ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثالثة

# اسئلة دوراات محلولة

# بنى جبرية٣

## A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم ( فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة )

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية ( SMS ) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

## السؤال الأول: [30]

1) لإثبات أن $N_1 \cap N_2 \subseteq M$ و $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$ لأن $0 \in N_1 \cap N_2$ 3

$\forall x, y \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow x, y \in N_1$ و $x, y \in N_2$

$\Rightarrow x - y \in N_1$ و $x - y \in N_2 \Rightarrow x - y \in N_1 \cap N_2$ 6

$\forall x \in N_1 \cap N_2$ , $\lambda \in R \Rightarrow x \in N_1$ و $x \in N_2$

$\Rightarrow \lambda x \in N_1$ و $\lambda x \in N_2 \Rightarrow \lambda x \in N_1 \cap N_2$ 6

ومنه $N_1 \cap N_2$ مودول جزئي في $M$

2) لإثبات أن $AN$ مودول جزئي في $M$ نتبع ما يلي:

لأن $0_M \in AN$ و $\emptyset \neq AN \subseteq M$ واضح أن 3

$\forall x_1, x_2 \in AN \Rightarrow x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ , $x_2 = \sum_{j=1}^{m} a'_j x'_j$ ;

$a_i, a'_j \in A$ , $x_i, x'_j \in N$, $n, m \in \mathbb{Z}^+$ 6

$\Rightarrow x_1 - x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{m} a'_j x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (-a'_j) x'_j \in AN$

$\forall x \in AN$, $\lambda \in R \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ ; $a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow \lambda x = \lambda \left( \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda a_i)}_{\in A} x_i \in AN$ 6

ومنه $AN$ مودول جزئي في $M$.

## السؤال الثاني [35]

1) لنعرف التطبيق $f : N_2 \longrightarrow M/N_1$ كما يلي:

$f(x) = x + N_1$ $\forall x \in N_2$

إن $f$ معرف جيداً لأنه: $\forall x_1, x_2 \in N_2$ ; $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ 3

إن $f$ هومومورفيزم لأنه:

1) $\forall x_1, x_2 \in N_2 \Rightarrow f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + N_1 = (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1)$

$= f(x_1) + f(x_2)$ 3

2) $\forall x \in N_2$ , $\lambda \in R \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda x + N_1 = \lambda (x + N_1)$ 3

$= \lambda f(x)$

$f$ متباين لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in N_2$ ; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1$ 3

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in N_1$

وبما أن $x_1, x_2 \in N_2$ فإن $x_1 - x_2 \in N_2$ ومنه

مكتبة A to Z

$N_1 \cap N_2 = \{0\}$ لأن $M = N_1 \oplus N_2$ وبالتالي $x_1 - x_2 \in N_1 \cap N_2$ ولكن

$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

f غامرة لأنه:

$\forall y \in M/N_1 \Rightarrow \exists x = x_1 + x_2 \in M \; ; \; y = x + N_1 \; \& \; x_1 \in N_1 , x_2 \in N_2$ 3/

$\Rightarrow \exists x_2 \in N_2 \; ; \; y = x + N_1 = (x_1 + x_2) + N_1$

$= (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1) = N_1 + (x_2 + N_1)$

$= x_2 + N_1 = f(x_2)$

حاسب ينتج أن f إيزومورفزم وبالتالي $M/N_1 \cong N_2$ . 2/

بما أن المجموعة $\{x_k\}$ تولد M لأنه:

$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \; ; \; r_i \in R \Rightarrow x = r_k x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i$

$= r_k \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i x_i \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i$ 1/0

$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (r_k \lambda_i) x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (r_k \lambda_i + r_i) x_i$

3/ بما أن للمودول الجزئي L متمماً في M ولكن $L'$ فإن

$M = L \oplus L'$

$\Rightarrow M = L + L' \quad \& \quad L \cap L' = \{0\}$

لنضع $L'' = N \cap L'$ فإن $L''$ مودول جزئي في N ، ويكون: 1/0

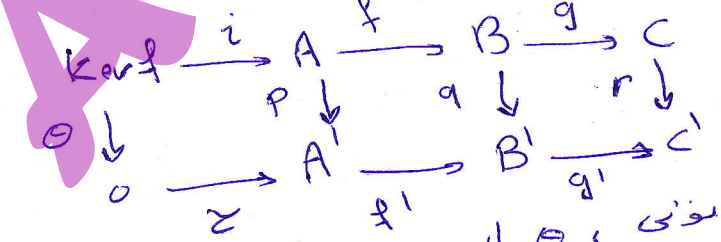
$L + L'' = L + (N \cap L') = N \cap (L + L') = N \cap M = N$

$L \cap L'' = L \cap (N \cap L') = N \cap (L \cap L') = N \cap \{0\} = \{0\}$

أي أن للمودول الجزئي L متمماً في N هو $N \cap L'$ .

## السؤال الثالث [25]

11




5/ حيث أن التباين القانوني، $\theta$ السوموفزم الصفري، $\zeta$ الاحتواء القانوني. بيان هذا المخطط تبادلي وسطريه متتاليتان تاقصان.

واضح أن سطري المخطط متتاليتان تاقصان، وأن $\theta$ إيبو مورفزم، ولنبين أن المربع اليساري تبادلي، أي لنبين أن $p \circ i = \zeta \circ \theta$ .

5/

$\forall x \in \text{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0$

$(\zeta \circ \theta) f(x) = \zeta(\theta(x)) = \zeta(0) = 0$

$(p \circ i)(x) = p(i(x)) = p(x)$

A to Z مكتبة

لدينا: $f'(p(x)) = (f' \circ p)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0'$

$\Rightarrow p(x) \in \ker f'$

ولكن $\ker f' = \{0\}$ لأن $f'$ متباين، وبالتالي $p(x) = 0$. وضنه:

$(\chi \circ \theta)(x) = (p \circ i)(x) = 0 \Rightarrow \chi \circ \theta = p \circ i$ 5/

الآن بما أن $p$ و $r$ هومومورفزم و $\theta$ ايبومورفزم فإن $q$ هومومورفزم (هـ (2) من نظرية التماثلات الأربعة)

12 $\forall \sigma \in \operatorname{Im} f_* \Rightarrow \exists \theta_1 \in \operatorname{Hom}(M, A')$ ; $\sigma = f_*(\theta_1)$

$\Rightarrow \sigma = f \circ \theta_1$

ويكون:

$g_*(\sigma) = g \circ \sigma = g \circ (f \circ \theta_1) = (g \circ f) \circ \theta_1 = 0$ 4/

$\Rightarrow \sigma \in \ker g_* \Rightarrow \operatorname{Im} f_* \subseteq \ker g_*$

وكذلك

$\forall \sigma \in \ker g_* \Rightarrow g_*(\theta) = 0 \Rightarrow g \circ \theta = 0 \Rightarrow (g \circ \theta)(x) = 0 \ \forall x \in M$

$\Rightarrow g(\theta(x)) = 0 \Rightarrow \theta(x) \in \ker g = \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \exists a' \in A'$ ; $\theta(x) = f(a')$

وبما أن $f$ متباين فإن $a'$ وحيد $\theta(x) = f(a')$

لأنه إذا كان يوجد $b' \in A'$ بحيث $\theta(x) = f(b')$ فإن $f(a') = f(b')$

وبالتالي $a' = b'$ 6/

ولتعريف التطبيق $\theta_1 : M \longrightarrow A'$ بحيث $\theta_1(x) = a'$

فإن $\theta_1 \in \operatorname{Hom}(M, A')$ ، ويكون:

$\theta(x) = f(a') = f(\theta_1(x)) = (f \circ \theta_1)(x)$

$\Rightarrow \theta = f \circ \theta_1 \Rightarrow \theta = f_*(\theta_1) \Rightarrow \theta \in \operatorname{Im} f_*$

$\Rightarrow \ker g_* \subseteq \operatorname{Im} f_*$

ومنه $\operatorname{Im} f_* = \ker g_*$

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثالثة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب: .....

**السؤال الأول:** (25 درجة) 1- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R$- مودول، وليكن $M_1, M_2$ مودولين جزئيين من $M$. برهن أن $M_1 + M_2$ مودل جزئي من $M$.

2- ليكن $M$ مودول فوق حلقة $(R,+,.)$، ولتكن $P,N,T$ مودولات جزئية من $M$، بحيث أن $T \subseteq P$. برهن أن:

$$P \cap (N+T) = (P \cap N) + T$$

**السؤال الثاني:** (35 درجة) 1- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وليكن $M, M'$ مودولين فوق $R$، ولتكن $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ قاعدة لـ $M'$، وليكن $f: M \to M'$ $R$- ايبومورفيزم. بين أنه يوجد مودول جزئي حر $N$ من $M$ بحيث يكون $M = N \oplus \ker f$.

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M, M'$ مودولين فوق $R$، وليكن $f: M \to M'$ $R$- هوموموفيزم. برهن أن:

$$M/\ker f \cong f(M)$$

**السؤال الثالث:** (30 درجة) 1- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، ونفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق $R$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ r\downarrow & & p\downarrow & & q\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

والهوموموفيزمات تبادلي، وأن سطريه متتاليتان تامتان. برهن أنه إذا كان $r, p, g$ ايبومورفيزمات فإن $q$ يكون ايبومورفيزم.

2- ليكن $M$ مودول حر فوق حلقة واحدية $R$، ولتكن $S$ مجموعة ما. برهن أنه يمكن كتابة كل تطبيق $g: S \to M$ بشكل وحيد كتركيب لتطبيقين، ونحصل على المخطط التبادلي الآتي

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & M \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle h} & \\ & F & \end{array}$$

حيث $h$ هوموموفيزم وحيد.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2025-7-30

Ato Z

نص جزء (3)
نص رياضيات

## السؤال الأول: [25]

1- أ- واضح أن $0 \neq M_1+M_2 \subseteq M$ لأن $0 \in M_1+M_2$ 3/

ب) $\forall x,y \in M_1+M_2 \Rightarrow x=x_1+x_2$ و $y=y_1+y_2$;

$x_1, y_1 \in M_1$ , $x_2, y_2 \in M_2$

$\Rightarrow x-y = (x_1+x_2)-(y_1+y_2) = (x_1-y_1)+(x_2-y_2) \in M_1+M_2$

$\in M_1 \quad \in M_2$

ج) $\forall x \in M_1+M_2, \lambda \in R \Rightarrow x=x_1+x_2$ ; $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$ 6/

$\Rightarrow \lambda x = \lambda(x_1+x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in M_1+M_2$

$\in M_1 \quad \in M_2$

د) حاصل نتج أن $M_1+M_2$ حدود جزئي في $M$. 6/

2- $P \cap N \subseteq P \Rightarrow (P \cap N)+T \subseteq P+T$ 5/

و

$P \cap N \subseteq N \Rightarrow (P \cap N)+T \subseteq N+T$ (*)

$\Rightarrow (P \cap N)+T \subseteq (P+T) \cap (N+T)$ $\Leftarrow$ $T \subseteq P$

وفي جهة ثانية:

$\forall x \in P \cap (N+T) \Rightarrow x \in P$ و $x \in N+T$

$\Rightarrow x = x_1+x_2$ ; $x_1 \in N$ و $x_2 \in T$

$\Rightarrow x_1 = x-x_2 \in P$ ( لأن $x_2 \in T \subseteq P$ , $x \in P$ ) 5/

$\Rightarrow x_1 \in P \cap N \Rightarrow x \in (P \cap N)+T$

$\Rightarrow P \cap (N+T) \subseteq (P \cap N)+T$ (**)

من (*) و (**) نتج المساواة.

## السؤال الثاني: [35]

1) إن التطبيق $f: M \to M'$ عناصر في الفوق وبالتالي من أجل العناصر $x_1', \dots, x_n'$ من $M'$ يوجد عناصر $x_1, \dots, x_n$ من $M$ بحيث

$f(x_i) = x_i'$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$.

ليكن $N$ هو الجدول الجزئي من $M$ المولد بالمجموعة $\{x_1, \dots, x_n\}$

وهذه المجموعة مستقلة خطياً لأنه إذا كان:

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ ; $\lambda_i \in R$

$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f(0) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0$ 5/

$\lambda_i = 0$ ; $i = 1, \dots, n$ ، أي أن المجموعة $\{x_1, \dots, x_n\}$ مولدة لـ $N$

وبالتالي $N$ مودول جزئي حر من $M$ ، ولكن:

$$\forall x \in M \to f(x) \in M' \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' \quad ; \quad \lambda_i \in R$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \quad 5$$

$$\Rightarrow f\left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0' \Rightarrow x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in Ker f$$

$$\Rightarrow x \in N + Ker f \Rightarrow M \subseteq N + Ker f \Rightarrow M = N + Ker f$$

حيث أن:

$$\forall y \in N \cap Ker f \Rightarrow y \in N \ \& \ y \in Ker f$$

$$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad ; \quad \lambda_i \in R \ \& \ f(y) = 0'$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0' \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0' \quad 5$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' = 0' \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow y = 0$$

أي أن $N \cap Ker f = \{0\}$ وبالتالي فإن $M = N \oplus Ker f$ .

2 نأخذ التطبيق $\varphi : M/Ker f \to f(M)$ المعرف بالشكل

$$\varphi(x + Ker f) = f(x) \quad \forall x \in M$$

فإن $\varphi$ معرف جيداً لأنه:

$$\forall x_1, x_2 \in M \quad ; \quad x_1 + Ker f = x_2 + Ker f$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in Ker f \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0' \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad 4$$

$$\Rightarrow \varphi(x_1 + Ker f) = \varphi(x_2 + Ker f)$$

- $\varphi$ متباين لأنه:

$$\forall x_1, x_2 \in M \quad ; \quad \varphi(x_1 + Ker f) = \varphi(x_2 + Ker f) \quad 4$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0'$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in Ker f \Rightarrow x_1 + Ker f = x_2 + Ker f$$

- $\varphi$ غامر لأنه

$$\forall y \in f(M) \Rightarrow \exists x \in M \ ; \ y = f(x) \Rightarrow \exists x + Ker f \in M/Ker f \quad 4$$

$$y = f(x) = \varphi(x + Ker f)$$

$\varphi$ هومومورفيزم لأنه

1) $\forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow \varphi((x_1 + Ker f) + (x_2 + Ker f)) =$ 4

$$\varphi((x_1 + x_2) + Ker f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

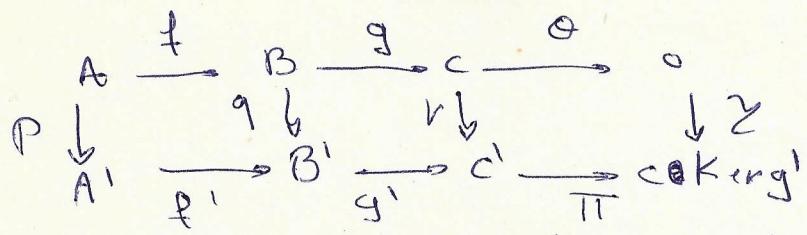
$$= \varphi(x_1 + Ker f) + \varphi(x_2 + Ker f) \quad 4$$

$$= \varphi(x_1 + Ker f) + \varphi(x_2 + Ker f)$$

A to Z

[30] السؤال الثالث:

1/ نأخذ الـ bbd




حيث $\pi$ التقريب القانوني، $z$ الاحتواء القانوني، $\theta$ التشاكل الصفري. إن هذا المخطط bbd تبادلي وسطريه متتاليتان تامتان.

واضح أن سطري المخطط bbd متتاليتان تامتان، وأن $z$ مونومورفيزم

ولنبين أن المربع اليميني تبادلي، أي لنبين أن $z \circ \theta = \pi \circ r$

$$\forall x \in C \xrightarrow{\text{وعلى}} \exists b \in B \;;\; x = g(b)$$

وبالتالي:

$$(z \circ \theta)(x) = z(\theta(x)) = z(0) = 0$$

$$(\pi \circ r)(x) = \pi(r(x)) = \pi(r(g(b))) = (\pi \circ (r \circ g))(b)$$

$$= \pi \circ (g' \circ q)(b) = (\pi \circ g')(q(b)) = 0$$

$$\Rightarrow (z \circ \theta)(x) = (\pi \circ r)(x) = 0 \Rightarrow z \circ \theta = \pi \circ r$$

الآن بما أن $r$ و $\pi$ إبيمورفيزمين، و $z$ مونومورفيزم فإن $q$ يكون إبيمورفيزم حسب (1) من نظرية التمثيل الرابعة.

