ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

اسئلة دورات محلولة

فيزياء للرياضيات

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس	اسئلة مقرر فيزياء للرياضيات	الاسم:
كلية العلوم	لطلاب السنة الثانية رياضيات	الدرجة: 90
قسم الرياضيات	الدورة الثالثة للعام الدراسي: 2024 - 2025 م	المدة: ساعتان

❖ **أجب عن الأسئلة التالية (40 + 30 + 20 = 90 درجة):**

1) يطبق إحصاء مكسويل - بولتزمان على الغاز الكلاسيكي (اللاكمي " غاز M-B "). والذي تكون فيه سويات الطاقة متقاربة لدرجة يمكن اعتبارها مستمرة(بفاصل طاقي قدره $d\varepsilon$). وعند دراسة توزع هذه الجسيمات تبعاً لسرعها المطلقة $|\vec{\vartheta}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ في مجال السرعة $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ تبين أنّ تابع كثافة السرعة المطلقة لماكسويل – بولتزمان يعطى بالعلاقة: $f(\vartheta) = 4\pi(\frac{\alpha}{\pi})^{3/2}\, \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2}$. علماً أنّ: $(\alpha = 2m/KT)$، وتابع التحاص: $Z = CV(2\pi mKT)^{3/2}$، وثابتة بولتزمان: $\beta = -\frac{1}{KT}$، والعلاقة التي تربط حجم الفضاء الطوري بدرجة التحلل بالشكل: $C: constant$; $g(\vartheta)d\vartheta = Cd\Gamma(\vartheta) = CV4\pi m^3\vartheta^2 d\vartheta$. **والمطلوب:**

- انطلاقاً من العلاقة التي تعطي عدد الجسيمات $dN(\vartheta)$ في مجال السرعة $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ التالية: $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z}.\, e^{(\beta m\vartheta^2/2)}.\, g(\vartheta)dv$ استنتج علاقة تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta)$. حيث: $f(\vartheta)d\vartheta = \frac{dN(\vartheta)}{N}$. (5)
- اثبت أن $f(\vartheta)$ تابع كثافة احتمالي. (5)
- اوجد السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H، ثم أوجد المقادير التالية: $\bar{\vartheta}, \overline{\vartheta^2}, \overline{\Delta\vartheta^2}$ بدلالة السرعة الأكثر احتمالاً (10)
- مثل بيانياً السرع المميزة السابقة على منحني تابع الكثافة عند درجة حرارة محددة T. (5)
- اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_0(\vartheta_H \to 1.6\,\vartheta_H)$. (5)

علماً أنّ: $E_r(1) = 0.8427; E_r(1.6) = 0.9763$.

ملاحظة: يعطى تكامل بواسون بالشكل:

$$\int_0^{+\infty} x^n.\, e^{-\alpha x^2} = \begin{cases} \frac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n\ (\text{زوجي});\ n \geq 0 \\ \frac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n\ (\text{فردي});\ n = 2m+1;\ m \geq 0 \end{cases}$$

2) **مسألة:** جملة مكونة من N جسيم $(N \gg 1)$، موزعة على ثلاث سويات للطاقة بالشكل: $\varepsilon = KT\ (J)$; $\varepsilon_1 = \varepsilon\ ,\ \varepsilon_2 = 2\varepsilon\ ,\ \varepsilon_3 = 3\varepsilon$، ومتحللة بالشكل: $g_1 = N,\ g_2 = g_3 = 2$. **والمطلوب:**

1. أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد بدلالة N فقط). (4)
2. أوجد طاقة الحالة الماكروية $\left(\overset{\varepsilon_1}{\widehat{N-1}}, \overset{\varepsilon_2}{\widehat{1}}, \overset{\varepsilon_3}{\widehat{0}}\right)$، ثم/وجد الوزن الإحصائي بدلالة N، في الحالات التالية: (4)

(a)- الجسيمات كلاسيكية (متمايزة). (4) (b)- الجسيمات بوزونات (غير متمايزة). (4) (c)- الجسيمات فيرميونات (غير متمايزة). (4)

▪ **تطبيق:** بفرض $N = 3$، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات (a, b, c) السابقة ومثلها على سويات الطاقة. (3)

