكها موضح بالجدول التالي:

A	B	C	??
t	t	t	f
t	t	f	f
t	f	t	t
t	f	f	t
f	t	t	t
f	t	f	f
f	f	t	f
f	f	f	t

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح
د. ديانا احمد
طرطوس 24-8-2025

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح مقترح لورقة العمل
السنة الخامسة التأسيسي
الدرجة العظمى: 90

السؤال الأول:

p	q	r	p∧q	p∧(q∨r)	q∨r	p∧(q∨r)
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F

(7)

نلاحظ من جدول الحقيقة عدم تطابق القيم المتقابلة للعبارتين التاليتين

$p \uparrow (q \downarrow r) \not\equiv (p \uparrow q) \downarrow r$ (1)

p	q	r	q→r	p↔(q→r)	p↔q	(p↔q)↓r	A
T	T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F	F

(7)

$A \equiv [p \leftrightarrow (q \to r)] \oplus [(p \leftrightarrow q) \downarrow r]$

السؤال الثاني:

$\neg p \to q, \neg q \to r, \neg p \vee r \vee r$
$\therefore \neg p \to q, \neg q \to r, \neg p$ (5)
$\therefore \neg q \to r, q$ (5)
$\therefore q$

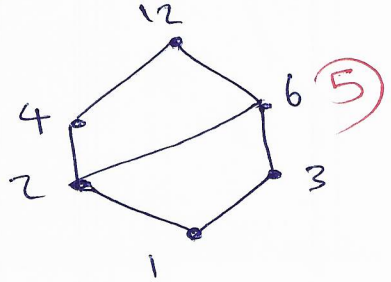
السؤال الثالث: تحديد الصواب:

(5) $S = \{(x,y,z), x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{N}\}$
$J =]-\infty, -5[\cup]5, +\infty[$

(5) $A(1,-2,1) = -24 < 0$
والباقي لا يحقق المتباينة فهي خاطئة

(5) $(\exists x,y,z \in \mathbb{R})[(x,y,z) \in A]$ الصحيح

السؤال الرابع:



(5)

البيانات المستويانية هي 2 مثلاً لـ

(5) لم تتم

السؤال الثاني:

$\forall a \in B: \quad a + a = a + a \cdot \bar{a} = (a+a)\cdot(a+\bar{a})$ (5)

$= (a+a) \cdot 1 = a + a$

$\forall a,b \in B: \quad a + ab = (a \cdot 1) + (ab) = a \cdot (1+b) = a \cdot 1 = a$ (5)

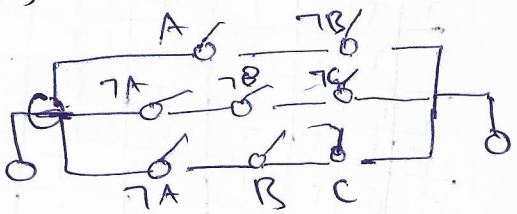
السؤال الثالث:

$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$ (10)

$\vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

$= [(A \wedge \neg B) \wedge C] \vee [(A \wedge \neg B) \wedge \neg C] \vee [\neg A \wedge B \wedge C] \vee [\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C]$

$= [(A \wedge \neg B) \wedge (C \vee \neg C)]$ (10)



(10)

درجة الطالب

24.8.2025

A to Z

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح مقرر المنطق
امتحان الدورة الصيفية الأولى
سنة ثالثة رياضيات

السؤال الثاني: ①

$\inf(A_1, A_2) = A_1 \cap A_2$ (3) درجات

$\sup(A_1, A_2) = A_1 \cup A_2$ (3) درجات

$\forall A_1, A_2 \in P(X)$: $\inf(A_1, A_2), \sup(A_1, A_2) \in P(X)$

إذاً $(P(X), \subseteq, \cup, \cap)$ بنية بولية. علماً أن التقاطع والاجتماع لا تتوزع على الآخر

(3) $0 = \phi$ درجات

(3) $1 = X$ درجات

نتيجة:

$\forall A \in P(X)$: $A \cap \phi = \phi$

$\forall A \in P(X)$: $A \cup A = A$

$\forall A \in P(X)$ (3) $\bar{A} = X \setminus A$ درجات حيث: $A \cap \bar{A} = \phi$

$A \cup \bar{A} = X$

② $(T, \leq, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ بنية بولية، $\bar{a}$ متمم a أثبت:

$x \leq \bar{a}$ حاله: $x \wedge a = 0$

البرهان: إنه $y \leq z$ وعلاقة $y \leq y$ حيث y عنصر ما $\Rightarrow y \leq z$ حتماً

بالتالي $y \leq (y \wedge z)$ ولكن $(y \wedge z) \leq y$ إذاً

(5) درجات $\boxed{y \wedge z = y}$

الآن: نفرض $x \leq \bar{a}$ إذاً $x \wedge \bar{a} = x$، بالتالي:

$x \wedge a = (x \wedge \bar{a}) \wedge a = x \wedge (\bar{a} \wedge a) = x \wedge 0 = 0$ (5) درجات

Ato Z

السؤال الثالث:

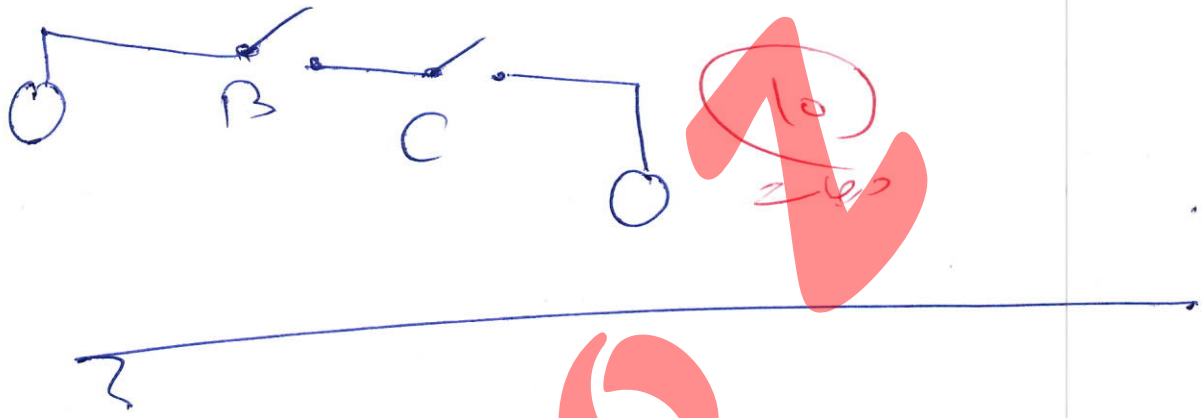
$$(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

$$\equiv [A \wedge (B \wedge C)] \vee [\neg A \wedge (B \wedge C)]$$

$$\equiv (B \wedge C) \wedge (A \vee \neg A) \equiv (B \wedge C) \wedge T$$

$$\equiv B \wedge C$$

١٥ درجة



١٥ درجة

A to Z

السؤال الأول: $A \equiv [(P \to (q \to r))] \oplus [(P \leftrightarrow q) \uparrow r]$

①

P	q	r	$q \to r$	B	$P \leftrightarrow q$	C	$B \oplus C$
T	T	T	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	F
T	T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	F

10 درجات

عندما $A \equiv F$ فإن $(q \equiv F, P \equiv T)$ أو $(q \equiv T, P \equiv F)$ أو $(q \equiv F, P \equiv F)$ — 5 درجات

② $A(1,0) \equiv F$ (5 درجات) ، $A(0,0) \equiv T$ (5 درجات)

$(\forall x, y \in \{0,1,2\})[(x = y) \to A(x,y)]$

النفي:

$(\exists x, y \in \{0,1,2\}) \neg [(x = y \to A(x,y)]$

$\equiv (\exists x, y \in \{0,1,2\}) [(x = y) \wedge \neg A(x,y)]$

5 درجات

③ P: حصلت على الحرف الأول.

q: أساعد الأم بالطبخة وطبخي.

r: ينومه والدي بكاليف الم.

S: أغير اهتماماتي

الخطوة: (5) مبرر

$P \rightarrow q, r \rightarrow q, q \rightarrow s \therefore r \rightarrow s$

الخطوة: مبرر

$P \rightarrow q, r \rightarrow q, q \rightarrow s \therefore P \rightarrow q, r \rightarrow q$

الخطوة: (6) مبرر

$P \rightarrow q, r \rightarrow q \therefore (P \vee r) \rightarrow q$

$\therefore \neg(P \vee r)$

$\therefore r \rightarrow s$

A to Z

الجمهورية العربية السورية	مقرر جبر المنطق	المدة: ساعتان
جامعة طرطوس	س3 رياضيات	امتحان الدورة التكميلية
كلية العلوم	الدرجة العظمى: تسعون	2-2-2025

السؤال الأول: (45 درجة): أجب عن الأسئلة التالية

1)) نظم جدول الحقيقة للعبارة المنطقية A:

$$A \equiv [p \to (q \to r)] \bigoplus [(p \leftrightarrow q) \uparrow r]$$

و أوجد قيم الحقيقة ل p، q معا عندما $A \equiv F$.

2)) في مجموعة التعويض $\{0\ 1,2\}^2$ نعرف الإفادة $A(x,y)$ التي تمثل $x^2 + 2y = 2y^2$.

اعط مثالا يكون فيه $A(x,y) \equiv F$، و مثالا يكون فيه $A(x,y) \equiv T$.

أوجد نفي العبارة المنطقية التالية:
$(\forall x, y \in \{0,1,2\})[(x = y) \to A(x,y)]$

3)) رمز المحاكمة المنطقية التالية و تحقق من صحتها:
إذا حصلت على المركز الأول، أسافر لأمريكا لمتابعة دراستي و إذا أمن والدي تكاليف السفر، أسافر لأمريكا لمتابعة دراستي، و إذا سافرت لأمريكا لمتابعة دراستي، أغير اختصاصي و أنا لا أغير اختصاصي.
إذا أنا لا أحصل على المركز الأول و لا يؤمن والدي تكاليف السفر.

السؤال الثاني: (25 درجة):

1)) بفرض أن $X \neq \phi$ مجموعة غير خالية. نعرف على $P(X)$ أسرة المجموعات الجزئية من X علاقة الاحتواء $\subseteq$. أوجد $inf(A_1, A_2)$ ، $sup(A_1, A_2)$ حيث $A_1, A_2 \in P(X)$. هل $(P(X), \subseteq)$ شبكة بولیانية؟(ملاحظة: لا حاجة لاثبات توزيعية التقاطع و الاجتماع كل منهما على الاخر)

2)) في الشبكة بولیانية $(T, \leq, \vee, \wedge, 0, 1)$ ان $\vee, \wedge$ تجميعيان برهن صحة مايلي:
١)) اذا كان $y \leq z$ فان $y \wedge z = y$
٢)) اذا كان $x \leq \bar{a}$ فإن $x \wedge a = 0$

السؤال الثالث: (20 درجة):
صمم و بسط دارة كهربائية سلوكها موضح بالجدول.