2/ ليكن $F$ المودول الحر على $S$، ولنعرف التطبيق $h: F \to M$ بالشكل

$$h(\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s)\, g(s)$$

والتطبيق $f: S' \to F$ بالشكل $f(s) = f_s \quad \forall s \in S'$

3/ فإن $h$ معرف جيداً لأنه

$$\forall \theta, \theta' \in F \;;\; \theta = \theta' \Rightarrow \theta(s) = \theta'(s) \quad \forall s \in S$$

$$\Rightarrow \sum_{s \in S} \theta(s) g(s) = \sum_{s \in S} \theta'(s) g(s) \Rightarrow h(\theta) = h(\theta')$$

3/ إن $h$ هومومورفيزم لأن:

1) $\forall \theta, \theta' \in F \Rightarrow h(\theta + \theta') = \sum_{s \in S} (\theta + \theta')(s)\, g(s) = \sum_{s \in S} (\theta(s) + \theta'(s)) g(s)$

$$= \sum_{s \in S} \theta(s) g(s) + \sum_{s \in S} \theta'(s) g(s) = h(\theta) + h(\theta')$$

3/

2/ $\forall \theta \in F, \lambda \in R \Rightarrow h(\lambda\theta) = \sum_{s \in S'} (\lambda\theta)(s)\, g(s) = \sum_{s \in S} \lambda\theta(s) g(s)$

$$= \lambda \left( \sum_{s \in S'} \theta(s) g(s) \right) = \lambda h(\theta)$$

بما أن الشكل (1) مطرد تبادلي لأنه

$$\forall s \in S' \Rightarrow (h \circ f)(s) = h(f(s)) = h(f_s) = \sum_{x \in S'} f_s(x)\, g(x) = g(s)$$

3/

$$\Rightarrow h \circ f = g$$

بما أن $h$ وحيد لأنه إذا كان $h': F \to M$ هومومورفيزم آخر

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثالثة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة) 1- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R$- مودول، ولتكن $N$ مجموعة جزئية من $M$، ، ولتكن $A$ مثالية يسارية من الحلقة $R$. برهن أن المجموعة:

$$AN=\{x\in M \mid x=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad ; \quad a_i\in A, x_i\in N, n\in Z^+\}$$

تشكل مودول جزئي من $M$.

2- ليكن $M$ و $N$ مودولين فوق حلقة $(R,+,.)$، ولنرمز بـ $0$ و $0'$ لصفري $M$ و $N$ على الترتيب، وليكن $f:M\to N$ $R$- هوموморفيزم. إذا كان $M_1$ مودول جزئي من $M$ برهن أن $f(M_1)$ مودول جزئي من $N$ .

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية. برهن أن التطبيق $f:R^3\to R^2$ المعرف بالشكل:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2) \qquad \forall x_1,x_2,x_3\in R$$

$R$ – ايبومورفيزم، ثم استنتج أن $D=\{(0,0,x_3) \mid x_3\in R\}$ مودول جزئي من $R^3$ وأن $R^3/D\cong R^2$ .

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R$- مودول، ولتكن $M_1,...,M_n$ مودولات جزئية من $M$ بحيث أن $M=M_1\oplus...\oplus M_n$ ، ولتكن $N_1,...,N_n$ مودولات جزئية من $M_1,...,M_n$ على الترتيب، وليكن $N=N_1+...+N_n$ . إذا كان $f:M\to M/N$ $R$- ايبومورفيزم معرف بالشكل $f(x)=x+N$ . بين أن:

$$M/N=f(M_1)\oplus...\oplus f(M_n)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- ليكن $M$ مودول حر فوق حلقة واحدية $(R,+,.)$، ولتكن $S$ قاعدة للمودول $M$. برهن أن $M\cong F$ (حيث $F$ المودول الحر على $S$).

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، ونفرض أن $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ متتالية تامة من المودولات فوق $R$ والهوموморفيزمات. برهن أن:

أ- $B/\operatorname{Im} f\cong C$ .

ب- لنأخذ المتتالية:

$$0\longrightarrow Hom(M,A')\xrightarrow{f_*}Hom(M,A)\xrightarrow{g_*}Hom(M,A'')$$

برهن أن $\operatorname{Im} f_*=\ker g_*$ .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2025-3-4

د. علياء حكيم

A to Z

بنك جديد (3)

## السؤال الأول: [30]

1- نضع أن $AN \subseteq M$ $(0_M \in AN)$ $AN \neq \varnothing$ 3/

2- $\forall x_1, x_2 \in AN \Rightarrow x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ , $x_2 = \sum_{j=1}^{m} a'_j x'_j$

$a_i, a'_j \in A$, $x_i, x'_j \in N$, $n, m \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{m} a'_j x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(-a'_j)}_{\in A} x'_j \in AN$ صح 6/

$\forall x \in AN, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ ; $a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+$ - 3

$\Rightarrow \lambda x = \lambda \left( \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda a_i)}_{\in A} x_i \in AN$ 6/

مما سبق ينتج أن $AN$ موديول جزئي في $M$.

2) 1) نضع أن $f(M_1) \subseteq N$ $(f(0) = 0 \in f(M_1))$ $f(M_1) \neq \varnothing$ 3/

2) $\forall y_1, y_2 \in f(M_1) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in M_1 ; y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ 6/

$\Rightarrow y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(\underbrace{x_1 - x_2}_{\in M_1}) \in f(M_1)$

3) $\forall y \in f(M_1), \lambda \in R \Rightarrow \exists x \in M_1 ; y = f(x)$

$\Rightarrow \lambda y = \lambda f(x) = f(\underbrace{\lambda x}_{\in M_1}) \in f(M_1)$ 6/

مما سبق فإن $f(M_1)$ موديول جزئي في $N$.

## السؤال الثاني [30]

1) $f$ هو مورفيزم لأن:

i) $\forall (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3) \in R^3 \Rightarrow$ 4/

$f((x_1, x_2, x_3) + (x'_1, x'_2, x'_3)) = f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3)$

$= (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = (x_1, x_2) + (x'_1, x'_2)$

$= f(x_1, x_2, x_3) + f(x'_1, x'_2, x'_3)$

ii) $\forall (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \lambda \in R \Rightarrow f(\lambda(x_1, x_2, x_3)) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ 4/

$= (\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda (x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2, x_3)$

$f$ غامر لأنه:

$\forall (y_1, y_2) \in R^2 \Rightarrow \exists (y_1, y_2, 0) \in R^3 ; f(y_1, y_2, 0) = (y_1, y_2)$ 3/

وبما أن $f$ إبيمورفيزم

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in Ker f \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$ 2/

$\Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

A to Z

$\Rightarrow \ker f = \{(0,0,x_3) \mid x_3 \in R\} = D$ 2/

وبما أن نواة $f$ مودول جزئي من $R^3$ فإن $D$ كذلك، وبما أن $f$ هو موجه رضيم غامر نواته $D$ فإن $R^3/D \cong R^2$ (حسب نتيجة 2)

لدينا $\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \subseteq M/N$، كما أنه:

$$\forall x+N \in M/N \Rightarrow x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \; x_i \in M_i$$

$$\Rightarrow x+N = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + N = \sum_{i=1}^{n} (x_i + N) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \in \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$$

$$\Rightarrow M/N \subseteq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$$ 7/

وعليه $M/N = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$، ولبرهن أن $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة.

إذا كان:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i) = N \; ; \; z_i \in N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (z_i + N) = N \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) + N = N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i \in N \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \; x_i \in N_i \overset{N_i \subseteq M_i}{\Rightarrow}$$

$x_i \in M_i \; \forall i = 1, \dots, n$ 8/

وبما أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$، فإن:

$\forall i = 1, \dots, n$ ; $z_i = x_i$ ; $i = 1, \dots, n \Rightarrow f(z_i) = f(x_i)$

$$\Rightarrow f(z_i) = x_i + N = N$$

وبالتالي $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة، وعليه $M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$

السؤال الثالث: [30]

1/ من النظرية السابقة فإن المخطط الآتي تبادلي

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\chi} & M \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle h} & \\ F & & \end{array}$$

حيث $\chi$ الاحتواء القانوني.

وبالتالي $\chi = h \circ i$، وكذلك $h$ هو موجه رضيم حسب نظرية

وأن $h$ غامر لأنه: $\operatorname{Im} h$ مودول جزئي من $M$ يحوي $S$، وذلك لأن

$$\forall s \in S \Rightarrow s = \chi(s) = (h \circ i)(s) = h(i(s))$$

$$= h(i_s) \in \operatorname{Im} h \Rightarrow S \subseteq \operatorname{Im} h$$ 6/

وبما أن $S$ تولد $M$، فإن $\operatorname{Im} h = M$، أي أن $h$ غامر.

وأن $h$ متباين لأنه:

$$\forall \theta \in \ker h \Rightarrow 0 = h(\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s)\chi(s) = \sum_{s \in S} \theta(s)s$$

وبما أن $\theta \in F$، و $\theta(s) = 0$ من أجل جميع عناصر $S$ ماعدا عدد منته منها،

A to Z

ولتكن $x_1, \dots, x_n$ بحيث $\sum_{i=1}^{n} \theta(x_i) x_i = 0$ ؛ وبما أن $\{x_i\}$ قاعدة

حرة مستقلة خطياً وبالتالي $\theta(x_i) = 0$ ؛ $i = 1, \dots, n$ ، أي أن $\theta = 0$ ،

وبالتالي $\ker h = \{0\}$ ، أي أن $h$ متباين.

مما سبق نجد أن $h$ ايزومورفزم، وعليه $M \cong F$.

2) أ - بما أن المتتالية تامة فإن $g : B \to C$ هو مورفزم غامر

و $\operatorname{Im} f = \ker g$ ، وبالتالي هي برهنة على أن $B / \operatorname{Im} f \cong C$

ب -

$$\forall \theta \in \operatorname{Im} f_* \Rightarrow \exists \theta_1 \in \operatorname{Hom}(M, A') \; ; \; \theta = f_*(\theta_1)$$
$$\Rightarrow \theta = f \circ \theta_1$$

ويكون:

$$g_*(\theta) = g \circ \theta = g \circ (f \circ \theta_1) = (g \circ f) \circ \theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow \theta \in \ker g_* \Rightarrow \operatorname{Im} f_* \subseteq \ker g_*$$

$$\forall \theta \in \ker g_* \Rightarrow g_*(\theta) = 0 \Rightarrow g \circ \theta = 0 \Rightarrow (g \circ \theta)(x) = 0 \quad \forall x \in M$$
$$\Rightarrow g(\theta(x)) = 0 \Rightarrow \theta(x) \in \ker g = \operatorname{Im} f$$
$$\Rightarrow \exists a' \in A' \; ; \; \theta(x) = f(a')$$

وبما أن $f$ متباين فإن $a'$ وحيد بحيث $\theta(x) = f(a')$

لأنه إذا كان يوجد $b' \in A'$ بحيث $\theta(x) = f(b')$ فإن $f(a') = f(b')$

وبالتالي $a' = b'$

وليكن التطبيق $\theta_1 : M \to A'$ بحيث $\theta_1(x) = a'$ فإن $\theta_1 \in \operatorname{Hom}(M, A')$

ويكون

$$\theta(x) = f(a') = f(\theta_1(x)) = (f \circ \theta_1)(x) \Rightarrow \theta = f \circ \theta_1$$
$$\Rightarrow \theta = f_*(\theta_1) \Rightarrow \theta \in \operatorname{Im} f_* \Rightarrow \ker g_* \subseteq \operatorname{Im} f_*$$

وعليه

$$\operatorname{Im} f_* = \ker g_*$$

A to Z

الجمهورية العربية السورية — امتحان بنى جبرية 3 — المدة ساعتان

جامعة طرطوس — لطلاب السنة الثالثة- رياضيات — الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم — الدورة الفصلية الثانية — اسم الطالب:

**السؤال الأول:** (25 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R-$ مودول، وليكن $M_1,M_2$ مودولين جزئيين من $M$. برهن أن $M_1\cap M_2$ مودل جزئي من $M$.

**2-** ليكن $M$ مودل فوق حلقة $(R,+,.)$، وليكن $n$ عدد صحيح موجب. بين أن التطبيق $f:M^n\to M$ المعرف بالشكل $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in M \quad f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1$ هو $R-$ ايبومورفيزم.

**السؤال الثاني:** (30 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وليكن $M,M'$ مودولين فوق $R$، ولتكن $\{x'_1,\ldots,x'_n\}$ قاعدة لـ $M'$، وليكن $f:M\to M'$ $R-$ ايبومورفيزم . بين أنه يوجد مودول جزئي حر $N$ من $M$ بحيث يكون $M=N\oplus\ker f$ .

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية ، وليكن $M$ $R-$ مودول، ولتكن $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\ ;\ n\geq 2\}$ مجموعة جزئية منتهية من $M$ بحيث أن $M=<S>$. بين أن المجموعة $S\setminus\{x_k\}$ مولدة لـ $M$ ، حيث :

$$x_k=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_i x_i \quad ; \quad \lambda_i\in R \quad , \quad k\in\{1,2,\ldots,n\}$$

**السؤال الثالث:** (35 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، ويفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق $R$

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$$

والهومومورفيزمات تبادلي $p\downarrow \quad q\downarrow \quad r\downarrow$ وأن سطريه متتاليتان تامتان. برهن ما يلي:

$$A'\xrightarrow{f'}B'\xrightarrow{g'}C'$$

أ - $g\circ f=0$

ب - إذا كان $r,p,f'$ مونومورفيزمات فإن $q$ يكون مونومورفيزم.

**2-** ليكن $M$ مودول فوق حلقة تبديلية واحدية $(R,+,.)$. بين أنه يوجد $R-$ هوموموفيزم $\theta:M\to M^{**}$.

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2024-7-14

A to Z

$\forall x, y \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow x, y \in M_1$ و $x, y \in M_2$ — 2

$\Rightarrow x - y \in M_1$ و $x - y \in M_2 \Rightarrow x - y \in M_1 \cap M_2$ 5/

$\forall x \in M_1 \cap M_2$ , $\lambda \in R \Rightarrow x \in M_1$ و $x \in M_2$ — 3

$\Rightarrow \lambda x \in M_1$ و $\lambda x \in M_2 \Rightarrow \lambda x \in M_1 \cap M_2$ 5/

مما سبق نستنتج أن $M_1 \cap M_2$ مودول جزئي من $M$ .

2/ $f$ هومومورفيزم لأنه :

1) $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in M^n \Rightarrow$

$f((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) = f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ 5/

$= x_1 + y_1 \cdot f(x_1, \dots, x_n) + f(y_1, \dots, y_n)$

2) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in M^n$ , $\lambda \in R \Rightarrow$

$f(\lambda(x_1, \dots, x_n)) = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda x_1$ 5/

$= \lambda f(x_1, \dots, x_n)$

$f$ غامر لأنه:

$\forall y \in M \Rightarrow \exists (y, \dots, y) \in M^n$ ; $f(y, \dots, y) = y$ 2/

مما سبق نستنتج أن $f$ إيزومورفيزم .

## السؤال الثاني: [30]

1/ بما أن التطبيق $f: M \longrightarrow M'$ غامر من الفوق ، وبالتالي من أجل العناصر $x_1', \dots, x_n'$ من $M'$ توجد عناصر $x_1, \dots, x_n$ من $M$ بحيث $f(x_i) = x_i'$ ; $i = 1, \dots, n$ . 5/

ليكن $N$ هو المودول الجزئي من $M$ المولد بالمجموعة $\{x_1, \dots, x_n\}$ . بما أن هذه المجموعة مستقلة خطياً لأنه ، إذا كان

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ ; $\lambda_i \in R$

$\Rightarrow f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = f(0) = 0' \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0'$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' = 0'$ 5/

وبما أن $\{x_1', \dots, x_n'\}$ مستقلة خطياً لأنها قاعدة لـ $M'$ وبالتالي فإن $\lambda_i = 0$ ( $i = 1, \dots, n$ )

A to Z مكتبة

$\forall x \in M \Rightarrow f(x) \in M' \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' \quad ; \lambda_i \in R$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$

$\Rightarrow f\left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0' \Rightarrow x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in Ker f$

$\Rightarrow x \in N + Ker f \Rightarrow M \subseteq N + Ker f \Rightarrow M = N + Ker f$

وكذلك فإن:

$\forall y \in N \cap Ker f \Rightarrow y \in N \ \& \ y \in Ker f$

$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad ; \lambda_i \in R \ \& \ f(y) = 0'$

$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0'$ 5/

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' = 0' \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad ; \ i = 1, \dots, n \Rightarrow y = 0$

أي أن $N \cap Ker f = \{0\}$ وبالتالي $M = N \oplus Ker f$

2/ إن المجموعة $\{x_k\}$ تولد M لأنه:

$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad ; r_i \in R$

$\Rightarrow x = r_k x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i = r_k \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i x_i\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i$

$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (r_k \lambda_i + r_i) x_i$ 10/

## السؤال الثاني

1/ أ) لما أن $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ متتالية تامة فإن $Im f = Ker g$ وبالتالي:

$\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow f(x) \in Ker g \Rightarrow g(f(x)) = 0$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow g \circ f = 0$ 5/

ب)

$$\begin{array}{ccccccc} Ker f & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \theta \downarrow & & p \downarrow & & q \downarrow & & r \downarrow \\ 0 & \xrightarrow[z]{} & A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' \end{array}$$

5/

حيث i التباين القانوني، $\theta$ الموضوع على الصفر، z الاحتواء القانوني، فإن هذا المخطط تبادلي وسطره متتاليتان تامتان.