3. بفرض أنّ الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمالاً $\left(\overset{\varepsilon_1}{\widehat{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\widehat{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\widehat{N_3}}\right)_{max}$ بدلالة العدد N و تابع التحاص Z. ثمّ تحقق من حالة التوزع الحاصل (بعد التأكد من أنّ: $N = N_1 + N_2 + N_3$) وذلك من خلال إيجاد نسب أرقام الانشغال للسويات. (3) (3) (3) (1)

3) برهن صحة العلاقات التالية:

1. $U = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\Big\vert_V$	2. $U = F - T\frac{\partial F}{\partial \beta}\Big\vert_V$
3. $U = -T^2\frac{\partial(F/T)}{\partial T}\Big\vert_V$	4. $C_V = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Big\vert_V$
5. $C_V = k\beta^2\frac{\partial^2(\beta F)}{\partial \beta^2}\Big\vert_V$	6. $\frac{\partial}{\partial T} = K\beta^2\frac{\partial}{\partial \beta}$

ملاحظة: يسمح باستخدام الآلة الحاسبة — طرطوس في 2025/10/22 م — حسن إسماعيل - أ. آصف يوسف

فيزياء للرياضيات — السنة الثانية / قسم الرياضيات — سلم تصحيح / الدورة التكميلية للعام 2024-2025

* السؤال الأول :

① لدينا $Z = CV(2\pi mKT)^{3/2}$ & $\beta = -1/KT$ & $g(v)dv = CV4\pi m^3 v^2 dv$ وبالتعويض في العلاقة التفاضلية لعدد الجسيمات نجد :

$$dN(v) = \frac{N}{CV(2mKT)^{3/2}} \cdot e^{-mv^2/2KT} \cdot CV4\pi m^3 v^2 dv$$

وباختصار على CV ، واعتبار أن : $\alpha = m/2KT$ نجد :

$$dN(v) = 4\pi N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2} dv \xrightarrow{\div N} \frac{dN(v)}{N} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2} dv = f(v)dv$$

إذن : $\boxed{f(v) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2}}$ (5) درجات

② لإثبات أن $f(v)$ احتمالي يجب أن يتحقق الشرط : $\int_0^\infty f(v)dv = 1$.

$$\int_0^\infty f(v)dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2}dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1 \quad ; \quad \int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2}dv = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

(5) درجات

تكامل بواسون الثاني

③ . إيجاد السرعة الأكثر احتمالاً v_H :

نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(v)$ وإعدام المشتق ، كما يلي :

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} = 0 \Rightarrow 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left(2v e^{-\alpha v^2} - 2\alpha v v^2 e^{-\alpha v^2}\right) = 0 \Rightarrow 2v e^{-\alpha v^2}(1-\alpha v^2) = 0$$

- الحلول الناتجة عندما $v e^{-\alpha v^2} = 0$ هي : $v = \infty$ & $v = 0$ ، وهي غير مقبولة .

- وعندما $1-\alpha v^2 = 0$ يكون :

$$v_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2KT}{m}} \quad ; \quad \alpha = \frac{m}{2KT}$$

(5) درجات

إيجاد القيمة الوسطى للسرعة $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v)dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2}dv}_{1/2\alpha^2 \text{ «بواسون الثاني»}} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_H \simeq 1{,}13\, v_H$$

(5) درجات

إيجاد القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة:

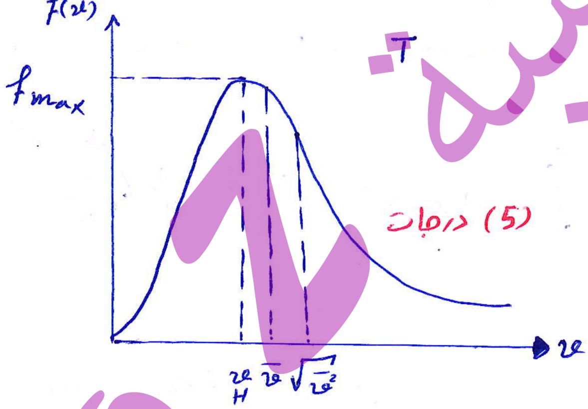
$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)\,dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2}\,dv}_{\text{بواسون الثاني} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$$= \frac{3}{2} v_H^2 = 3\frac{KT}{m} \Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, v_H \approx 1,22\, v_H$$ (5) درجات

إيجاد وسطي القيمة التربيعية للانحراف:

$$\overline{\Delta v^2} = \overline{v^2} - \bar{v}^2 = \frac{3}{2} v_H^2 - \frac{4}{\pi} v_H^2$$ (5) درجات