A B C circuit

on on on	on
on on off	off
on off on	off
on off off	off
off on on	on
off on off	off
off off on	off
off off off	off

مع تمنياتي بالتوفيق
د. ديانا احمد

جامعة طرابلس
قسم رياضيات

سلم التصحيح مقرر جبر المنطق
الدور التكميلي 17-9-2024

السؤال الأول: إثبات أن المجموعة $\{\neg, \wedge\}$ مستقلة:

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

$$p \oplus q \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg[\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)]$$

السؤال الثاني: تكون الحاكمة المنطقية من مقدمة p ونتيجة q أي بالرمز $\frac{p}{q}$ وتكون صحيحة عندما يكون الاقتضاء $p \Rightarrow q$ صحيحا أي عندما تكون العبارة المنطقية $p \to q$ صحيحة دوما أي تحصيل حاصل.

G	H	G ∧ H	(G ∧ H) → G
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

$(G \wedge H) \to G \equiv T$

، الحاكمة صحيحة

السؤال الثالث: مثال لمدار منطقي $x+y=z$ حيث $(x,y,z) \in \mathbb{R}$.

$\forall x,y,z \in \mathbb{R} : P(x,y,z) \equiv x+y=z$

عبارة منطقية صادقة

السؤال الرابع: (أ) الكل الأستاذ: {b, c, d, g}

(ب) الكل الأستاذ: {a, e, f, h}

(ج) $(a \wedge c) \vee (a \wedge d) = a \wedge (c \vee d)$ ، $0 \vee 0 = 0$ ، $a \wedge b = 0$ } حسب حالات الكلية

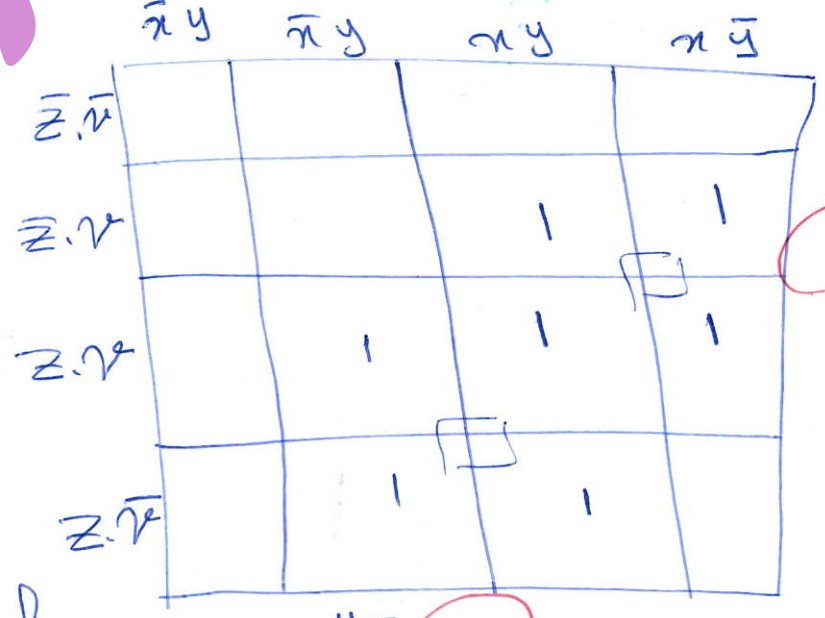
السؤال الخامس:

$$\overline{(a+b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{a \cdot b} + (a+b) = (a+b+\bar{a}) \cdot (a+b+\bar{b}) = (1+b) \cdot (1+a) = 1$$

$$\overline{a \cdot b} \cdot (a+b) = [(a+b) \cdot \bar{a}] \cdot \bar{b} = [a \cdot \bar{a} + b\bar{a}] \cdot \bar{b} = (0 + b\bar{a}) \cdot \bar{b} = 0 + b\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$

السؤال السادس: سيبقى هيئة الأغوار سيبقى أنه الحرف موجودة أصلاً نطلق مجموع صدد أصغرة نطبع حضة الأغوار لهذه العبارة بالشكل:



$f = xz + yz$ (5)

(10)

(5)

(5)

(5)

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح مقرر حبر الخطأ
السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى: 26/2/2024

السؤال الأول: (40 درجة)

(1) أ) باستخدام جدول الحقيقة:

p	q	$p\uparrow q$	$p\downarrow q$	$(p\uparrow q)\oplus(p\downarrow q)$
T	T	F	F	F
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	F

⑤

عندما $p\equiv T$, $q\equiv F$ فإن قيمة الحقيقة لـ $A\equiv(p\uparrow q)\oplus(p\downarrow q)$ هي $A\equiv T$.