مكتبة A to Z

$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0$

ونكون:

$(\chi \circ \theta)(x) = \chi(\theta(x)) = \chi(0) = 0$ 5/

$(p \circ i)(x) = p(i(x)) = p(x)$

ولدينا:

$f'(p(x)) = (f' \circ p)(x) = (q \circ f)(x) = q(f(x))$

$= q(0) = 0 \Rightarrow p(x) \in \ker f'$

ولكن $\ker f' = \{0\}$ لأن $f'$ متباين، وبالتالي $p(x) = 0$، وعليه:

$(\chi \circ \theta)(x) = (p \circ i)(x) = 0 \Rightarrow \chi \circ \theta = p \circ i$ 5/

وبالتالي بما أن $p$ و $\chi$ هومومورفزمين $\theta$ ايزومورفزم فإن $q$ هومومورفزم (حسب ما جاء في نظرية التحسيب الأخيرة)

2/ من أجل كل عنصر $x$ من $M$ لنعرف التطبيق $\theta_x : M^* \longrightarrow \mathbb{R}$ بالشكل:

$\theta_x(f) = f(x) \quad \forall f \in M^*$

إن $\theta_x \in M^{**}$، أي أن $\theta_x$ هومومورفزم لأن:

1) $\forall f, g \in M^* \Rightarrow \theta_x(f+g) = (f+g)(x)$ ✓ 7/

$= f(x) + g(x) = \theta_x(f) + \theta_x(g)$

2) $\forall f \in M^*, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \theta_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

$= \lambda \theta_x(f)$

نبين أن التطبيق $\theta : M \longrightarrow M^{**}$ المعرف بالشكل $\theta(x) = \theta_x$ هو هومومورفزم:

1) $\forall x, y \in M, f \in M^* \Rightarrow (\theta(x+y))(f) = \theta_{(x+y)}(f)$

$= f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta_x(f) + \theta_y(f)$

$= (\theta_x + \theta_y)(f) = (\theta(x) + \theta(y))(f)$ 9/

$\Rightarrow \theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$

2) $\forall x \in M, \lambda \in \mathbb{R}, f \in M^* \Rightarrow (\theta(\lambda x))(f) =$

$= \theta_{(\lambda x)}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$\lambda \theta_x(f) = (\lambda \theta_x)(f) = (\lambda \theta(x))(f)$

$\Rightarrow \theta(\lambda x) = \lambda \theta(x)$

أي أن $\theta : M \longrightarrow M^{**}$ هومومورفزم.

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | اطلاب السنة الثالثة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب:.....

**السؤال الأول:** (20 درجة) **1-** ليكن $M$ و $N$ مودلين فوق حلقة واحدية $(R,+,.)$، وليكن $f:M\to N$ $R-$ هومومورفيزم، وليكن $M_1$ مودول جزئي من $M$. برهن أن $f^{-1}(f(M_1))=M_1+\ker f$ .

**2-** لتكن $M,N$ زمرتين جمعيتين تبديليتين. بين أن هومومورفيزم $f:M\to N$ يكون $\mathbb{Z}-$هومومورفيزم، أي هومومورفيزم بين مودولين.

**السؤال الثاني:** (35 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ و $N$ مودلين فوق $R$ ، ولتكن $M_1,...,M_n$ مودولات جزئية من $M$ بحيث أن $M=M_1\oplus...\oplus M_n$ ، ولتكن $N_1,...,N_n$ مودولات جزئية من $N$ بحيث أن $N=N_1\oplus...\oplus N_n$ . بين أنه إذا كان $M_i\cong N_i$ $(i=1,...,n)$ فإن $M\cong N$ .

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وليكن $M$ $R-$ مودول. بين أنه:

أ - إذا كانت $S$ مجموعة جزئية من $M$ بحيث أن $0\in S$، فإن $S$ مرتبطة خطياً.

ب - إذا كان $L,N$ مودولين جزئيين من $M$ بحيث أن $L\subseteq N$ ، وإذا كان للمودل الجزئي $L$ متمم في $M$ ، فإن للمودل الجزئي $L$ متمم في $N$ .

**السؤال الثالث:** (35 درجة) **1-** ليكن $M$ مودول حر فوق حلقة واحدية $R$ ، ولتكن $S$ مجموعة ما. برهن أنه يمكن كتابة كل تطبيق $g:S\to M$ بشكل وحيد كتركيب لتطبيقين، ونحصل على المخطط التبادلي الآتي

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle h} & \\ F & & \end{array}$$

حيث $h$ هومومورفيزم وحيد.

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، ونفرض أن $0\longrightarrow A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''\longrightarrow 0$ متتالية تامة من المودولات فوق $R$ والهومومورفيزمات. ولنأخذ المتتالية:

$$0\longrightarrow Hom(M,A')\xrightarrow{f_*}Hom(M,A)\xrightarrow{g_*}Hom(M,A'')$$

برهن أن $\ker g_*\subseteq \operatorname{Im} f_*$ .

**3-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة تبديلية واحدية، وليكن $M$ و $N$ مودلين فوق $R$. بين أن $M\otimes N\cong N\otimes M$ .

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2024-2-19

مكتبة A to Z

## السؤال الأول: [20]

1) $\forall x \in f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow f(x) \in f(M_1)$

$\Rightarrow \exists x' \in M_1 \; ; \; f(x) = f(x') \Rightarrow f(x) - f(x') = 0$

$\Rightarrow f(x-x') = 0 \Rightarrow x - x' \in \ker f \Rightarrow x \in M_1 + \ker f$

$\Rightarrow f^{-1}(f(M_1)) \subseteq M_1 + \ker f \quad (*)$ 6

من جهة ثانية فإنه:

$\forall x \in M_1 \Rightarrow f(x) \in f(M_1) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(M_1))$

$\Rightarrow M_1 \subseteq f^{-1}(f(M_1))$

ولدينا $\{0_N\} \subseteq f(M_1)$ ، ومنه:

$f^{-1}(\{0_N\}) \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow \ker f \subseteq f^{-1}(f(M_1))$ 6

$\Rightarrow M_1 + \ker f \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \quad \ldots (**)$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أن $f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \ker f$

2) بما أن $f$ هومومورفيزم زمري فإن:

$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in M$

2- أيا كان $x \in M$ و $n \in \mathbb{Z}$ فإن:

- إذا كان $n$ عدد صحيح موجب فإن: ($f$ هومومورفيزم زمري) $f(nx) = nf(x)$ 4

- إذا كان $n$ عدد صحيح سالب، لنضع $n = -t$ حيث $t$ عدد صحيح موجب، ويكون

$f(nx) = f((-t)x) = f(-(tx)) = -f(tx)$

$= -tf(x) = (-t)(f(x)) = nf(x)$ 4

مما سبق نجد أن $f$ $\mathbb{Z}$- هومومورفيزم.

## السؤال الثاني: [35]

1) في الفرض يوجد لدينا $f_i : M_i \longrightarrow N_i$ ، $i = 1, \ldots, n$ ايزومورفيزم على الأقل، كما أن كل عنصر $x$ من $M$ يكتب بصورة وحيدة بالشكل $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ، $x_i \in M_i$

لنعرف التطبيق $f : M \longrightarrow N$ بالشكل:

$f(x_1 + \ldots + x_n) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$ 2

$\forall x_i \in M_i, \; i = 1, \ldots, n$

مكتبة A to Z

$f$ معرف جيداً لأنه:

$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i \; , \; y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in M \; ; \; \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$ 4

$\Rightarrow x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow f_i(x_i) = f_i(y_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) = f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n)$

$\Rightarrow f(x_1 + \dots + x_n) = f(y_1 + \dots + y_n) \Rightarrow f(x) = f(y)$

إن $f$ هوفومورفيزم لأنه:

1] $\forall x, y \in M \Rightarrow x = x_1 + \dots + x_n \; , \; y = y_1 + \dots + y_n \; ; \; x_i, y_i \in M_i, i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f(x+y) = f((x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n))$ 4

$= f((x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n)) = f_1(x_1 + y_1) + \dots + f_n(x_n + y_n)$

$= f_1(x_1) + f_1(y_1) + \dots + f_n(x_n) + f_n(y_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) +$

$f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n) = f(x_1 + \dots + x_n) + f(y_1 + \dots + y_n)$

$= f(x) + f(y)$

2] $\forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow x = x_1 + \dots + x_n \; ; \; x_i \in M_i \; , \; i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f(\lambda x) = f(\lambda(x_1 + \dots + x_n)) = f(\lambda x_1 + \dots + \lambda x_n)$ 4

$= f_1(\lambda x_1) + \dots + f_n(\lambda x_n) = \lambda f_1(x_1) + \dots + \lambda f_n(x_n)$

$= \lambda(f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)) = \lambda f(x_1 + \dots + x_n) = \lambda f(x)$

$f$ متباين لأنه:

$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i \; , \; y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in M \; ; \; f(x) = f(y) \; , \; x_i, y_i \in M_i, i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) = f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n)$ 3

$\Rightarrow f_i(x_i) = f_i(y_i) \quad ; \; i = 1, \dots, n \quad (M = N_1 \oplus \dots \oplus N_n)$

$f$ متباين $\Rightarrow x_i = y_i \quad ; \; i = 1, \dots, n \Rightarrow x = y$

$f$ غامر لأنه:

$\forall y \in N \Rightarrow y = y_1 + \dots + y_n \; ; \; y_i \in N \; , \; i = 1, \dots, n$

$f$ غامر $\Rightarrow \exists x_i \in M_i \; ; \; y_i = f(x_i) \quad ; \; i = 1, \dots, n$ 3

$\Rightarrow \exists \; x = x_1 + \dots + x_n \in M \; ; \; y = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$

$= f(x_1 + \dots + x_n) = f(x)$

ماسبق نكرأن $f$ ايزومورفيزم اذن $M \cong N$

A to Z مكتبة

2) أ) لتكن $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ مجموعة جزئية منتهية من $V$ بحيث $0$ أحد عناصرها، ولتكن $x_1$، فإن:

$$1\cdot x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$$

والأمثال ليست كلها أصفار، حيث $1\neq 0$، أي أن $S$ مرتبطة خطياً. وبالتالي $S$ مرتبطة خطياً.

ب) بما أن المودول الجزئي $L$ قسماً في $M$، ولتكن $L'$، فإن $L\oplus L'=1$

$$\Rightarrow M = L+L' \quad + \quad L\cap L' = \{0\}$$

نضع $L''=N\cap L'$ فإن $L''$ مودول جزئي من $N$، ويكون:

$$L+L'' = L+(N\cap L') = N\cap(L+L') = N\cap M = N$$

$$L\cap L'' = L\cap(N\cap L') = N\cap(L\cap L') = N\cap\{0\} = \{0\}$$

أي أن المودول الجزئي $L$ قسماً في $N$ هو $N\cap L'$.

## السؤال الثالث [35]

1) (15) ليكن $F$ المودول الحر على $S$، ولتكن التطبيقة $h: F\to M$ بالشكل:

$$h(\theta) = \sum_{s\in S} \theta(s)\,g(s) \qquad \forall \theta\in F$$

والتطبيق $f: S\to F$ بالشكل:

$$f(s) = f_s \qquad \forall s\in S$$

إن $h$ تطبيق جيداً لأنه

$$\forall \theta,\theta'\in F\ ;\ \theta=\theta' \Rightarrow \theta(s)=\theta'(s) \quad \forall s\in S$$

$$\Rightarrow \sum_{s\in S}\theta(s)g(s) = \sum_{s\in S}\theta'(s)g(s) \Rightarrow h(\theta)=h(\theta')$$

إن $h$ هومومورفيزم لأن:

$$\forall \theta,\theta'\in F \Rightarrow h(\theta+\theta') = \sum_{s\in S}(\theta+\theta')(s)g(s)$$

$$= \sum_{s\in S}(\theta(s)+\theta'(s))g(s) = \sum_{s\in S}\theta(s)g(s) + \sum_{s\in S}\theta'(s)g(s)$$

$$= h(\theta)+h(\theta')$$

$$\forall \theta\in F,\lambda\in R \Rightarrow h(\lambda\theta) = \sum_{s\in S}(\lambda\theta)(s)g(s)$$

$$= \sum_{s\in S}\lambda\theta(s)g(s) = \lambda\Big(\sum_{s\in S}\theta(s)g(s)\Big) = \lambda h(\theta)$$

كما أن الشكل المعطى تبادلي لأنه

$$\forall s\in S \Rightarrow (h\circ f)(s) = h(f(s)) = h(f_s) = \sum_{s\in S} f_s(x)g(x)$$

$$= g(s) \Rightarrow h\circ f = g$$

A to Z مكتبة

كما أن $h$ وحيد لأنه إذا كان $h': F \longrightarrow M$ هومومورفيزم آخر بحيث $h' \circ f = g$، فإن:

$$h'(\theta) = h'\left(\sum_{s\in S} \theta(s) f_s\right) = \sum_{s\in S} \theta(s) h'(f_s)$$
$$= \sum_{s\in S} \theta(s) h'(f(s)) = \sum_{s\in S} \theta(s)(h' \circ f)(s)$$
$$= \sum_{s\in S} \theta(s) g(s) = h(\theta) \Rightarrow h = h'$$

وبالتالي $h$ وحيد.

$$\forall \theta \in \ker g_* \Rightarrow g_*(\theta) = 0 \Rightarrow g \circ \theta = 0$$
$$\Rightarrow (g \circ \theta)(x) = 0 \quad \forall x \in M$$
$$\Rightarrow g(\theta(x)) = 0 \Rightarrow \theta(x) \in \ker g = \operatorname{Im} f$$
$$\Rightarrow \exists a' \in A' ; \ \theta(x) = f(a')$$

وبما أن $f$ متباين فإن $a'$ وحيد بحيث $\theta(x) = f(a')$ لأنه إذا كان يوجد $b' \in A'$ بحيث $\theta(x) = f(b')$ فإن $f(a') = f(b')$ وبالتالي $a' = b'$

ولنعرف التطبيق $\theta_1 : M \longrightarrow A'$ بحيث $\theta_1(x) = a'$، فإن $\theta_1 \in \operatorname{Hom}(M, A')$ ويكون

$$\theta(x) = f(a') = f(\theta_1(x)) = (f \circ \theta_1)(x)$$
$$\Rightarrow \theta = f \circ \theta_1 \Rightarrow \theta = f_*(\theta_1) \Rightarrow \theta \in \operatorname{Im} f_*$$
$$\Rightarrow \ker g_* \subseteq \operatorname{Im} f_*$$

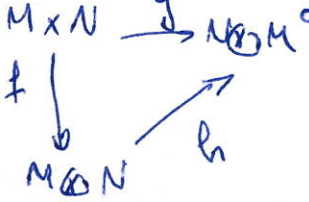
إن التطبيق $g : M \times N \longrightarrow N \otimes M$ المعرف بالشكل

$$g(x, y) = y \otimes x$$

ثنائي الخطية، وبالتالي يوجد هومومورفيزم وحيد

$$h : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$$

بحيث يكون $h(x \otimes y) = y \otimes x$



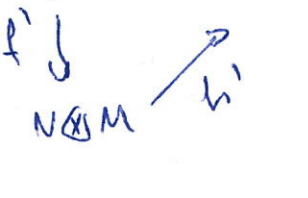

كما أن التطبيق $g' : N \times M \longrightarrow M \otimes N$ المعرف بالشكل:

$$g'(y, x) = x \otimes y$$

ثنائي الخطية، وبالتالي يوجد هومومورفيزم وحيد

$$h' : N \otimes M \longrightarrow M \otimes N$$

بحيث يكون $h'(y \otimes x) = x \otimes y$




واضح أن $h \circ h' = id_{N\otimes M}$ ، $h' \circ h = id_{M\otimes N}$ ، وعليه فإن $h$ ايزومورفيزم، وبالتالي

$$M \otimes N \cong N \otimes M$$

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الرابعة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة اتكميلية | اسم الطالب:

**السؤال الأول:** (25 درجة) ليكن $M$ و $N$ مودلين فوق حلقة $(R,+,.)$، وليكن $N_1,N_2$ مودولين جزئيين من $N$ ، وليكن $M_1$ مودول جزئي من $M$ ، ولنفرض أن $f:N\to M$ $R-$ هوموومورفيزم. برهن أن:

أ - $N_1+N_2$ مودول جزئي من $N$ .

ب - $f(f^{-1}(M_1))=M_1\cap \mathrm{Im}f$ .

**السؤال الثاني:** (35 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R-$ مودول، ولتكن $M_1,...,M_n$ مودولات جزئية من $M$ بحيث أن $M=M_1\oplus...\oplus M_n$ ، ولتكن $N_1,...,N_n$ مودولات جزئية من $M_1,...,M_n$ على الترتيب، وليكن $N=N_1+...+N_n$ . إذا كان $f:M\to M/N$ $R-$ايبومورفيزم معرف بالشكل $f(x)=x+N$ . بين أن:

$$M/N=f(M_1)\oplus...\oplus f(M_n)$$

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية ، وليكن $M$ $R-$ مودول، ولتكن $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}\ ;\ n\geq 2$ مجموعة جزئية منتهية من $M$ بحيث أن $M=<S>$. بين ان المجموعة $S\setminus\{x_k\}$ مولدة لـ $M$ ، حيث :

$$x_k=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} r_i x_i \quad ; \quad \lambda_i\in R \quad , \quad k\in\{1,2,...,n\}$$

**3-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R-$ مودول، وليكن $M_1,M_2$ مودولين جزئيين من $M$ بحيث أن $M_1,M_2$ نوثريين وبحيث $M=M_1+M_2$ . بين أن $M$ نوثري.

**السؤال الثالث:** (30 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وبفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق $R$

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$$

والهوموومورفيزمات تبادلي $p\downarrow \quad q\downarrow \quad r\downarrow$ ، وأن سطريه متتاليتان تامتان. برهن أنه إذا كان $r,p,g$

$$A'\xrightarrow{f'}B'\xrightarrow{g'}C'$$

ايبومورفيزمات فإن $q$ يكون ايبومورفيزم.

**2** -ليكن $M$ مودول فوق حلقة تبديلية واحدية $(R,+,.)$، وليكن $\theta:M\to M^{**}$ $R-$ هوموومورفيزم معرف بالشكل $\theta(x)=\theta_x\quad \forall x\in M$ وحيث $\theta_x:M^*\to R$ معرف بالشكل $\theta_x(f)=f(x)\quad \forall f\in M^*$. إذا كان $M$ مودول حر فوق $R$ فبين أن $\theta$ يكون مونومورفيزم.

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2023-9-18

A to Z

السؤال الأول: [25]

أ/ 1- واضح أن $\emptyset \neq N_1+N_2 \subseteq M$ لأن $0 \in N_1+N_2$

2- $\forall x,y \in N_1+N_2 \Rightarrow x=x_1+x_2$ و $y=y_1+y_2$

$x_1,y_1 \in N_1$ , $x_2,y_2 \in N_2$

ب/ حيث $\Rightarrow x-y=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)=\underbrace{(x_1-y_1)}_{\in N_1}+\underbrace{(x_2-y_2)}_{\in N_2} \in N_1+N_2$

3- $\forall x \in N_1+N_2, \lambda \in R \Rightarrow x=x_1+x_2$ ; $x_1 \in N_1$ , $x_2 \in N_2$ /6

$\Rightarrow \lambda x=\lambda(x_1+x_2)=\underbrace{\lambda x_1}_{\in N_1}+\underbrace{\lambda x_2}_{\in N_2} \in N_1+N_2$

ب/ $\forall y \in f(f^{-1}(N_1)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(N_1)$ ; $y=f(x)$

$\Rightarrow y=f(x) \in N_1 \Rightarrow f(f^{-1}(N_1)) \subseteq N_1$

وكذلك فإن

$f^{-1}(N_1) \subseteq M \Rightarrow f(f^{-1}(N_1)) \subseteq f(M)=\operatorname{Im} f$ /5

ومنه

$f(f^{-1}(N_1)) \subseteq N_1 \cap \operatorname{Im} f$ (A)

وفي جهة ثانية فإن:

$\forall y \in N_1 \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow y \in N_1$ و $y \in \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \exists x \in M$ ; $y=f(x) \Rightarrow f(x) \in N_1 \Rightarrow x \in f^{-1}(N_1)$ /5

$\Rightarrow y=f(x) \in f(f^{-1}(N_1)) \Rightarrow N_1 \cap \operatorname{Im} f \subseteq f(f^{-1}(N_1))$ (AA)

في (A) و (AA) تنتج المساواة.

السؤال الثاني: [35]

أ/ لدينا $\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \subseteq M/N$ وكما أن:

$\forall x+N \in M/N \Rightarrow x \in M \Rightarrow x=\sum_{i=1}^{n} x_i$ ; $x_i \in M_i (i=1,\dots,n)$

$\Rightarrow x+N=(\sum_{i=1}^{n} x_i)+N=\sum_{i=1}^{n}(x_i+N)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \in \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$

$\Rightarrow M/N \subseteq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$ /7

ومنه $M/N=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)$ ولبرهن أن $f(M_1),\dots,f(M_n)$ مستقلة خطياً.

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(z_i)=N$ ; $z_i \in M_i$

$\sum_{i=1}^{n}(z_i+N)=N \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} z_i)+N=N$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i \in N \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i=\sum_{i=1}^{n} x_i$ ; $x_i \in N_i \overset{N_i \subseteq M_i}{\Rightarrow} x_i \in M_i$

وبما أن $M=M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ ، فإن $(i=1,\dots,n)$ $z_i=x_i$

$\Rightarrow f(z_i)=f(x_i)$ $i=1,\dots,n$ /8

$=x_i+N=N$

وبالتالي $f(M_1),\dots,f(M_n)$ مستقلة ، ومنه:

$M/N=f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$

A to Z

2) إن المجموعة $S\setminus\{x_k\}$ تولد M لأنه:

$$\forall x\in M \Rightarrow x=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad ; \quad r_i\in R \Rightarrow x=r_k x_k+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} r_i x_i$$

$$=r_k\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_i x_i\Big)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} r_i x_i \qquad /1\text{ن}$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(r_k\lambda_i)x_i+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} r_i x_i=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(r_k\lambda_i+r_i)x_i$$

تركيب خطي لعناصر $S\setminus\{x_k\}$ أي .

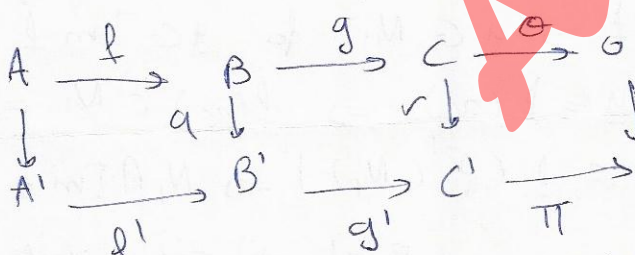
3) بما أن $M_2$ نوثري و $M_1\cap M_2$ مودول جزئي منه فإنه حسب نظرية $M_2/(M_1\cap M_2)$ يكون نوثري ، ولدينا : /1ن

$$M/M_1\cong (M_1+M_2)/M_1\cong M_2/(M_1\cap M_2)$$

أي أن $M/M_1$ نوثري ، وبما أن $M_1$ نوثري فإنه حسب نظرية فإن M يكون نوثري .

## السؤال الثالث [30]

1) لنأخذ المخطط




/5

حيث $\pi$ العم القانوني ، $\zeta$ الاحتواء القانوني ، $\theta$ السوموفورفزم الصفري. فإن هذا المخطط تبادلي وسطريه متتاليتان تامتان .

واضح أن سطري المخطط متتاليتان تامتان ، وأن $\zeta$ مونوموفزم ، ولنبين أن المربع اليميني تبادلي ، أي لنبين أن $\zeta\circ\theta=\pi\circ\gamma$ /5

$$\forall x\in C \Rightarrow \exists b\in B \; ; \; x=g(b)$$ بما أن g غامر ، ويكون:

$$(\zeta\circ\theta)(x)=\zeta(\theta(x))=\zeta(0)=0$$

$$(\pi\circ\gamma)(x)=\pi(\gamma(x))=\pi(\gamma(g(b)))=(\pi\circ(\gamma\circ g))(b)$$

$$=(\pi\circ(g'\circ\alpha))(b)=(\pi\circ g')(\alpha(b))=0$$

لذن $\pi\circ g'=0$ تركيب هوموموفزمين متتاليتين في متتالية تامة /3ن

$$\Rightarrow(\zeta\circ\theta)(x)=(\pi\circ\gamma)(x)=0 \Rightarrow \zeta\circ\theta=\pi\circ\gamma$$

الآن بما أن $\beta$ و $\gamma$ ايمورفزمين و $\zeta$ مونوموفزم فإن $\alpha$ يكون ايموفزم (حسب /4 من نظرية التماثل الأول)

2) لتكن $S$ قاعدة للمودول الحر M ، فإن كل عنصر $x$ من M يكتب بالشكل

$$x=r_1 s_1+r_2 s_2+\cdots+r_n s_n \quad ; \quad r_i\in R$$

/4

إن $\theta$ متباين لأنه

$\forall x \in \ker\theta \Rightarrow \theta(x)=0 \Rightarrow \theta_x = 0 \Rightarrow \theta_x(f)=0 \ \forall f \in H^*$

$\Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j\right)=0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(s_j)=0$

وبالتالي من أجل $f = s_i^*$ ($i=1,\dots,n$) عناصر ثنوية القاعدة $S'$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_i^*(s_j) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$ ; $i=1,\dots,n$

وبالتالي $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i = \sum_{i=1}^{n} 0 s_i = 0$

$\Rightarrow \ker\theta = \{0\}$ ؟ $\Rightarrow$ $\theta$ متباين

وبما أن $\theta$ هومومورفزم فإن $\theta$ هو تومومورفزم.

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثالثة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب: .....

**السؤال الأول:** (25 درجة) **1**- ليكن $M$ و $N$ مودولين فوق حلقة $(R,+,.)$، ولنرمز بـ $0$ و $0'$ لصفري $M$ و $N$ على الترتيب، وليكن $f:M\to N$ $R$- هوممورفيزم. برهن أن $\ker f$ مودول جزئي من $M$ .

**2**- ليكن $M$ مودول فوق حلقة $(R,+,.)$، ولتكن $P,N,T$ مودولات جزئية من $M$، بحيث أن $T\subseteq P$. برهن أن:

$$P\cap(N+T)=(P\cap N)+T$$

**السؤال الثاني:** (35 درجة) **1**- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R$- مودول، وليكن $N_1,N_2$ مودولين جزئيين من $M$ بحيث أن $M=N_1\oplus N_2$ . بين أن $M/N_1\cong N_2$ .

**2**- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وليكن $M,N$ مودولين فوق $R$، ولتكن $\{x_1,\dots,x_n\}$ , $\{y_1,\dots,y_n\}$ قاعدتين لـ $M$ و $N$ على الترتيب.

أ - برهن أن كل عنصر من $M$ يكتب كتركيب خطي وحيد لعناصر القاعدة $\{x_1,\dots,x_n\}$.

ب - بين أنه يوجد $R$- ايزوموفيزم وحيد للمودل $M$ في المودل $N$ من أجله $f(x_i)=y_i$ $(i=1,\dots,n)$ .

**السؤال الثالث:** (30 درجة) **1**- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وبفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق $R$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ p\downarrow & & q\downarrow & & r\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

والهوممورفيزمات تبادلي وأن سطريه متتاليتان تامتان. برهن أنه إذا كان $r,p,f'$ مونومورفيزمات فإن $q$ يكون مونومورفيزم.

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة تبديلية واحدية، وليكن $M$ مودول حر فوق $R$ بقاعدة منتهية $\{s_1,\dots,s_n\}$ . بين أن $M^*$ مودول حر فوق $R$ ، والمجموعة $\{s_1^*,\dots,s_n^*\}$ ، حيث:

$$s_i^*(s_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ; \quad i=j\\ 0 & ; \quad i\neq j\end{cases}$$

تكون قاعدة منتهية لـ $M^*$ .

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2023-7-23

A to Z

## السؤال الأول: [25]

1) أ) واضح أن $\emptyset \neq \ker f \subseteq M$ لأن $0 \in \ker f$ ، $f(0) = 0'$ 3/

ب) $\forall x_1, x_2 \in \ker f \Rightarrow f(x_1) = 0', f(x_2) = 0'$

$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0' - 0' = 0'$ 6/

$\Rightarrow x - x_2 \in \ker f$

ج) $\forall x \in \ker f, \lambda \in R \Rightarrow f(x) = 0'$ 6/

$\Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0' = 0' \Rightarrow \lambda x \in \ker f$

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن $\ker f$ مودول جزئي من $M$

2) لدينا

$P \cap N \subseteq P \Rightarrow (P \cap N) + T \subseteq P + T$

$P \cap N \subseteq N \Rightarrow (P \cap N) + T \subseteq N + T$ 5/

$\Rightarrow (P \cap N) + T \subseteq (P + T) \cap (N + T)$

$T \subseteq P \Rightarrow (P \cap N) + T \subseteq P \cap (N + T)$ (*)

وفي جهة ثانية لدينا:

$\forall x \in P \cap (N + T) \Rightarrow x \in P$ و $x \in N + T$

$\Rightarrow x = x_1 + x_2 \; ; \; x_1 \in N$ و $x_2 \in T$ 5/

$\Rightarrow x_1 = x - x_2 \in P$ ($x \in P$ و $x_2 \in T \subseteq P$)

$\Rightarrow x_1 \in N \cap P \Rightarrow x \in (P \cap N) + T$

$\Rightarrow P \cap (N + T) \subseteq (P \cap N) + T$ (**)

من (*) و (**) نتج المطلوب.

## السؤال الثاني: [35]

1) لنعرف التطبيق $f : N_2 \longrightarrow M/N_1$ بالشكل:

$\forall x \in N_2 \quad f(x) = x + N_1$

إن $f$ معرف جيداً لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in N_2 \; ; \; x_1 = x_2$ 3/

$\Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$f$ هومومورفزم لأنه:

A to Z

$\forall x_1, x_2 \in N_2 \Rightarrow f(x_1+x_2) = (x_1+x_2)+N_1$ 3 أ-

$= (x_1+N_1)+(x_2+N_1) = f(x_1)+f(x_2)$

$\forall x \in N_2, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda x + N_1 = \lambda(x+N_1)$ ب-

$= \lambda f(x)$

f متباين لأنه 3/

$\forall x_1, x_2 \in N_2 \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1+N_1 = x_2+N_1$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in N_1$

وبما أن $x_1, x_2 \in N_2$ فإن $x_1 - x_2 \in N_2$ ، وعليه:

$x_1 - x_2 \in N_1 \cap N_2$

3/ ولكن $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ لأن $M = N_1 \oplus N_2$ ، وبالتالي:

$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

f غامر لأنه:

$\forall y \in M/N_1 \Rightarrow \exists x = x_1+x_2 \in M \; ; \; y = x+N_1 \; , \; x_1 \in N_1 \; , \; x_2 \in N_2$

$\Rightarrow \exists x_2 \in N_2 \; ; \; y = x+N_1 = (x_1+x_2)+N_1 = (x_1+N_1)+(x_2+N_1)$

$= N_1+(x_2+N_1) = x_2+N_1 = f(x_2)$ 3/

مما سبق ينتج أن f أيزومورفزم ، وبالتالي $M/N_1 \cong N_2$

ج/ آ) ليكن x عنصر ما من M . بما أن $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعدة لـ M فهي مولدة لـ M ، فإن كل عنصر من M يكتب بالشكل:

$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in \mathbb{R}$

3/ لنفرض أن $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$

وبما أن $\{x_i\}$ مستقلة خطياً لأنها قاعدة فإن $\lambda_i - \mu_i = 0 \; (i = 1, \dots, n)$

وعليه $\lambda_i = \mu_i$ ، وعليه فإن x يكتب بشكل وحيد كتركيب خطي لعناصر $\{x_i\}$

ب/ بما أن $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعدة لـ M فإن كل عنصر x من M يكتب بالصورة

$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in \mathbb{R}$ وحيدة بالشكل

ولنعرف التطبيق $f: M \to N$ بالشكل:

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$

3/ إن f معرف جيداً لأنه

$\forall x, x' \in M \; ; \; x = x' \; , \; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; , \; x' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

$\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ و

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i \Rightarrow f(x) = f(y)$$

إذن f هو مورفيزم لأن:

1) $\forall x, x' \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; , \; x' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \; ; \; \lambda_i, \mu_i \in R$

$$\Rightarrow f(x + x') = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i = f(x) + f(x')$$

2/

2) $\forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in R$

$$\Rightarrow f(\lambda x) = f\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) y_i = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\right) = \lambda f(x)$$

2/

+ متباينة لأن:

$\forall x, x' \in M \; ; \; f(x) = f(x') \; , \; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ,$

$= \sum_{i=1}^{n} \quad ; \; \lambda_i, \mu_i \in R$

3/

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad ; \; i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \Rightarrow x = x'$$

f غامر لأن

$\forall y \in N \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \; ; \; \lambda_i \in R \Rightarrow \exists x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in M \; ;$