⑤ الاحتمال: هنالك طريقتان لإيجاد الجدول المبارك المبارك A مختصرة لا تعتمد على جدول قيم الحقيقة للعبارة $p\oplus q$ وهي:

الطريقة الأولى: $A\equiv p\oplus q$

الطريقة الثانية: $A\equiv[\neg(p\uparrow q)\vee(p\downarrow q)]\wedge\neg[(p\uparrow q)\vee(p\downarrow q)]$

(إذا علمت أن: $p\uparrow q\equiv\neg p\vee\neg q$ و $p\downarrow q\equiv\neg p\wedge\neg q$)

$$\begin{aligned}
A &\equiv [\neg(p\uparrow q)\vee(p\downarrow q)]\wedge\neg[(p\uparrow q)\vee(p\downarrow q)]\\
&\equiv [(p\wedge q)\vee\neg(p\vee q)]\wedge\neg[(p\wedge q)\vee\neg(p\vee q)]\\
&\equiv [p\wedge q\vee\neg p\wedge\neg q]\wedge\neg[p\wedge q\vee\neg p\wedge\neg q]\\
&\equiv F\wedge\neg F\\
&\equiv F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p\oplus q &\equiv (p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)\\
&\equiv (p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\\
&\equiv [p\wedge(\neg p\vee\neg q)]\vee[q\wedge(\neg p\vee\neg q)]\\
&\equiv (p\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)\vee(q\wedge\neg q)\\
&\equiv F\vee(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)\vee F\\
&= (p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &\equiv [\neg(p\uparrow q)\vee(p\downarrow q)]\wedge\neg[(p\uparrow q)\vee(p\downarrow q)]\\
&\equiv [(p\wedge q)\vee\neg(p\vee q)]\wedge\neg[(p\wedge q)\vee\neg(p\vee q)]\\
&\equiv [p\wedge q\vee\neg p\wedge\neg q]\wedge\neg[p\wedge q\vee\neg p\wedge\neg q]\\
&\equiv F\wedge\neg F\\
&\equiv F
\end{aligned}$$

ثانياً: (1) $\mathcal{P}$: نسلك الاقتران طريقة

q: الإقناع

p: الحكمة

$$\frac{p\to q,\ q}{\therefore p}$$

③

p	q	$p\to q$	$\neg q\vee(p\to q)$	$\neg p\to(\neg q\vee(p\to q))$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

مكتبة A to Z

لاحظ أنه الاقتضاء : $[(p\to q)\wedge q]\Rightarrow p$ خاطئ لأنه $[(p\to q)\wedge q]\longrightarrow p$

ليس استدلالاً.

p : رزق بابن.
q : الصدقة تزيل الفقر
r : آخذ سليم مواظب على الصدقة

$$\left.\begin{array}{l}p\to q,\ q\to r,\ \neg r\\ \hline \therefore p\end{array}\right\}$$ الثانية: ⑤ ، هذا الاقتضاء صحيح

$$\frac{p\to q,\ q\to r,\ \neg r}{\therefore p\to r,\ \neg p}$$ ④

$$\frac{p\to q,\ q\to r,\ \neg r}{\therefore \neg p}$$

مكتبة A to Z

ثالثاً: (1) تحول العبارة إلى قضية منطقية ثم يحكم على الوجود أو العدم بأحد طرائق ثابتة لمتغيراتك.

⑤ $\forall x,y\in\mathbb{R},\exists z\in\mathbb{R}^+\ (z^2=\sqrt{(x^2+y^2)})$

هذه هي صيغة منطقية صحيحة.

(2) صيغة النفي لهذه القضية هي $(\forall x,y\in\mathbb{R}\ \exists z\in\mathbb{R})(z=\sqrt{x^2+y^2})$ ⑤

$\neg[(\forall x,y\in\mathbb{R},\exists z\in\mathbb{R})(z=\sqrt{x^2+y^2})]$

$\equiv(\exists x,y\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R})(z\neq\sqrt{x^2+y^2})$ ⑤

السؤال الثاني:

أ) $(T,\le,\vee,\wedge)$ شبكة، $a\in T$ حيث $\forall x\in T,\ a\wedge x=a$

⑤ إذاً $a\le x$ لكل $x\in T$ أي أن a هو أصغر عنصر.

ب) نبرهن أولاً أن: $(x\le y)\Leftrightarrow x\vee y=y$ ،

⑤ إذاً $x\le y$ عندئذٍ نجد أن $x\vee y=y$

إذاً $y\ge x\vee y$ وهو تناقض. لأن $x\le y$ ، $y\le y$ فيجب أن $y\ge x\vee y$

⑤ الآن نفرض أن $x\vee y=y$ نجد أن $x\le x\vee y$

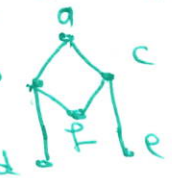
إذاً $y\ge x$.

ثانياً: الخطأ في ... من الخطأ عدم كتابة جوابه على

④

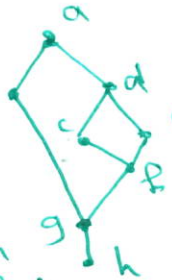
عنصر، $\forall x,y \in T: \{a,b,c,d\}$ بما أن $x \wedge y \in T$ ، $x \vee y \in T$ ، ... صفة تامة في a، $\bar{a}=d$ ، $\bar{b}=c$ ، $\bar{c}=b$ ، $\bar{d}=a$

الخطأ في ... من الخطأ عدم كتابة جوابه على T بما أن $\forall x,y \in T$



③

الخطأ في ... من الخطأ عدم كتابة جوابه على



⑤

$\forall x,y \in T$ بما أن $x \wedge y \in T$ ، $x \vee y \in T$ ، ... صفة تامة في a، $\bar{a}=d$ ، $\bar{b}=c$ ، $\bar{c}=b$ ، $\bar{d}=a$

$c \wedge a = c \neq h$ ، $c \wedge e = f \neq h$ ، $c \wedge d = c \neq h$ ، $c \wedge b = g \neq h$

$c \wedge h = h$ إذاً $c \wedge h = c \neq a$ ، $c \wedge c = c$ ، $c \vee c = c$ ، $c \wedge f = f \neq h$