$y = f(x)$

3/

محاسبة لكي أن f - R - ايزومورفيزم ، وهو واضح لأنه:

إذا كان $g: M \longrightarrow N$ - R - ايزومورفيزم يحقق $g(x_i) = y_i \; (\forall i = 1, \ldots, n)$

فإن:

$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in R$

2/

$$\Rightarrow g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = f(x)$$

$$\Rightarrow f = g$$

## السؤال الثالث:

11

$$\begin{array}{ccccccc}
\ker f & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
\theta \downarrow & & \varphi \downarrow & & q \downarrow & & r \downarrow \\
0 & \xrightarrow{\tau} & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C'
\end{array}$$

5

A to Z

حيث $\tau$ التباين القانوني، $\theta$ الهومومورفزم الصفري، لـ
الاحتواء القانوني، فإن هذا المخطط تبادلي وسطريه متتاليتان
تامتان.
واضح أن سطري المخطط متتاليتان تامتان، وأن $\theta$ إبيومورفزم،
ولنبين أن المربع اليساري تبادلي، أي لنبين أن $p \circ \tau = \tau \circ \theta$.

$$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0$$ 3/

وبالتالي:

$$(\tau \circ \theta)(x) = \tau(\theta(x)) = \tau(0) = 0$$
$$(p \circ i')(x) = p(i'(x)) = p(x)$$

لدينا

$$f'(p(x)) = (f' \circ p)(x) = (q \circ f)(x) = q(f(x)) = q(0)$$ 7/
$$\Rightarrow p(x) \in \ker f'$$

ولكن $\ker f' = i'(\ker f)$ لأن $f'$ متباين، وبالتالي $p(x) = 0$ أي أن:

$$(\tau \circ \theta)(x) = (p \circ i')(x) = 0 \Rightarrow (\tau \circ \theta) = (p \circ i')$$

بما أن $p$ و $\tau$ هومومورفزم و $\theta$ إبيومورفزم فإن $q$ هومومورفزم
(مبرهنة (2) من نظرية المقيدريات الأربعة)
كما كل عنصر $x$ من $M$ يكتب بصورة وحيدة بالشكل:

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i \qquad r_i \in R$$

$$\Rightarrow s_i^*(x) = s_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} r_j s_j\right) = \sum_{j=1}^{n} r_j s_i^*(s_j) = r_i$$ 3/

- وبما أن المجموعة $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$ مولدة لـ $M^*$ لأنه

$$\forall f \in M^* \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(s_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} s_i^*(x) f(s_i) \overset{R \text{ تبادلية}}{=} \sum_{i=1}^{n} f(s_i) s_i^*(x)$$ 6
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} f(s_i) s_i^*\right)(x) \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{n} f(s_i) s_i^*$$

أي أن $f$ تركيب خطي لعناصر $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$

- وبما أن المجموعة $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$ مستقلة خطياً لأنه
إذا كان $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^* = 0$ فإن:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^*\right)(s_j) = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$ 6/
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^*(s_j) = 0 \qquad ; j = 1, \dots, n \subset \lambda_j = 0 \; ; j = 1, \dots, n$$

وبالتالي فإن المجموعة $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$ قاعدة منتهية لـ $M^*$،
و $M^*$ مولد حر فوق $R$.

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثالثة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب: .....

**السؤال الأول:** (25 درجة) **1-** ليكن $M$ و $N$ مودولين فوق حلقة $(R,+,.)$، ولنرمز بـ $0$ و $0'$ لصفري $M$ و $N$ على الترتيب، وليكن $f:M\to N$ $R$- هوموومورفيزم. إذا كان $M_1$ مودول جزئي من $M$ برهن أن $f(M_1)$ مودول جزئي من $N$ .

**2-** ليكن $M$ مودول فوق حلقة $(R,+,.)$، ولتكن $M_1,M_2,M_3$ مودولات جزئية من $M$ بحيث أن $M=\bigoplus_{i=1}^{3}M_i$ ، ولنفرض أن $L_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}M_j$ حيث $i=1,2,3$. برهن أن $M_1=L_2\cap L_3$ .

**السؤال الثاني:** (35 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وليكن $M,M'$ مودولين فوق $R$، ولتكن $\{x'_1,...,x'_n\}$ قاعدة لـ $M'$، وليكن $f:M\to M'$ $R$ – ايبوموورفيزم . بين أنه يوجد مودول جزئي حر $N$ من $M$ بحيث يكون $M=N\oplus\ker f$ .

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R$- مودول، ولتكن $M_1,...,M_n$ مودولات جزئية من $M$ بحيث أن $M=M_1\oplus...\oplus M_n$ ، ولتكن $N_1,...,N_n$ مودولات جزئية من $M_1,...,M_n$ على الترتيب، وليكن $N=N_1+...+N_n$ . إذا كان $f:M\to M/N$ $R$- ايبوموورفيزم معرف بالشكل $f(x)=x+N$ . بين أن:

$$M/N=f(M_1)\oplus...\oplus f(M_n)$$

**السؤال الثالث:** (30 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، ويفرض أن $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ متتالية تامة من المودولات فوق $R$ والهوموموورفيزمات. برهن أن:

أ- $g\circ f=0$.

ب- $B/\operatorname{Im}f\cong C$.

**2-** ليكن $M$ مودول حر فوق حلقة واحدية $(R,+,.)$، ولتكن $S$ قاعدة للمودول $M$. برهن أن $M\cong F$ (حيث $F$ المودول الحر على $S$).

**3-** ليكن $M$ مودول فوق حلقة تبديلية واحدية $(R,+,.)$، وليكن $\theta:M\to M^{**}$ $R$- هوموموورفيزم معرف بالشكل $\theta(x)=\theta_x$ $\forall x\in M$ وحيث $\theta_x:M^*\to R$ معرف بالشكل $\theta_x(f)=f(x)$ $\forall f\in M^*$. إذا كان $M$ مودول حر فوق $R$ فبين أن $\theta$ يكون مونوموورفيزم.

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2023-2-13

د. علياء حكيم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الأول [25]

واضح أن $\emptyset \neq f(M_1) \subseteq N$ (لأن $f(0) = 0' \in f(M_1)$)

ا) $\forall y_1, y_2 \in f(M_1) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in M_1 ; \quad y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$

$\Rightarrow y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(\underbrace{x_1 - x_2}_{\in M_1}) \in f(M_1)$ 3/

ب) $\forall y \in f(M_1), \lambda \in R \Rightarrow \exists x \in M_1 ; \quad y = f(x)$

$\Rightarrow \lambda y = \lambda f(x) = f(\underbrace{\lambda x}_{\in M_1}) \in f(M_1)$ 3/

من (ا) و(ب) و(ج) نجد أن $f(M_1)$ مودول جزئي من $N$.

$\forall x \in M_1 \Rightarrow x \in M_1 + M_3 = L_2 \quad \& \quad x \in M_1 \cap M_2 = L_3$ L2

$\Rightarrow x \in L_2 \cap L_3 \Rightarrow M_1 \subseteq L_2 \cap L_3 \quad \dots (*)$ 2/

وكذلك فإن:

$\forall x \in L_2 \cap L_3 \Rightarrow x \in M \quad \& \quad x \in L_2 \quad \& \quad x \in L_3$

وبالتالي يمكن كتابة $x$ بأحد الأشكال الآتية:

$x = x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad x_i \in M_i \ , \ i = 1,2,3$

$x = x_1' + x_3' \quad ; \quad x_1' \in M_1 \ , \ x_3' \in M_3$ 3/

$x = x_1'' + x_2'' \quad ; \quad x_1'' \in M_1 \ , \ x_2'' \in M_2$

من العلاقتين (أ) و(ب) ومع ملاحظة أن $M = \overset{3}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$، نجد أن

$x_2 = 0 \quad \dots (4')$

علماً أن $M = \bigoplus_{i=1}^{3} M_i$ أن: من المعادلتين (1') و (3) نجد أنه مع ملاحظة

$x_3 = 0 \quad \dots (5')$

من (1') و (4') و (5') نجد أن $x = x_1 \in M_1$ وعليه:

$$L_2 \cap L_3 \subseteq M_1 \quad \dots (**)$$

من (*) و (**) نجد أن $M_1 = L_2 \cap L_3$

## السؤال الثاني: [35]

(20)

1) إن التطبيق $f: M \longrightarrow M'$ معرف كما يلي، وبالتالي من أجل العناصر $x_1, \dots, x_n$ يوجد عناصر $x_1', \dots, x_n'$ في $M$ بحيث $f(x_i) = x_i'$ ; $i = 1, \dots, n$، ولكن $N$ هو المولد الجزئي من $M$ المولد بالمجموعة $\{x_1, \dots, x_n\}$. إن شرط المجموعة مستقلة خطياً لأنه، إذا كان:

3/ $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \quad ; \lambda_i \in R \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0'$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0' \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' = 0'$$

وبما أن $\{x_1', \dots, x_n'\}$ قاعدة لـ $M'$ فهي مستقلة خطياً، وبالتالي $\lambda_i = 0$ ; $i = 1, \dots, n$

وبالتالي هي قاعدة لـ $N$، وبالتالي $N$ مولد حزني حر من $M$، ويكون:

$$\forall x \in M \Rightarrow f(x) \in M' \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' \quad ; \lambda_i \in R$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$$

6/ $$\Rightarrow f\left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0' \Rightarrow x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \ker f$$

$$\Rightarrow x \in N + \ker f \Rightarrow M \subseteq N + \ker f \Rightarrow M = N + \ker f$$

حيث أن:

$$\forall y \in N \cap \ker f \Rightarrow y \in N \ \& \ y \in \ker f$$

$$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ \& \ f(y) = 0' \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0$$

6 $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ ; i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow N \cap \ker f = \{0\}$$

وعليه $M = N \oplus \ker f$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

15

$\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \subseteq M/N$ ، بحيث أنه:

$\forall x \in N \subset M/N \Rightarrow x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad x_i \in$

$\Rightarrow x+N = (\sum_{i=1}^{n} x_i)+N \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i+N) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

$\Rightarrow M/N \subseteq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$

وعليه $M/N = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$. لبرهن أن $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة إذا كان

$\sum_{i=1}^{n} f(z_i) = N \quad ; \quad z_i \in M_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(z_i+N) = N \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i + N = N \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i \in N$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad x_i \in N_i \xrightarrow{N_i \subseteq M_i} x_i \in M_i$

وبما أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ فإن:

$z_i = x_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f(z_1) = f(x_1) \Rightarrow x_i + N = N$

وبالتالي $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة، وعليه

$M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$

السؤال الثالث: [30]

1) أ) بما أن المتتالية تامة فإن $\text{Im}f = \ker g$، وبالتالي:

$\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow f(x) \in \ker g \Rightarrow g(f(x)) = 0$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow g \circ f = 0$

ب) بما أن المتتالية تامة فإن $g$ غامر، و $\text{Im}f = \ker g$، وبالتالي

لدينا $g: B \to C$ تطبيق هومومورفيزم غامر نواته $\text{Im}f$

وعليه حسب النظرية الأولى في الهومومورفيزم $B/\text{Im}f \cong C$

2) إذا كان من نظرية سابقة لدينا المخطط الآتي تبادلي:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow_{h} & \\ F & & \end{array}$$

حيث $\varphi$ هو التواء القانوني

16

وبالتالي $\varphi = f \circ h$، و $h$ هومومورفيزم

إن $h$ غامر لأنه $\text{Im}h$ مولد جزئي من $M$ ويحوي $S$ لأنه

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\forall s \in S' \Rightarrow s = \gamma(s) = (h \circ f)(s) = h(f(s))$

$= h(f_s) \in \mathrm{Im}\, h \Rightarrow S' \subseteq \mathrm{Im}\, h$

أي $S'$ تولد $M$ فإن $\mathrm{Im}\, h = M$، أي أن $h$ غامر. /b

$h$ متباين لأنه:

$$\forall \theta \in \ker h \Rightarrow 0 = h(\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s)\gamma(s) = \sum_{s \in S} \theta(s)s$$

بما أن $\theta \in F$ و $\theta(s) = 0$ من أجل جميع عناصر $S$ لأنها عدد منته

منها، ولتكن $x_1, \dots, x_n$ فإن $\sum_{i=1}^{n} \theta(x_i)x_i = 0$ /c

وبما أن $S$ قاعدة فهي مستقلة خطياً، وبالتالي $\theta(x_i) = 0 \; ; \; i = 1, \dots, n$

أي أن $\theta = 0$، وبالتالي $\ker h = \{0\}$، أي أن $h$ متباين. حاصل

فإن $h$ إيزومورفزم، وبالتالي $F \cong M$.

ج) لتكن $S$ قاعدة ما للمودول $M$، فإن كل عنصر $x$ من $M$ يكتب

بالشكل:

$$x = r_1 s_1 + \dots + r_n s_n \; ; \; s_i \in S \; , \; r_i \in R$$

فإن $\theta$ متباين لأنه: /b

$$\forall x \in \ker\theta \Rightarrow \theta(x) = 0 \Rightarrow \theta_x = 0 \Rightarrow \theta_x(f) = 0 \quad \forall f \in M^*$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^{n} r_j s_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} r_j f(s_j) = 0$$

وبالتالي من أجل $f = s_i^*$ $(i = 1, \dots, n)$ عناصر ثنوية القاعدة $S$ فإن:

$$\sum_{j=1}^{n} r_j s_i^*(s_j) = 0 \Rightarrow r_i = 0 \; ; \; i = 1, \dots, n$$

وبالتالي $z = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i = \sum_{i=1}^{n} 0\, s_i = 0$ وعليه $\ker\theta = \{0\}$ وبالتالي

$\theta$ متباين، وبما أن $\theta$ هومومورفزم فإن $\theta$ هو نومومورفزم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الرابعة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة التكميلية | اسم الطالب: .....

**السؤال الأول:** (25 درجة) **1-** ليكن $M$ و $N$ مودلين فوق حلقة واحدية $(R,+,.)$، وليكن $f:M\to N$ $R-$ هوموورفيزم، وليكن $M_1$ مودول جزئي من $M$. برهن أن $f^{-1}(f(M_1))=M_1+\ker f$ .

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R-$ مودول، ولتكن $N$ مجموعة جزئية من $M$، ، ولتكن $A$ مثالية يسارية من الحلقة $R$. برهن أن المجموعة:

$$AN=\{x\in M\mid x=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \quad ; \quad a_i\in A, x_i\in N, n\in Z^+\}$$

تشكل مودول جزئي من $M$.

**السؤال الثاني:** (35 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M,M'$ مودولين فوق $R$، وليكن $f:M\to M'$ $R-$ هوموورفيزم . برهن أن:

$$M/\ker f\cong f(M)$$

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية ، وليكن $M$ $R-$ مودول، ولتكن $S=\{x_1,x_2,...,x_n \quad ; \quad n\geq 2\}$ مجموعة جزئية منتهية من $M$ بحيث أن $M=<S>$. بين ان المجموعة $S\setminus\{x_k\}$ مولدة لـ $M$ ، حيث :

$$x_k=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}r_ix_i \quad ; \quad \lambda_i\in R \quad , \quad k\in\{1,2,...n\}$$

**3-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R-$ مودول، وليكن $L,N$ مودولين جزئيين من $M$ بحيث أن $L\subseteq N$ . بين أنه إذا كان للمودل الجزئي $L$ متمم في $M$ فإن للمودل الجزئي $L$ متمم في $N$ .

**السؤال الثالث:** (30 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وبفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق $R$

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$$

والهوموورفيزمات تبادلي $r\downarrow \quad q\downarrow \quad p\downarrow$ ، وأن سطريه متتاليتان تامتان. برهن أنه إذا كان $r,p,g$

$$A'\xrightarrow{f'}B'\xrightarrow{g'}C'$$

ايبوموورفيزمات فإن $q$ يكون ايبوموورفيزم.