$c \wedge g = g \neq h$

ثالثاً: ليكن $(B, +, \cdot, 0, 1)$ حلقة بحيث $a,b \in B$ ، ⑤

البرهان: عائنة

$a \cdot b = 0$ ... إثبات أن الشرط التالي صحيح:

$(a+b=0) \Rightarrow (a=0, b=0)$

نعلم أن $a \cdot (a+b) = a$ ، أي أن $a \cdot (a+b) = a \cdot 0 = 0$

$a=0$

نعلم أن $b \cdot (a+b) = b$ ، $b \cdot (a+b) = b \cdot 0 = 0$

$b=0$ أي أن

السؤال الثالث

$f(x,y,z,t) = xy + xyz + \bar{y}x\bar{z}t + xyzt + x\bar{z}t$

$f(x,y,z,t) = xy(z+\bar{z})(t+\bar{t}) + xyz(t+\bar{t}) + \bar{y}x\bar{z}t + xyzt(z+\bar{z})$

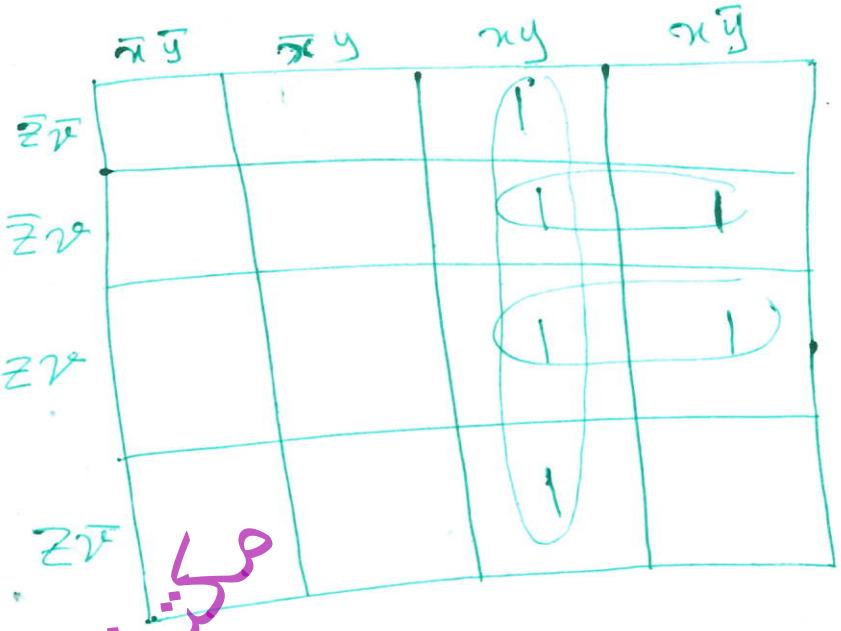
$+ xzt(y+\bar{y})$ ⑤

$= xyzt + xy\bar{z}t + xyz\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + xyzt + \bar{y}x\bar{z}t + xyzt + xyz\bar{t}$

$+ xzty + x\bar{y}zt$

$= xyzt + xy\bar{z}t + xyz\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + \bar{y}x\bar{z}t + x\bar{y}zt$ ⑤

مكتبة AtoZ



(5)

مكتبة A to Z

$f(x,y,z,w) = xy + x\bar{z}\bar{w} + xzw$ (5)

{ لصيرك الأصل بتصحيح خطأ كان فيه

دون بالخير

جامعة تشرين
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الفصلية الثانية
14-8-2023

السؤال الأول [15 د ، 15 درجة]، مادرجات د)

1) إثبات أن $\{\vee, \neg\}$ مجموعة مستقلة:

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$
$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \equiv$$
$$\equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(p \wedge q)$$

$$A \equiv (p \vee q \vee r) \oplus (p \to q)$$
$$\equiv \neg(\neg p \wedge \neg r) \oplus \neg(p \wedge \neg q)$$
$$\equiv \neg[(\neg p \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q)] \wedge \neg[\neg(\neg p \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q)]$$

2) باستخدام جدول الحقيقة: إذا كان p خطأ فإن $p \wedge q$ خطأ، وإذا كان p صواب فإن $p \wedge q$ صواب

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$p \wedge q$
F	F	F	T	F
T	F	T	F	F
F	T	T	T	F
T	T	T	T	T

3) باستخدام جدول الحقيقة العبارة ليست استدلالاً لأن قيم الحقيقة لـ ليست جميعها T،

السؤال الثاني [15 درجة لكل بند من البندين]

1) عرف أي عبارة P_i كما يلي:

P_1: أستيقظ باكرًا

P_2: أذهب للعمل ماشيًا

P_3: أنام متأخرًا

P_4: أكتفي بنوم 5 ساعات

$P_1 \wedge P_2 \longrightarrow P_4$

$P_3 \longrightarrow P_4$

$\therefore P_1 \wedge P_2 \longrightarrow P_3$

$P_4 \longrightarrow P_3$

$\therefore P_1 \wedge P_2 \longrightarrow P_4$

$P_1 \wedge P_2 \longrightarrow P_3$

$\therefore P_4 \longrightarrow P_3$

$P_1 \wedge P_2 \longrightarrow P_4$

$P_4 \longrightarrow P_3$

$\therefore P_1 \wedge P_2 \longrightarrow P_3$

$P_1 \wedge P_2$

$\therefore P_3$

2) البرهان:

(a) $x \leq y$ إذا وفقط إذا: $x \wedge y = x$

$\Rightarrow$: $x \wedge y = x \Rightarrow (x \vee \bar{x}) \wedge y = x \Rightarrow \bar{x} \vee (x \wedge y) = \bar{x} \vee x = 1$

$\Leftarrow$: $\bar{x} \vee y = 1 \Rightarrow x \wedge (\bar{x} \vee y) = (x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$

$\Rightarrow x \leq y$

(b) $x \leq y$ إذا وفقط إذا: $x \wedge \bar{y} = 0$

$\Rightarrow$: $x \wedge \bar{y} = (x \wedge y) \wedge \bar{y} = x \wedge (y \wedge \bar{y}) = x \wedge 0 = 0$

$\Leftarrow$: $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \bar{y}) = (y \vee \bar{y}) \wedge (y \vee x) = 1 \wedge (y \vee x) = y \vee x$

$\Rightarrow x \leq y$

السؤال الثالث: [10 الأول ، 15 الثاني]

1) أولاً: نبرهن أن $a+b = \sup\{a,b\}$ ، $a \cdot b = \inf\{a,b\}$.

$a + (a+b) = (a+a)+b = a+b \Rightarrow \boxed{b \leq a+b}$

$b + (a+b) = (b+b)+a = a+b \Rightarrow a \leq \boxed{a+b}$

ليكن a,b عنصرين من B فإن d هو أكبر حد أدنى لـ a,b إذا:
$a \le d$, $b \le d$ إذا:

$(a+b)+d = (a+d)+(b+d) = d+d = d \Rightarrow a+b \le d$

إذا كان الأكبر الأدنى لـ a,b هو $a+b$.

هنا مسألة مماثلة:

$(a.b)+a = a \Rightarrow a.b \le a$ $\Rightarrow a.b$ أصغر من a.b

$(a.b)+b = b \Rightarrow a.b \le b$

ليكن q أصغر من a,b إذا:

$(a.b)+q = (a+q).(b+q) = a.b$

$\Rightarrow q \le a.b$

إذا كان الأكبر الأدنى لـ a,b هو $a.b$.

مثال: $\forall a \in B \Rightarrow 0+a = a \Rightarrow 0 \le a$

$1+a = 1 \Rightarrow a \le 1$

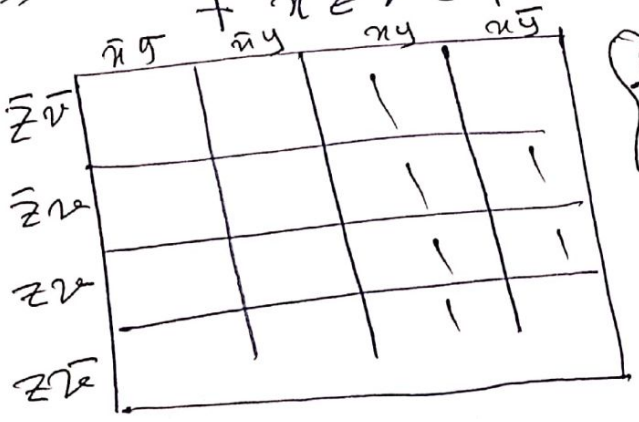
إذا $(B, \le, +, ., -, 0, 1)$ شبكة متتامة.

مثال: هل الشبكة متتامة وهل يمكنك وضع عناصر غير مكملة بالشكل $(B, \le, ., +, -, 0, 1)$ شبكة توزيعية.

2) تبسيط:

$f(x,y,z,v) = xyzv + xy\bar{z}\bar{v} + x\bar{y}\bar{z}v + xyv\bar{z}$

$+ x\bar{z}v\bar{y} + xy\bar{v}\bar{z}$



$f(x,y,z,v) = yx + x\bar{z}v + xz\bar{v}$

الجمهورية العربية السورية	مقرر جبر المنطق	المدة: ساعتان
جامعة طرطوس	س3 رياضيات	امتحان الدورة الفصلية الأولى
كلية العلوم	الدرجة العظمى: تسعون	13-3-2023

السؤال الأول: اجب عن الاسئلة التالية:((15 درجة للأول، 5 درجة للثاني، 10 درجة للثالث))

1)اثبت ان المؤثر (pierce) $\{\downarrow\}$ يشكل مجموعة مستقلة بالنسبة الى $\{\uparrow, \oplus, \leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee, \neg\}$.

2) برهن أن $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

3) أثبت أنه إذا كانت $(T, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة مغلقة و توزيعية فإن العناصر التي لها متمم تحقق:

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

السؤال الثاني: اجب عن الاسئلة التالية:((15 درجة للأول، 15 درجة للثاني))

1) رمز المحاكمة المنطقية التالية ثم أثبت صحتها:
إذا حضرت المحاضرة الأولى غدا، عندئذ يجب أن أستيقظ باكرا و إذا ذهبت إلى الملعب مساء، عندئذ يجب أن أنام متأخرا و إذا نمت متأخرا و استيقظت باكرا، عندئذ أكتفي بنوم خمس ساعات فقط و أنا لا أكتفي بنوم خمس ساعات فقط إذا يجب علي إما أن لا أحضر المحاضرة أو أن لا أذهب إلى الملعب.

2) أثبت أن الشبكة التوزيعية $(D(30), |, \vee, \wedge)$ هي شبكة بوليانية حيث $D(30)$ مجموعة قواسم العدد 30 مع علاقة يقسم $|$ و $a \vee b = l.c.m(a,b), a \wedge b = g.c.d(a,b)$. مثلها بمخطط هاس. هل قانونا الحذف محققان؟

السؤال الثالث: اجب عن الاسئلة التالية:((15 درجة للأول، 15 درجة للثاني))

1) بفرض أن $(B, +, \cdot, 0, 1)$ جبر بول أثبت مايلي

- أولا: المتمم $\overline{a}$ لاي عنصر $a \in B$ وحيد.
- ثانيا: $\forall a, b \in B$ فإن $a.(a+b) = a$
- ثالثا: $\forall a, b \in B$ فإن $a.b = a \Leftrightarrow a + b = b$

2) أوجد باستخدام شكل (مخطط) كارنوف العبارة الأضغرية للعبارة البولبانية التالية:

$$f(x, y, z, v) = xy + xyz + \overline{y}x\overline{z}v + xyv + xzv$$

مع تمنياتي بالتوفيق
د. ديانا احمد

(2)

P	Q	$P \downarrow Q$	$P \uparrow (P \downarrow Q)$
T	T	F	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

(5)

$P \uparrow (P \downarrow Q) \equiv P$

(3) $(X \wedge Y) \vee (\overline{X} \vee \overline{Y}) \equiv (X \wedge Y) \vee \overline{X} \vee \overline{Y} \equiv (X \wedge Y) \vee \overline{X \wedge Y} \equiv 1$

(4) $(X \wedge Y) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y}) \equiv X \wedge [Y \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y})]$

$\equiv X \wedge [(Y \wedge \overline{X}) \vee (Y \wedge \overline{Y})] \equiv X \wedge [(Y \wedge \overline{X}) \vee 0]$

$\equiv X \wedge (Y \wedge \overline{X}) \equiv (X \wedge \overline{X}) \wedge Y \equiv 0 \wedge Y \equiv 0$

(5) $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$

(6) $P \uparrow Q \equiv \neg(P \wedge Q) \equiv \neg(P \vee Q) \equiv (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$

(7) $P \downarrow Q \equiv \neg(P \vee Q) \equiv (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$

(8) $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q) \equiv (\neg P \downarrow \neg Q) \equiv [(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)]$

(9) $P \vee Q \equiv \neg(\neg(P \vee Q)) \equiv \neg(P \downarrow Q) \equiv (P \downarrow Q) \uparrow (P \downarrow Q)$

(10) $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q) \equiv [(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)] \uparrow [(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)]$

(11) $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv [((P \downarrow P) \downarrow Q) \uparrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P)] \wedge [((Q \downarrow Q) \downarrow P) \uparrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)]$

$\equiv [((P \downarrow P) \downarrow Q) \uparrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P)] \uparrow [((P \downarrow P) \downarrow Q) \uparrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P)]$

(12) $P \uparrow Q \equiv \neg(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q) \equiv (\neg P \downarrow \neg Q) \equiv [(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)]$

(13) $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q) \equiv [(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)] \uparrow [(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)]$

(14) $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv [((P \downarrow P) \downarrow Q) \uparrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P)] \wedge [((Q \downarrow Q) \downarrow P) \uparrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)]$

$\equiv [((P \downarrow P) \downarrow Q) \uparrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P)] \uparrow [((P \downarrow P) \downarrow Q) \uparrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P)]$

(15) $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg(\neg(\neg P \vee Q)) \equiv \neg(P \downarrow \neg Q) \equiv [(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)]$

(16) $P \vee Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q) \equiv \neg(P \downarrow Q) \equiv (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$

(17) $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q) \equiv (\neg P \downarrow \neg Q) \equiv [(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)]$

(18) $\neg P \equiv \neg P \wedge \neg P \equiv \neg(P \vee P) \equiv P \downarrow P$

السؤال 3/ 30

القاعدة الثالثة: الحضر في الحاضرة الذروي: P
استنتاج بارز: q
خلية الإلكتروني: r
الأم تاجرة: d
استنتاج بارز في سيارات: S

القاعدة

$$\frac{P \to q,\ r \to d,\ q \wedge d \to S,\ \neg S}{\therefore \neg P \vee \neg r} \quad (5)$$

الإثبات:

$$\frac{P \to q, r \to d, q \wedge d \to S,\ \neg S}{\therefore P \to q, r \to d,\ \neg(q \wedge d)} \quad (10)$$

$$\frac{\therefore P \to q, r \to d,\ \neg q \vee \neg d}{\therefore P \to q, r \to d,\ q \to \neg q}$$

$$\frac{\therefore P \to q, r \to d,\ q \to \neg q}{\therefore P \to q, r \to \neg q}$$

$$\frac{\therefore P \to q, r \to \neg q}{\therefore P \to q,\ \neg r \vee \neg q}$$

$$\frac{\therefore P \to q,\ \neg q \vee \neg r}{\therefore P \to q,\ q \to \neg r}$$

$$\frac{\therefore P \to q,\ q \to \neg r}{\therefore P \to \neg r}$$

$$\frac{\therefore P \to \neg r}{\therefore \neg P \vee \neg r}$$

---

(2) عامل الشبكة المطاة توزيعية مرفقاً، لو أثبت فقط أن الشبكة متفقة ومتممة

$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

متفقة: أصغر عنصر هو 1 لأنه: $\forall a \in D(30)$ فإن $1 \mid a$ أي $(1 \le a)$

أكبر عنصر يقسم 30 لأنه $\forall a \in D(30)$ فإن $a \mid 30$ أي $(a \le 30)$

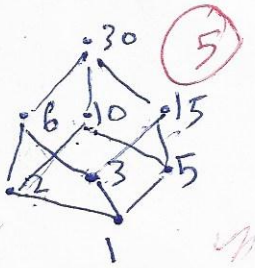
متممة: $\bar{1} = 30$ لأن $1 \vee 30 = 30$ و $1 \wedge 30 = 1$