**2** -ليكن $M$ مودول فوق حلقة تبديلية واحدية $(R,+,.)$. بين أنه يوجد $R-$ هوموورفيزم $\theta:M\to M^{**}$.

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2022-9-5

## السؤال الأول: [25]

$\forall x \in f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow f(x) \in f(M_1) \Rightarrow \exists x' \in M_1 ; f(x) = f(x')$ 1

$\Rightarrow f(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' \in \ker f \Rightarrow x \in M_1 + \ker f$

$\Rightarrow f^{-1}(f(M_1)) \subseteq M_1 + \ker f \quad \dots (*)$ 2

وفي جهة ثانية فإن:

$\forall x \in M_1 \Rightarrow f(x) \in f(M_1) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow M_1 \subseteq f^{-1}(f(M_1))$

ولدينا $\{0_N\} \subseteq f(M_1)$ وعليه:

$f^{-1}(\{0_N\}) \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow \ker f \subseteq f^{-1}(f(M_1))$

وبالتالي:

$f^{-1}(f(M_1)) \supseteq M_1 + \ker f \quad \dots (**)$ 5

من (*) و (**) نجد أن:

$f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \ker f$

3) واضح أن $\varnothing \neq AN \subseteq M$ $(0_M \in AN)$

a) $\forall x_1, x_2 \in AN \Rightarrow x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i , \; x_2 = \sum_{j=1}^{m} a'_j x'_j$

$a_i, a'_j \in A , \; x_i, x'_j \in N , \; n, m \in \mathbb{Z}^+$ 6 حيث

$\Rightarrow x_1 - x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{m} a'_j x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{n} (-a'_j) x'_j \in A$

b) $\forall x \in AN, \; \lambda \in R \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i ; \; a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow \lambda x = \lambda \left( \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) x_i \in AN$

$\Rightarrow$ A لأن A مثالية

6 ما سبق ينتج أن AN مودول جزئي من M.

## السؤال الثاني: [35]

1 لنأخذ التطبيق $\varphi : M/\ker f \longrightarrow f(M)$ المعرف بالشكل

$\varphi(x + \ker f) = f(x) \quad \forall x \in M$

فإن $\varphi$ معرف جيداً لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in M ; \; x_1 + \ker f = x_2 + \ker f \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f$

$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ 4

$\Rightarrow \varphi(x_1 + \ker f) = \varphi(x_2 + \ker f)$

- $\varphi$ متباين لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in M ; \; \varphi(x_1 + \ker f) = \varphi(x_2 + \ker f)$ 4

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow x_1 + \ker f = x_2 + \ker f$

$\varphi$ غامورفزم لأنه:

$$\forall y \in f(M) \Rightarrow \exists x \in M \; ; \; y = f(x) \Rightarrow \exists x + \ker f \in M/\ker f$$
$$y = \varphi(x + \ker f)$$

- $\varphi$ هاذ مورفزم لأنه:

1- $\forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow \varphi((x_1 + \ker f) + (x_2 + \ker f)) =$
$$\varphi((x_1 + x_2) + \ker f) = f(x_1) + f(x_2)$$
$$= \varphi(x_1 + \ker f) + \varphi(x_2 + \ker f)$$

2- $\forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow \varphi(\lambda(x + \ker f)) = \varphi(\lambda x + \ker f)$
$$= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi(x + \ker f)$$

ماسبق نرى أن $\varphi$ ايزومورفزم، وبالتالي $M/\ker f \cong f(M)$

2) إن المجموعة $\{x_k\}$ تولد $M$ لأنه:

$$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \; ; \; r_i \in R \Rightarrow x = r_k x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i$$
$$= r_k \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i x_i \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i$$
$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (r_k \lambda_i) x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (r_k \lambda_i + r_i) x_i$$

3) بما أن للمودول الجزئي $L$ متمم في $M$ وليكن $L'$ فإن $M = L \oplus L'$

$$\Rightarrow M = L + L' \quad \text{و} \quad L \cap L' = \{0\}$$

لنضع $L'' = N \cap L'$ فإن $L''$ مودول جزئي من $N$ ويكون:

$$L + L'' = L + (N \cap L') = N \cap (L + L') = N \cap M = N$$
$$L \cap L'' = L \cap (N \cap L') = N \cap (L \cap L') = N \cap \{0\} = \{0\}$$

أي أن للمودول الجزئي $L$ متمم في $N$ هو $N \cap L'$

السؤال الثالث: [30]

1) لنأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{\sigma} & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' & \xrightarrow{\pi} & \operatorname{coker} g' \end{array}$$

حيث $\pi$ العمر القانوني، $\tau$ الاحتواء القانوني، $\sigma$ الهومومورفزم الصفري فإن هذا المخطط تبادلي وسطره متتاليتان تاقصتان.

واضح أن $\pi$ و $\tau$ متتاليان تاقصان ، وأن $\theta$ مونومورفزم
ولنبين أن المربع اليمني تبادلي ، أي لنبين $\tau \circ \theta = \pi \circ r$ .

6/ $\forall x \in C$ ، وبما أن $g$ غامر $\Rightarrow \exists b \in B ; x = g(b)$
يكون

$$(\tau \circ \theta)(x) = \tau(\theta(x)) = \tau(0) = 0$$

$$(\pi \circ r)(x) = \pi(r(x)) = \pi(r(g(b))) = (\pi \circ (r \circ g))(b)$$

$$= (\pi \circ (g' \circ q))(b) = (\pi \circ g')(q(b)) = 0$$

6/ $\Rightarrow (\tau \circ \theta)(x) = (\pi \circ r)(x) = 0 \Rightarrow \tau \circ \theta = \pi \circ r$

الآن بما أن $p, r$ إبيمورفزم فإن $q$ إبيمورفزم
(هي (1) من نظرية التمثيل الأولية) .

7/ من أجل كل عنصر $x$ من $M$ ، لنعرف التطبيق $\theta_x : M^* \to R$ :
بالشكل:

$$\forall f \in M^* = Hom(M, R) \qquad \theta_x(f) = f(x)$$

لنبين أن $\theta_x \in M^{**} = Hom(M^*, R)$ ، أي أن $\theta_x$ هومومورفزم ، وذلك لأنه:

1) $\forall f, g \in M^* \Rightarrow \theta_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \theta_x(f) + \theta_x(g)$$

2) $\forall f \in M^*, \lambda \in R \Rightarrow \theta_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \theta_x(f)$

ولنبين أن التطبيق $\theta : M \to M^{**}$ المعرف بالشكل: $\theta(x) = \theta_x$

8/ يكون هومومورفزم:

1) $\forall x, y \in M \; \forall f \in M^* \Rightarrow (\theta(x+y))(f) = \theta_{(x+y)}(f)$

$$= f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta_x(f) + \theta_y(f)$$

$$= (\theta_x + \theta_y)(f) = (\theta(x) + \theta(y))(f)$$

8/ $\Rightarrow \theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$

2) $\forall x \in M, \lambda \in R, f \in M^* \Rightarrow (\theta(\lambda x))(f) = \theta_{(\lambda x)}(f)$

$$= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \theta_x(f) = (\lambda \theta_x)(f)$$

$$= (\lambda \theta(x))(f) \Rightarrow \theta(\lambda x) = \lambda \theta(x)$$

أي أن $\theta : M \to M^{**}$ هومومورفزم .

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثالثة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب:.....

**السؤال الأول:** (30 درجة) **1-** ليكن $M$ و $N$ مودولين فوق حلقة $(R,+,.)$، ولنرمز بـ $0$ و $0'$ لصفري $M$ و $N$ على الترتيب، وليكن $f:M\to N$ $R-$ هوموومورفيزم. إذا كان $M_1$ مودول جزئي من $M$ برهن أن $f(M_1)$ مودول جزئي من $N$ .

**2-** ليكن $M$ مودل فوق حلقة $(R,+,.)$، ولتكن $S$ محموعة جزئية غير خالية من $M$ ، ولتكن $Ann_R(S)=\{\lambda\in R\,|\,\lambda x=0 \quad \forall x\in S\}$ . برهن أن $Ann_R(S)$ مثالية يسارية من $R$ ، وإذا كان $S$ مودول جزئي من $M$ فإن $Ann_R(S)$ مثالية.

**السؤال الثاني:** (30 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R-$ مودول، وليكن $N_1,N_2$ مودولين جزئيين من $M$ بحيث أن $M=N_1\oplus N_2$ . بين أن $M/N_1\cong N_2$ .

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية ، وليكن $M$ $R-$ مودول، ولتكن $S=\{x_1,x_2,...,x_n \;;\; n\geq 2\}$ مجموعة جزئية منتهية من $M$ بحيث أن $M=<S>$ . بين ان المجموعة $S\setminus\{x_k\}$ مولدة لـ $M$ ، حيث :

$$x_k=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\lambda_i x_i \quad ; \quad \lambda_i\in R \quad , \quad k\in\{1,2,...,n\}$$

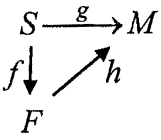
**3-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R-$ مودول، وليكن $M_1,M_2$ مودولين جزئيين من $M$ بحيث أن $M_1,M_2$ نوثريين وبحيث $M=M_1+M_2$ . بين أن $M$ نوثري.

**السؤال الثالث:** (30 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وبفرض أن $0\longrightarrow A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''\longrightarrow 0$ متتالية تامة من المودولات فوق $R$ والهوموومورفيزمات. برهن أن المتتالية:

$$0\longrightarrow Hom(M,A')\xrightarrow{f_*}Hom(M,A)\xrightarrow{g_*}Hom(M,A'')$$

الناتجة من المتتالية المفروضة تامة.

**2** -ليكن $M$ مودول حر فوق حلقة واحدية $R$ ، ولتكن $S$ مجموعة ما. برهن أنه يمكن كتابة كل تطبيق $g:S\to M$ بشكل وحيد كتركيب لتطبيقين، ونحصل على المخطط التبادلي الآتي




حيث $h$ هوموومورفيزم وحيد.

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2022-7-17

د. علياء حكيم

السؤال الأول: [30]

1) أ) واضح أن $f(M_1) \subseteq N \neq \emptyset$ (لأن $f(0) = 0' \in N$) 3/

$\forall y_1, y_2 \in f(M_1) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in M_1 ; y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ ب)

$\Rightarrow y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(\underbrace{x_1 - x_2}_{\in M_1}) \in f(M_1)$ 5

$\forall y \in f(M_1), \lambda \in R \Rightarrow \exists x \in M_1 ; y = f(x) \Rightarrow \lambda y = \lambda f(x)$

$= f(\underbrace{\lambda x}_{\in M_1}) \in f(M_1)$ 5

2) أ- واضح أن $\emptyset \neq Ann_R(S') \subseteq R$ (لأن $0 \in Ann_R(S')$) 3/

ب- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in Ann_R(S') \Rightarrow \lambda_1 x = 0 , \lambda_2 x = 0 \quad \forall x \in S'$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = \lambda_1 x - \lambda_2 x = 0 - 0 = 0$ 4/

$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \in Ann_R(S')$

ج- $\forall \lambda \in Ann_R(S'), a \in R \Rightarrow \lambda x = 0 \quad \forall x \in S'$ 4/

$\Rightarrow (a\lambda)x = a(\lambda x) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow a\lambda \in Ann_R(S')$

- لبرهان أن $Ann_R(S')$ مثالية يكفي أن نبرهن الشرط:

$\forall \lambda \in Ann_R(S'), a \in R \Rightarrow \lambda a \in Ann_R(S')$

بما أن $S'$ مولد جزئي من $M$، فإن:

$\forall x \in S, a \in R \Rightarrow ax \in S'$ 6/

لدينا:

$\forall \lambda \in Ann_R(S'), a \in R \Rightarrow \lambda x = 0 \quad \forall x \in S'$

$\Rightarrow (\lambda a)x = \lambda(\underbrace{ax}_{\in S'}) = 0 \Rightarrow \lambda a \in Ann_R(S')$

أي أن $Ann_R(S')$ مثالية يسارية من $R$، هي مثالية يسارية سابقاً وبالتالي $Ann_R(S')$ مثالية من $R$.

السؤال الثاني: [30]

1) لنعرف التطبيق $f : N_2 \longrightarrow M/N_1$ بالشكل:

$f(x) = x + N_1 \quad \forall x \in N_2$

بيان $f$ معرف جيداً لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in N_2 \quad ; \quad x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ 3/

$f$ هو موروفيزم لأنه:

1- $\forall x_1, x_2 \in N_2 \Rightarrow f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + N_1$

$= (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1) = f(x_1) + f(x_2)$ 1/

2- $\forall x \in N_2, \ \lambda \in R \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda x + N_1 = \lambda(x + N_1) = \lambda f(x)$

$f$ متباين لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in N_2 \quad ; \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_2$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in N_1$ 1/

وبما أن $x_1, x_2 \in N_2$ فإن $x_1 - x_2 \in N_2$ ، ومنه $x_1 - x_2 \in N_1 \cap N_2$

ولكن $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ لأن $M = N_1 \oplus N_2$ ، ومنه:

$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$f$ غامر لأنه:

$\forall y \in M/N_1 \Rightarrow \exists x = x_1 + x_2 \in M \quad ; \quad y = x + N_1 \ , \ x_1 \in N_1 \ , \ x_2 \in N_2$

$\Rightarrow \exists x_2 \in N_2 \quad ; \quad y = x + N_1 = (x_1 + x_2) + N_1$

$= (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1) = N_1 + (x_2 + N_1)$

$= x_2 + N_1 = f(x_2)$ 1/

مما سبق نستنتج أن $f$ أيزومورفيزم ، وبالتالي $M/N_1 \cong N_2$

2| بما أن المجموعة $\{x_k\}$ تولد $M$ لأنه:

$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad ; \ r_i \in R \Rightarrow x = r_k x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i$ (8)

$= r_k \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i x_i \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (r_k \lambda_i) x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} r_i x_i$ 1/

$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (r_k \lambda_i + r_i) x_i$ 1/

3| بما أن $M_2$ نوثري و $M_1 \cap M_2$ مولد جزئي منه، فإنه حسب النظرية السابقة، $M_2/(M_1 \cap M_2)$ يكون نوثري ، ولدينا: (1)

$M/M_1 \cong (M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2)$

أي أن $M/M_1$ نوثري ، وبما أن $M_1$ نوثري فإنه حسب نظرية يكون $M$ نوثري.

## السؤال الثالث :

1/ لنبين أن المتتالية الأولى تامة. لدينا التطبيق $f$ متباين، $g$ غامر و $g\circ f=0$ و $f_*$ متباين لأنه: (18)

$\forall \theta\in \ker f_* \Rightarrow f_*(\theta)=0 \Rightarrow f\circ\theta=0 \Rightarrow \theta=0$ ($f$ متباين)

و بالتالي $\ker f_*=\{0\}$ ، أي أن $f_*$ متباين. و بالتالي المتتالية

$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,A') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M,A)$ تامة

لنبين أن $\mathrm{Im} f_*=\ker g_*$

$\forall \theta\in \mathrm{Im} f_* \Rightarrow \exists \theta_1\in \mathrm{Hom}(M,A') \; ; \; \theta=f_*(\theta_1) \Rightarrow \theta=f\circ\theta_1$

و يكون:

$g_*(\theta)=g\circ\theta=g\circ(f\circ\theta_1)=(g\circ f)\circ\theta_1=0 \Rightarrow \theta\in\ker g_*$ 5

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Im} f_*\subseteq \ker g_*}$

$\forall \theta\in\ker g_* \Rightarrow g_*(\theta)=0 \Rightarrow g\circ\theta=0 \Rightarrow (g\circ\theta)(x)=0 \quad \forall x\in M$

$\Rightarrow g(\theta(x))=0 \Rightarrow \theta(x)\in \ker g=\mathrm{Im} f$ 8

$\Rightarrow \exists a'\in A' \; ; \; \theta(x)=f(a')$

و بما أن $f$ متباين فإن $a'$ وحيد بحيث $\theta(x)=f(a')$

لأنه إذا كان يوجد $b'\in A'$ بحيث $\theta(x)=f(b')$ فإن $f(a')=f(b')$

و بالتالي $a'=b'$

و لتعرف التطبيق $\theta_1: M\longrightarrow A'$ بحيث $\theta_1(x)=a'$ ، فإن

$\theta_1\in\mathrm{Hom}(M,A')$ ، و يكون

$\theta(x)=f(a')=f(\theta_1(x))=(f\circ\theta_1)(x) \Rightarrow \theta=f\circ\theta_1$

$\Rightarrow \theta=f_*(\theta_1) \Rightarrow \theta\in\mathrm{Im} f_* \Rightarrow \ker g_*\subseteq \mathrm{Im} f_*$

و منه $\mathrm{Im} f_*=\ker g_*$ و بالتالي فإن المتتالية

$\mathrm{Hom}(M,A') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M,A) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(M,A'')$ تامة، و بالتالي

المتتالية المعروفة تامة

2/ ليكن $F$ المودول الحر على $S$ ، و لتعرف التطبيقة $h: F\longrightarrow M$ بالشكل (12)

$$h(\theta)=\sum_{s\in S'}\theta(s)\,g(s)$$

و التطبيق $f: S'\longrightarrow F$ بالشكل $f(s)=f_s$

فإن $h$ معرف جيداً لأنه:

$\forall \theta,\theta'\in F \; ; \; \theta=\theta' \Rightarrow \theta(s)=\theta'(s) \quad \forall s\in S'$ 3

$\Rightarrow \sum_{s\in S'}\theta(s)g(s)=\sum_{s\in S'}\theta'(s)g(s) \Rightarrow h(\theta)=h(\theta')$

بيان h هو موضوعي لأنه:

1/ $\forall \theta, \theta' \in F \Rightarrow h(\theta+\theta') = \sum_{s\in S'} (\theta+\theta')(s)\, g(s) = \sum_{s\in S'} (\theta(s)+\theta'(s))$

$= \sum_{s\in S'} \theta(s) g(s) + \sum_{s\in S'} \theta'(s) g(s) = h(\theta) + h(\theta')$ ✓

2/ $\forall \theta \in F, \lambda \in R \Rightarrow h(\lambda\theta) = \sum_{s\in S'} (\lambda\theta)(s) g(s)$ ✓

$= \sum_{s\in S} \lambda\theta(s) g(s) = \lambda \left( \sum_{s\in S} \theta(s) g(s) \right) = \lambda h(\theta)$

كما أن الشكل العطى تبادلي لأنه

$\forall s \in S' \Rightarrow (h \circ f)(s) = h(f(s)) = h(f_s) = \sum_{x\in S'} f_s(x)\, g(x)$ ✓

$= g(s) \Rightarrow h \circ f = g$.

كما أن h وحيد لأنه إذا كان $h' : F \longrightarrow M$ موضوعي آخر بحيث $h' \circ f = g$

فإن:

$h'(\theta) = h'\left( \sum_{s\in S'} \theta(s) f_s \right) = \sum_{s\in S} \theta(s) h'(f_s)$

$= \sum_{s\in S'} \theta(s) h'(f(s)) = \sum_{s\in S} \theta(s) (h' \circ f)(s)$ ✓

$= \sum_{s\in S'} \theta(s) g(s) = h(\theta) \Rightarrow h' = h$

وبالتالي h وحيد.

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثالثة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب: .....

**السؤال الأول:** (25 درجة) ليكن $M$ و $N$ مودولين فوق حلقة $(R,+,.)$، وليكن $N_1,N_2$ مودولين جزئيين من $N$ ، وليكن $M_1$ مودول جزئي من $M$ ، ولنفرض أن $f:N\to M$ $R-$ هوموморفيزم. برهن أن:

أ- $N_1+N_2$ مودول جزئي من $N$ .

ب- $f(N_2\cap f^{-1}(M_1))=f(N_2)\cap M_1$

**السؤال الثاني:** (35 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M,M'$ مودولين فوق $R$، وليكن $f:M\to M'$ $R$ – هوموморفيزم . برهن أن:

$$M/\ker f\cong f(M)$$

ثم استنتج أنه إذا كان $R$ $f':R^2\to R$ $-R$ هوموморفيزم معرف بالشكل $\forall x_1,x_2\in R$ $f'(x_1,x_2)=x_2$ فإن $R\cong coimf'$ .

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وليكن $M,N$ مودولين فوق $R$، ولتكن $\{x_1,...,x_n\}$ ، $\{y_1,...,y_n\}$ قاعدتين لـ $M$ و $N$ على الترتيب. بين أنه يوجد $R-$ ايزوموморفيزم وحيد للمودل $M$ في المودول $N$ بحيث يكون $f(x_i)=y_i$ $(i=1,...,n)$ .

**السؤال الثالث:** (30 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وبفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق $R$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ p\downarrow & & q\downarrow & & r\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

والهوموморفيزمات تبادلي ، وأن سطريه متتاليتان تامتان.

أ- برهن أنه إذا كان $r,p,g$ ايبوморفيزمات فإن $q$ يكون ايبوморفيزم.

ب- إذا كان $M$ مودول فوق $R$ ، ولنأخذ المتتالية $Hom(M,A)\xrightarrow{f_*}Hom(M,B)\xrightarrow{g_*}Hom(M,C)$ .

برهن أن $\operatorname{Im} f_*\subseteq\ker g_*$ .

**2-** ليكن $M$ مودول فوق حلقة تبديلية واحدية $(R,+,.)$. بين أنه يوجد $R-$ هوموморفيزم $\theta:M\to M^{**}$ .

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2022-2-20

د. علياء حكيم

## السؤال الأول: [25]

1) أ) واضح أن $\phi \neq N_1+N_2 \subseteq M$ لأن $0 \in N_1+N_2$

$\forall x,y \in N_1+N_2 \Rightarrow x=x_1+x_2$ و $y=y_1+y_2$ ; $x_1,y_1 \in N_1$ , $x_2,y_2 \in N_2$

$\Rightarrow x-y=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)$

$=(x_1-y_1)+(x_2-y_2) \in N_1+N_2$

$\forall x \in N_1+N_2$ , $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x=x_1+x_2$ ; $x_1 \in N_1$, $x_2 \in N_2$ حيث

$\Rightarrow \lambda x = \lambda(x_1+x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in N_1+N_2$

($N_1$ مجموعة جزئية في $M$ ، $N_2$ مجموعة جزئية في $M$)

مما سبق نستنتج أن $N_1+N_2$ مجموعة جزئية في $M$.

ب) $\forall y \in f(N_2 \cap f^{-1}(M_1)) \Rightarrow \exists x \in N_2 \cap f^{-1}(M_1)$ ; $y=f(x)$

$\Rightarrow x \in N_2$ و $x \in f^{-1}(M_1) \Rightarrow f(x) \in f(N_2)$ و $f(x) \in M_1$

$\Rightarrow y \in f(N_2) \cap M_1 \Rightarrow f(N_2 \cap f^{-1}(M_1)) \subseteq f(N_2) \cap M_1$

وكذلك فإن:

$\forall y \in f(N_2) \cap M_1 \Rightarrow y \in f(N_2)$ و $y \in M_1 \Rightarrow \exists x \in N_2$ ; $y=f$

$\Rightarrow f(x) \in M_1 \Rightarrow x \in N_2$ و $x \in f^{-1}(M_1)$

$\Rightarrow x \in N_2 \cap f^{-1}(M_1) \Rightarrow y=f(x) \in f(N_2 \cap f^{-1}(M_1))$

$\Rightarrow f(N_2) \cap M_1 \subseteq f(N_2 \cap f^{-1}(M_1))$ (**)

من (*) و (**) نجد أن $f(N_2 \cap f^{-1}(M_1)) = f(N_2) \cap M_1$

## السؤال الثاني: [35]

1) لنأخذ التطبيق $\varphi : M/\ker f \longrightarrow f(M)$ المعرف بالشكل:

$\varphi(x+\ker f) = f(x)$ $\forall x \in M$

إن $\varphi$ معرف جيداً لأنه:

$\forall x_1,x_2 \in M$ ; $x_1+\ker f = x_2+\ker f \Rightarrow x_1-x_2 \in \ker f$

$\Rightarrow f(x_1-x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow \varphi(x_1+\ker f) = \varphi(x_2+\ker f)$

ب) $\varphi$ متباين لأن:

$\forall x_1,x_2 \in M$ ; $\varphi(x_1+\ker f) = \varphi(x_2+\ker f)$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0' \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f$

$\Rightarrow x_1 + \ker f = x_2 + \ker f$

$\varphi$ تطبيق: $\forall y \in f(M) \Rightarrow \exists x \in M \; ; \; y = f(x) \Rightarrow \exists x + \ker f \in M/\ker f$

$y = \varphi(x + \ker f)$

$\varphi$ هومومورفيزم لأنه:

1) $\forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow \varphi[(x_1 + \ker f) + (x_2 + \ker f)] = \varphi((x_1 + x_2) + \ker f)$

$= f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) =$

$= \varphi(x_1 + \ker f) + \varphi(x_2 + \ker f)$

2) $\forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow \varphi(\lambda(x + \ker f)) = \varphi(\lambda x + \ker f)$

$= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi(x + \ker f)$

ما سبق نجد أن $\varphi$ ايزومورفيزم، وبالتالي $M/\ker f \cong f(M)$

* بما أن $f$ غامرة:

$\forall x \in R \Rightarrow \exists (0, x) \in R^2 \; ; \; f(0, x) = x$

وبالتالي حسب النظرية السابقة

$R^2/\ker f \cong f(R^2) = R \Rightarrow \operatorname{coim} f \cong R$

2) بما أن $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعدة لـ $M$، فإن كل عنصر $x$ من $M$ يكتب بالصورة وحيدة بالشكل $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in R$

ونعرف التطبيق $f$ بالشكل:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$$

بما أن $f$ معرف جيداً، ولنبين $f$ هومومورفيزم لأنه

1) $\forall x, x' \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; , \; x' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \; ; \; \lambda_i, \mu_i \in R$

$\Rightarrow f(x + x') = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) x_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i = f(x) + f(x')$

2) $\forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in R$

$\Rightarrow f(\lambda x) = f(\lambda(\Sigma \lambda_i x_i)) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) x_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) y_i = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\right) = \lambda f(x)$

$f$ متباين لأنه:

$\forall x, x' \in M \; ; \; f(x) = f(x') \; ; \; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; , \; x' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad ; i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \Rightarrow x = x_1$$

$f$ غامر لأنه:

$$\forall y \in N \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \; ; \lambda_i \in R \Rightarrow \exists x \in M \; ; \; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

$$\Rightarrow f(x) = y$$

ما سبق فإن $f$ R-إيزومورفزم. وهو وحيد لأنه:

إذا كان $g : M \to N$ R إيزومورفزم آخر بحيث $g(x_i) = y_i \; (i = 1, \dots, n)$

فإن:

$$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \lambda_i \in R$$

فإن:

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = f(x)$$

$$\Rightarrow \sum f = g$$

السؤال الثالث: [30]

1) لتأخذ الخطط:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{\sigma} & 0 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z} \\ A' & & B' & & C' & & \\ & \xrightarrow[f']{} & & \xrightarrow[g']{} & & \xrightarrow[\pi]{} & \operatorname{coker} g' \end{array}$$

حيث $\pi$ الغمر القانوني، $z$ الاحتواء القانوني، $\sigma$ السوموورفزم الصفري.

فإن هذا المخطط تبادلي وسطريه متتاليتان تامتان.

واضح أن سطري المخطط متتاليتين تامتين، وأن $r$ موفومورفزم ولنبين أن المربع اليميني تبادلي، أي لنبين أن $z \circ \sigma = \pi \circ r$

ليكن $x \in C$، وبما أن $g$ غامر $\Rightarrow \exists b \in B \; ; \; x = g(b)$

$$(z \circ \sigma)(x) = z(\sigma(x)) = z(0) = 0$$

$$(\pi \circ r)(x) = \pi(r(x)) = \pi(r(g(b))) = (\pi \circ (r \circ g))(b)$$

$$= \pi \circ (g' \circ q))(b) = (\pi \circ g)(q(b)) = 0$$

لأن $\pi \circ g' = 0$

$\Rightarrow (\tau \circ \theta)(x) = (\Pi \circ r)(x) = 0 \Rightarrow \tau \circ \theta = \Pi \circ r$

وبالتالي بما أن $\Pi$ و $r$ ايمورفزم و $\tau$ مونومورفزم فإن $q$ يكون ايمورفزم

ا ـــ نظرية التمثيليات الأربعة.

ا) $\forall \theta \in \mathrm{Im} f_\Delta \Rightarrow \exists \theta_1 \in \mathrm{Hom}(M, A')$ ; $\theta = f_\Delta(\theta_1)$

$\Rightarrow \theta = f \circ \theta_1$

ويكون $g_\Delta(\theta) = g \circ \theta = g \circ (f \circ \theta_1) = (g \circ f)_\Delta(\theta_1) = 0$

لأن $g \circ f = 0$

$\Rightarrow \theta \in \mathrm{Ker} g_\Delta \Rightarrow \mathrm{Im} f_\Delta \subseteq \mathrm{Ker} g_\Delta$

ب) من أجل كل $x$ في $M$، نعرف التطبيق:

$\theta_x : M^\Delta \longrightarrow R$ بالشكل

$\theta_x(f) = f(x) \quad \forall f \in M^\Delta = \mathrm{Hom}(M, R)$

ولنبين أن $\theta_x \in M^{\Delta\Delta} = \mathrm{Hom}(M^\Delta, R)$ أي أن $\theta_x$ مورفزم لأنه:

1/ $\forall f, g \in M^\Delta \Rightarrow \theta_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= \theta_x(f) + \theta_x(g)$

2/ $\forall f \in M^\Delta, \lambda \in R \Rightarrow \theta_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

$= \lambda \theta_x(f)$

ولنبين أن التطبيق $\theta : M \longrightarrow M^{\Delta\Delta}$ المعرف بالشكل

$\theta(x) = \theta_x$ يكون مورفزم.

1/ $\forall x, y \in M, f \in M^\Delta \Rightarrow (\theta(x+y))(f) = \theta_{(x+y)}(f)$

$= f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta_x(f) + \theta_y(x)$

$= (\theta_x + \theta_y)(f) = (\theta(x) + \theta(y))(f)$

$\Rightarrow \theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$

2/ $\forall x \in M, \lambda \in R, f \in M^\Delta \Rightarrow (\theta(\lambda x))(f)$

$= \theta_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \theta_x(f)$

$= \{\lambda \theta(x)\} f \Rightarrow \theta(\lambda x) = \lambda \theta(x)$

أي أن $\theta : M \longrightarrow M^{\Delta\Delta}$ مورفزم.

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثالثة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب: .....

**السؤال الأول:** (25 درجة) **1**- ليكن $M$ و $N$ مودلين فوق حلقة واحدية $(R,+,.)$، وليكن $f:M\to N$ $R$- هوموورفيزم، وليكن $M_1$ مودول جزئي من $M$. برهن أن $f^{-1}(f(M_1))=M_1+\ker f$ .

**2**- ليكن $M$ مودل فوق حلقة $(R,+,.)$، ولتكن $N_1,N_2,N_3$ مودولات جزئية من $M$. برهن أن:

$$N_1+(N_2\cap N_3)=(N_1+N_2)\cap(N_1+N_3)$$

**السؤال الثاني:** (35 درجة) **1**- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R$- مودول، ولتكن $M_1,...,M_n$ مودولات جزئية من $M$ بحيث أن $M=M_1\oplus...\oplus M_n$ ، ولتكن $N_1,...,N_n$ مودولات جزئية من $M_1,...,M_n$ على الترتيب، وليكن $N=N_1+...+N_n$ . إذا كان $f:M\to M/N$ $R$-ايبوموورفيزم معرف بالشكل $f(x)=x+N$ . بين أن:

$$M/N=f(M_1)\oplus...\oplus f(M_n)$$

**2**- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M,M'$ مودولين فوق $R$، وليكن $f:M\to M'$ $R$ - هوموورفيزم . برهن أن:

$$M/\ker f\cong f(M)$$

**السؤال الثالث:** (30 درجة) **1**- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، ونفرض أن $0\longrightarrow A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''\longrightarrow 0$ متتالية تامة من المودولات فوق $R$ والهوموورفيزمات. برهن أن المتتالية:

$$0\longrightarrow Hom(M,A')\xrightarrow{f_*}Hom(M,A)\xrightarrow{g_*}Hom(M,A'')$$

الناتجة من المتتالية المفروضة تامة.

**2**- لتكن $(R,+,.)$ حلقة تبديلية واحدية، وليكن $M$ مودول حر فوق $R$ بقاعدة منتهية $\{s_1,...,s_n\}$ . بين أن $M^*$ مودول حر فوق $R$ ، والمجموعة $\{s_1^*,...,s_n^*\}$، حيث:

$$s_i^*(s_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ; \quad i=j\\ 0 & ; \quad i\neq j\end{cases}$$

تكون قاعدة منتهية لـ $M^*$ .