$\bar{2} = 15$ لأن $2 \vee 15 = 30$ و $2 \wedge 15 = 1$

$\bar{3} = 10$ لأن $3 \vee 10 = 30$ و $3 \wedge 10 = 1$

$\bar{5} = 6$ لأن $5 \vee 6 = 30$ و $5 \wedge 6 = 1$

(5)



(5)

فالشرط الكافي غير محقق لأنه:

$6 \vee 10 = 30$ لكن $6 \neq 10$ و $6 \vee 15 = 30$ لكن $6 \neq 15$

$2 \wedge 5 = 1$ لكن $2 \neq 5$ و $2 \wedge 3 = 1$ لكن $3 \neq 5$

(5)

السؤال الثالث (30 درجة)

1) $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ جبر بول، $a \in B$ عنصر ما.

إذا كان $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ متممين لـ a في B فبرهن أن $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ (5)

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1 + 0 = \bar{a}_1 + (a \cdot \bar{a}_2) = (\bar{a}_1 + a) \cdot (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = (\bar{a}_2 + a) \cdot (\bar{a}_1 + \bar{a}_2)$$
$$= \bar{a}_2 + (a \cdot \bar{a}_1) = \bar{a}_2 + 0 = \bar{a}_2$$

(5) برهن أن: $a \cdot (a+b) = a$

$$a \cdot (a+b) = (a+0) \cdot (a+b)$$
$$= a + (0 \cdot b) = a + 0 = a$$

برهن أن: $a \cdot b = a \Leftrightarrow a + b = b$ (5)

$(\Rightarrow)$: $a + b = a \cdot b + b = b$

$(\Leftarrow)$: $a \cdot b = a \cdot (a+b) = a$

---

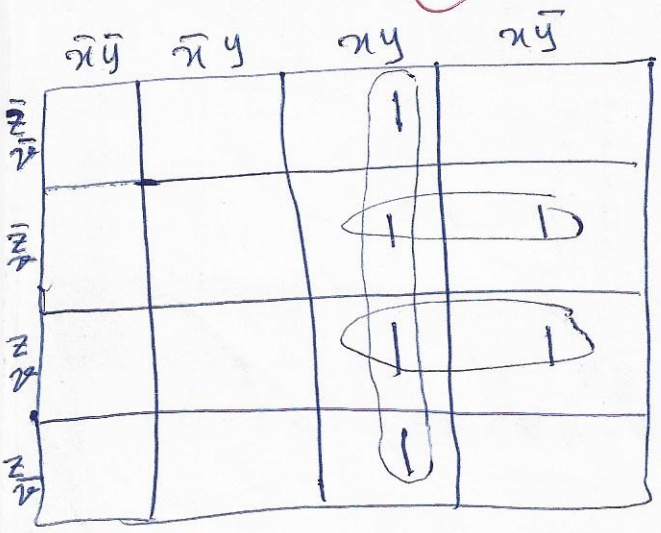
2) $f = xy + xyz + \bar{y}x\bar{z} + xyz + xz\bar{z}$

$$f = xy(z + \bar{z}) + x\bar{y}(z + \bar{z}) + xyz(\bar{x} + x) + \bar{y}x\bar{z} + xy\bar{z}(z + \bar{z}) + x(y + \bar{y})z$$
$$= xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xyz + xy\bar{z} + \bar{y}x\bar{z} + xyz + x\bar{y}z + \bar{y}x\bar{z} + xyz + xz$$
$$= xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xz$$

(5)

ارسم مخطط كارنوه للدالة f السابقة، واكتب الدالة بأبسط شكل ممكن بطريقة مخطط كارنوه.

(5)



الحدود الأولية المستغناة الأساسية:

$xy,\ x\bar{z}x,\ xzx,\ \bar{y}zx$ (5)

$$f = xy + x\bar{z}x + xzx$$

برهن أن $p \oplus q$ دالة ثنائية من p, q بطريقة جبر بول.

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$$
$$\equiv [(p \wedge \bar{q}) \vee \bot] \wedge [(\bar{p} \wedge q) \vee \bot]$$
$$\equiv [(p \wedge \bar{q}) \downarrow (p \wedge \bar{q})] \downarrow [(\bar{p} \wedge q) \downarrow (\bar{p} \wedge q)]$$
$$\equiv [(p \downarrow p) \downarrow (\bar{q} \downarrow \bar{q})] \downarrow [(\bar{p} \downarrow \bar{p}) \downarrow (q \downarrow q)]$$
$$\equiv [(p \downarrow \bar{q}) \downarrow (p \downarrow \bar{q})] \downarrow [(\bar{p} \downarrow q) \downarrow (\bar{p} \downarrow q)]$$

برهن أن $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

$$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv [(p \wedge q) \downarrow \top] \downarrow [(\bar{p} \wedge \bar{q}) \downarrow \top]$$
$$\equiv [(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)] \downarrow [(\bar{p} \downarrow \bar{q}) \downarrow (\bar{p} \downarrow \bar{q})]$$
$$\equiv [(p \downarrow q) \downarrow \bot] \downarrow [(\bar{p} \downarrow \bar{q}) \downarrow \bot]$$
$$\equiv [(p \downarrow q) \downarrow \bot] \downarrow [(\bar{p} \downarrow \bar{q}) \downarrow \bot]$$
$$\equiv (p \leftrightarrow q)$$