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2021-7-28

د. علياء حكيم

مكتبة A to Z

السؤال الأول:

1. $\forall x \in f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow f(x) \in f(M_1)$

$\Rightarrow \exists x' \in M_1 \; ; \; f(x) = f(x') \Rightarrow f(x - x') = 0$

$\Rightarrow x - x' \in \ker f \Rightarrow x \in M_1 + \ker f$ b/

$\Rightarrow f^{-1}(f(M_1)) \subseteq M_1 + \ker f \quad \ldots (\star)$

وفي جهة ثانية نجد أن:

$\forall x \in M_1 \Rightarrow f(x) \in f(M_1) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(M_1))$

$\Rightarrow M_1 \subseteq f^{-1}(f(M_1))$

ولدينا $\{0_N\} \subseteq f(M_1)$ ، وعليه:

$f^{-1}(\{0_N\}) \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow \ker f \subseteq f^{-1}(f(M_1))$

وبالتالي فإن:

$M_1 + \ker f \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \quad \ldots (\star\star)$ b/

من $(\star)$ و $(\star\star)$ نجد أن $f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \ker f$

2. $\forall x \in N_1 + (N_2 \cap N_3) \Rightarrow x = x_1 + x_2 \; ; \; x_1 \in N_1 \; , \; x_2 \in N_2 \cap N_3$

$\Rightarrow x_1 \in N_1 \; , \; x_2 \in N_2$ و $x_2 \in N_3$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2 \in N_1 + N_2 \\ x = x_1 + x_2 \in N_1 + N_3 \end{cases}$ b/

$\Rightarrow x \in (N_1 + N_2) \cap (N_1 + N_3) \Rightarrow N_1 + (N_2 \cap N_3) \subseteq (N_1 + N_2) \cap (N_1 + N_3)$

ولدينا:

$\forall x \in (N_1 + N_2) \cap (N_1 + N_3) \Rightarrow x \in N_1 + N_2$ و $x \in N_1 + N_3$

$\Rightarrow x = x_1 + x_2 \; ; \; x_1 \in N_1$ و $x_2 \in N_2$

$\Rightarrow x_1 + x_2 \in N_1 + N_3 \Rightarrow x_2 \in N_3 \Rightarrow x_2 \in N_1 \cap N_3$

$\Rightarrow x = x_1 + x_2 \in N_1 + (N_2 \cap N_3)$ f/

$\Rightarrow (N_1 + N_2) \cap (N_1 + N_3) \subseteq N_1 + (N_2 \cap N_3) \quad \ldots (\star\star)$

من $(\star)$ و $(\star\star)$ نتج المساواة

مكتبة A to Z

## التمرين الثاني:

1. لدينا $\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \subseteq M/N$ ، بما أن:

$\forall x+N \in M/N \Rightarrow x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad x_i \in M_i \quad ; \quad i=1,\dots,n$

$\Rightarrow x+N = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + N = \sum_{i=1}^{n} (x_i+N) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \in \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$

$\Rightarrow M/N \subseteq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$

وعليه فإن $M/N = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$ لنبرهن أن $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة.

إذا كان: $\sum_{i=1}^{n} f(z_i) = N \quad ; \quad z_i \in M_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (z_i+N) = N \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i + N = N$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i \in N \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad x_i \in N_i$

$N_i \subseteq M_i$

$\Rightarrow x_i \in M_i$

وبما أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ فإن:

$z_i = x_i \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \Rightarrow f(z_i) = f(x_i) = x_i + N = N \quad (x_i \in N_i)$

وبالتالي $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة، وعليه $M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$

2. نأخذ التطبيق $f(M) \longrightarrow M/\ker f : \varphi$ المعرف بالشكل:

$\forall x \in M \quad \varphi(x+\ker f) = f(x)$

لنبين أن $\varphi$ معرف جيداً أي أن:

$\forall x_1, x_2 \in M \quad ; \quad x_1+\ker f = x_2+\ker f \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f$

$\Rightarrow f(x_1-x_2) = 0' \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \varphi(x_1+\ker f) = \varphi(x_2+\ker f)$

$\varphi$ متباين لأن:

$\forall x_1, x_2 \in M \quad ; \quad \varphi(x_1+\ker f) = \varphi(x_2+\ker f)$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1-x_2) = 0'$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow x_1+\ker f = x_2+\ker f$

مكتبة A to Z

- $\varphi$ غامر لأنه:

$\forall y \in f(M) \Rightarrow \exists x \in M \; ; \; y = f(x) \Rightarrow \exists x + \ker f \in M/\ker f \; ;$

$y = \varphi(x + \ker f)$

- $\varphi$ هو مورفزم لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow \varphi((x_1 + \ker f) + (x_2 + \ker f)) = \varphi((x_1 + x_2) + \ker f)$

$= f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi(x_1 + \ker f) + \varphi(x_2 + \ker f)$

$\forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow \varphi(\lambda(x + \ker f)) = \varphi(\lambda x + \ker f)$

$= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi(x + \ker f)$

حاسبت بأن $\varphi$ إيزومورفزم، وبالتالي $M/\ker f \cong f(M)$

السؤال الثاني:

أ) لنبين أن المتتالية المعرفة في الفرض لدينا $f$ متباين، و $g$ غامر

$\Leftrightarrow g = 0$ ، $\operatorname{Im} f = \ker g$

$f_*$ متباين لأنه:

$\forall \theta \in \ker f_* \Rightarrow f_*(\theta) = 0 \Rightarrow f \circ \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

وبالتالي $\ker f_* = 0$، أي أن $f_*$ متباين، وبالتالي المتتالية

$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, A') \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}(M, A)$ تامة

ب) لنبين أن $\operatorname{Im} f_* = \ker g_*$

$\forall \theta \in \operatorname{Im} f_* \Rightarrow \exists \theta_1 \in \operatorname{Hom}(M, A') \; ; \; \theta = f_*(\theta_1) \Rightarrow \theta = f \circ \theta_1$

ويكون

$g_*(\theta) = g \circ \theta = g \circ (f \circ \theta_1) = (g \circ f) \circ \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta \in \ker g_*$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f_* \subseteq \ker g_*$

$\forall \theta \in \ker g_* \Rightarrow g_*(\theta) = 0 \Rightarrow g \circ \theta = 0 \Rightarrow (g \circ \theta)(x) = 0 \; \forall x$

$\Rightarrow g(\theta(x)) = 0 \Rightarrow \theta(x) \in \ker g = \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \exists a' \in A' \; ; \; \theta(x) = f(a')$

بما أن $f$ متباين فإن $a'$ وحيد، كما $\theta(x) = f(a')$ لأنه إذا $\theta(x) = f(b')$ فإن $f(a') = f(b') \Leftarrow a' = b'$ وحيد

ولنعرف التطبيق $\theta_1 : M \to A'$ بحيث $\theta_1(x) = a'$ بحيث

$\theta_1 \in \operatorname{Hom}(M, A')$ ، ويكون

مكتبة A to Z

$\theta(x) = f(a') = f(\theta_1(x)) = (f \circ \theta_1)(x) \Rightarrow \theta = f \circ \theta_1$

$\Rightarrow \theta = f_A(\theta_1) \Rightarrow \theta \in \operatorname{Im} f_A \Rightarrow \ker g_A \subseteq \operatorname{Im} f_A$

وبالتالي فان $\operatorname{Im} f_A = \ker g_A$ وهي

تامة $\operatorname{Hom}(M, A') \xrightarrow{f_A} \operatorname{Hom}(M, A) \xrightarrow{g_A} \operatorname{Hom}(M, A'')$

2) كل عنصر $x$ من $M$ يكتب بصورة وحيدة بالشكل:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j \quad ; \alpha_j \in R$$

$$\Rightarrow s_i^*(x) = s_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_i^*(s_j) = \alpha_i$$

- إن المجموعة $\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*\}$ مولدة لـ $M^*$ لأنه:

$\forall f \in M^* \quad ; f: M \longrightarrow R$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(s_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i^*(x) f(s_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(s_i) s_i^*(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(s_i) s_i^*\right)(x)$$

$$\Rightarrow f = \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot s_i^*$$

أي أن $f$ تركيب خطي لعناصر $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$

- إن المجموعة $\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*\}$ مستقلة خطياً لأنه:

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^* = 0$ ، فإن

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^*\right)(s_j) = 0 \quad ; j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^*(s_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad ; j = 1, \dots, n$$

وبالتالي فإن المجموعة $\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*\}$ قاعدة مشتركة لـ $M^*$ و $M$

وبعدها هي فوق $R$.

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 3 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثالثة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب:

**السؤال الأول:** (25 درجة) **1-** ليكن $M$ و $N$ مودولين فوق حلقة $(R,+,.)$، وليكن $f:M\to N$ $R-$ هوموموفيزم، وليكن $N_1$ مودول جزئي من $N$. برهن أن $f(f^{-1}(N_1))=N_1\cap \operatorname{Im} f$ .

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R-$ مودول، ولتكن $N$ مجموعة جزئية من $M$، ، ولتكن $A$ مثالية يسارية من الحلقة $R$. برهن أن المجموعة:

$$AN=\{x\in M \mid x=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad ; \quad a_i\in A, x_i\in N, n\in Z^+\}$$

تشكل مودول جزئي من $M$.

**السؤال الثاني:** (35 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، وليكن $M$ $R-$ مودول، وليكن $N_1,N_2$ مودولين جزئيين من $M$ بحيث أن $M=N_1\oplus N_2$ . بين أن $M/N_1\cong N_2$ .

**2-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وليكن $M,M'$ مودولين فوق $R$، ولتكن $\{x'_1,...,x'_n\}$ قاعدة لـ $M'$، وليكن $f:M\to M'$ $R-$ ايبومورفيزم . بين أنه يوجد مودول جزئي حر $N$ من $M$ بحيث يكون $M=N\oplus \ker f$ .

**السؤال الثالث:** (20 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وبفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق $R$ والهوموموفيزمات تبادلي:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ p\downarrow & & r\downarrow & & q\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

وأن سطريه متتاليتان تامتان. برهن أنه إذا كان $r,p,f'$ مونوموزفيزمات فإن $q$ يكون مونوموزفيزم.

**2-** ليكن $M$ مودول فوق حلقة تبديلية واحدية $(R,+,.)$، وليكن $\theta:M\to M^{**}$ $R-$ هوموموزفيزم معرف بالشكل $\theta(x)=\theta_x \quad \forall x\in M$ وحيث $\theta_x:M^*\to R$ معرف بالشكل $\theta_x(f)=f(x) \quad \forall f\in M^*$. إذا كان $M$ مودول حر فوق $R$ فبين أن $\theta$ يكون مونوموزفيزم.

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2021-2-8

د. علياء حكيم

A to Z مكتبة

## السؤال الأول: [30]

1/ (4)

$\forall y \in f(f^{-1}(N_1)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(N_1) \; ; \; y = f(x)$

$\Rightarrow y = f(x) \in N_1 \Rightarrow f(f^{-1}(N_1)) \subseteq N_1$

وكذلك فإن:

7/ $f^{-1}(N_1) \subseteq M \Rightarrow f(f^{-1}(N_1)) \subseteq f(M) = \mathrm{Im} f$

وفيه:

$$f(f^{-1}(N_1)) \subseteq N_1 \cap \mathrm{Im} f \quad (*)$$

ومن جهة ثانية فإن:

$\forall y \in N_1 \cap \mathrm{Im} f \Rightarrow y \in N_1 \wedge y \in \mathrm{Im} f = f(M)$

$\Rightarrow \exists x \in M \; ; \; y = f(x)$

$\Rightarrow f(x) \in N_1 \Rightarrow x \in f^{-1}(N_1)$

8/ $\Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(N_1))$

$\Rightarrow N_1 \cap \mathrm{Im} f \subseteq f(f^{-1}(N_1)) \quad (**)$

من (*) و (**) نجد أن المطلوب.

2/ 1- واضح أن $AN \subseteq M$ لأن $\emptyset \neq AN$ (4)

3/ $0_M \in AN$

2- $\forall x_1, x_2 \in AN \Rightarrow x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \; , \; x_2 = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j$

6/ حيث $a_i, a_j \in A \; , \; x_i, x_j \in N \; , \; n, m \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{m} a_j x_j = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (-a_j) x_j \in AN$

3- $\forall x \in AN, \; \lambda \in R \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \; ; \; a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+$

6/ $\Rightarrow \lambda x = \lambda \left( \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) x_i \in AN$

حيث $\lambda a_i \in A$ لأن $A$ قالبية يسارية

مما سبق نستنتج أن $AN$ مودول جزئي في $M$.

## السؤال الثاني: [40]

1/ لنعرف التطبيق $f : N_2 \longrightarrow M/N_1$ بالشكل:

$\forall x \in N_2 \qquad f(x) = x + N_1$

تمرين 4

$f$ معرف جيداً لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in N_2 \; ; \; x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$f$ هومومورفزم لأنه

1- $\forall x_1, x_2 \in N_2 \Rightarrow f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + N_1$

$= (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1) = f(x_1) + f(x_2)$

2- $\forall x \in N_2, \lambda \in R \Rightarrow f(\lambda x) = (\lambda x) + N_1 = \lambda (x + N_1)$

$= \lambda f(x)$

$f$ متباين لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in N \; ; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in N_1$

وبما أن $x_1, x_2 \in N_2$ فإن $x_1 - x_2 \in N_2$ ومنه:

$x_1 - x_2 \in N_1 \cap N_2$

ولكن $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ لأن $M = N_1 \oplus N_2$ ومنه

$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$f$ غامر لأنه:

$\forall y \in M/N_1 \Rightarrow \exists x = x_1 + x_2 \in M \; ; \; y = x + N_1, \; x_1 \in N_1, x_2 \in N_2$

$\Rightarrow \exists x_2 \in N_2 \; , \; y = x + N_1 = (x_1 + x_2) + N_1$

$= (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1) = N_1 + (x_2 + N_1)$

$= x_2 + N_1 = f(x_2)$

حاصله ينتج أن $f$ إيزومورفزم، وبالتالي $M/N_1 \simeq N_2$

2) إن التطبيق $f: M \longrightarrow M'$ غامر بالعرض، وبالتالي من أجل العناصر $x_1', \ldots, x_n'$ من $M'$ توجد عناصر $x_1, \ldots, x_n$ من $M$ بحيث:

$f(x_i) = x_i' \; ; \; i = 1, \ldots, n$

ليكن $N$ هو المولد الجزئي من $M$ المولد بالمجموعة $\{x_1, \ldots, x_n\}$. وهذه المجموعة مستقلة خطياً لأنه إذا كان:

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \; ; \; \lambda_i \in R$

$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f(0)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0' \Rightarrow \sum \lambda_i x_i' = 0'$

وبما أن $\{x_1', \ldots, x_n'\}$ قاعدة لـ $M'$ فهي مستقلة خطياً، وبالتالي $\lambda_i = 0, \; i = 1, \ldots, n$

أي أن المجموعة $\{x_1, \ldots, x_n\}$ قاعدة لـ $N$، وبالتالي $N$ مولد حر من $M$، ويكون:

مكتبة A to Z

$\forall x \in M \Rightarrow f(x) \in M' \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' \; ; \; \lambda_i \in R$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i') \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$

$\Rightarrow f\left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0' \Rightarrow x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \ker f$

$\Rightarrow x \in N + \ker f \Rightarrow M \subseteq N + \ker f \Rightarrow M = N + \ker f$

حيث أنه:

$y \in N \cap \ker f \Rightarrow y \in N \;\&\; y \in \ker f$

$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in R \;\&\; f(y) = 0'$

$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0' \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0'$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' = 0' \Rightarrow \lambda_i = 0 \; ; \; i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow y = 0$

أي أن $N \cap \ker f = \{0\}$ ، وبالتالي $M = N \oplus \ker f$

السؤال الثالث:

1) لنأخذ الخطط

$$\begin{array}{ccccccc} \ker f & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow 0 & & \downarrow P & & \downarrow q & & \downarrow r \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' \end{array}$$

حيث $i$ التباين القانوني، $\theta$ الهومومورفيزم الصفري، $\gamma$ الاحتواء القانوني

فإن هذا الخطط تبادلي وعليه متتاليتان تاميتان

والمطلوب أن نعين الخطط متتاليتان تاميتان، وأن $\theta$ ايبومورفيزم، ولنبين أن

الرباعية اليسارية تبادلية، أي لنبين أن $P \circ i = \gamma \circ \theta$

$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0$

بما أن

$(\gamma \circ \theta)(x) = \gamma(\theta(x)) = \gamma(0) = 0$

$(P \circ i)(x) = P(i(x)) = P(x)$

لدينا:

$f'(P(x)) = (f' \circ P)(x) = (q \circ f) = q(f(x)) = q(0) = 0$

$\Rightarrow P(x) \in \ker f'$

ولكن $\ker f' = \{0\}$ لأن $f'$ تباين، وبالتالي $P(x) = 0$، وعليه

$(\gamma \circ \theta)(x) = (P \circ i)(x) = 0 \Rightarrow \gamma \circ \theta = P \circ i$

مكتبة A to Z

فإذا كان $P$ و $\sigma$ مونومورفيزم و $\theta$ إبيمورفيزم فإن $\theta$ مونومورفيزم

أ) هل (ج) من نظرية التمثيلات الأربعة؟

(10)

ج) لتكن $S$ قاعدة ما للمودل الحر $M$، فإن كل عنصر $x$ من $M$ يكتب على الشكل

$$x = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n \quad ; \quad s_i \in S, \ \alpha_i \in R$$

إذن $\theta$ متباين لأنه:

$\forall x \in \ker\theta \Rightarrow \theta(x) = 0 \Rightarrow \theta_x = 0 \Rightarrow \theta_x(f) = 0 \ \forall f \in M^*$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(s_j) = 0$$

وبالتالي من أجل $f = s_i^*$ ($i = 1, \ldots, n$) عناصر ثنوية القاعدة $S$، فإن

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j^*(s_j) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i = \sum_{i=1}^{n} 0 s_i = 0 \Rightarrow \ker\theta = \{0\}$$

$\Rightarrow$ $\theta$ متباين

وبما أن $\theta$ همومورفيزم فإن $\theta$ مونومورفيزم.

مكتبة A to Z