4- تمثيل السرع v_H و $\bar{v}$ و $\sqrt{\overline{v^2}}$ على منحني تابع الكثافة $f(v)$ عند درجة حرارة T محددة:



(5) درجات

5- تطبيق العلاقة:

$$N_0(0 \to v_0) = N\left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x\, e^{-x^2}\right] \quad (*)$$

$$N_0(v_H \to 1,6\, v_H) = N_0(0 \to 1,6\, v_H) - N_0(0 \to v_H)$$

وبالاعتماد على (*) نكتب:

$$N_0(v_H \to 1,6\, v_H) = N\left[E_r(1,6) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, 1.6\, e^{-(1.6)^2}\right] - N\left[E_r(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, 1 \cdot e^{-(1)^2}\right]$$

وبالتعويض بالقيم كل $E_r(1,6)$ & $E_r(1)$ نجد أن:

$$N_0(v_H \to 1,6\, v_H) = N\left[0,9763 - 0,1396 - 0,8427 + 0,4151\right] = 40,91\%\, N$$ (5) درجات

7 السؤال الثاني :

1- عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي :

(4) درجات

$$N_0 = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(N+3-1)!}{N!\,(3-1)!} = \frac{(N+2)!}{2N!} = \frac{(N+2)(N+1)N!}{2N!} = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

2- طاقة الحالة الماكروية $(N-1,\ 1,\ 0)$:

$$U_{(N-1,1,0)} = \sum N_i \varepsilon_i = (N-1)\times KT + 1\times 2KT + 0\times 3KT = (N+1)KT \ (J)$$ (4) درجات

إيجاد الوزن الإحصائي في حالة الجسيمات الكلاسيكية :

(4) درجات

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = N!\left[\frac{1^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\frac{2^1}{1!}\cdot\frac{2^0}{0!}\right] = 2NN^{N-1} = 2N^N$$

إيجاد الوزن الإحصائي في حالة الجسيمات كمية وبوزونات :

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!}\cdot\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}\cdot\frac{(0+2-1)!}{0!\,(2-1)!}$$

$$= 2\cdot\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$ (4) درجات

إيجاد الوزن الإحصائي في حالة الجسيمات كمية وفرميونات :

نلاحظ أن الحالة $(N-1,\ 1,\ 0)$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i \Leftarrow$ مقبولة .

(4) درجات

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{N!}{(N-1)!\,(N-N+1)!}\cdot\frac{2!}{1!\,(2-1)!}\cdot\frac{2!}{0!\,(2-0)!} = 2N$$

• تطبيق :

$W_{M-B} = 54$; $W_{B-E} = \frac{4!}{(2!)^2} = 2\,\frac{4\times3\times2}{4} = 12$; $W_{B-E} = 6$ (3) درجات

3- بفرض أن الجسيمات متمايزة :

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{\varepsilon_i/KT} = Ne^{1} + 2e^{2} + 2e^{3}$$ (3) درجات

ارقام الإشغال :

(3) درجات

$$N_i = g_i \frac{N}{Z} e^{-\varepsilon_i/KT} \Rightarrow \text{النسبة :}\ \frac{N_i}{N_j} = \frac{g_i}{g_j}\cdot\frac{e^{-\varepsilon_i/KT}}{e^{-\varepsilon_j/KT}} \Rightarrow N_1 = \frac{N}{Z}e^{-1}\ ;\ N_2 = 2\frac{N}{Z}e^{-2},\ N_3 = 2\frac{N}{Z}e^{-3}$$

وعليه يكون :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N}{2}\cdot\frac{e^{-1}}{e^{-2}} = \frac{N}{2}e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

(3) درجات

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{N}{2}\cdot\frac{e^{-1}}{e^{-3}} = \frac{N}{2}e^{2} > 1 \Rightarrow N_1 > N_3$$

$$\frac{N_2}{N_3} = \frac{2}{2}\cdot\frac{e^{-2}}{e^{-3}} = e > 1 \Rightarrow N_2 > N_3$$

درجة واحدة

$\Rightarrow N_1 > N_2 > N_3 \Rightarrow$ التوزيع طبيعي

* السؤال الثالث :

نبدأ من الطرف الأيمن للوصول للأيسر

(1): $$\frac{\partial(\beta F)}{\partial\beta}\Big|_V = F + \beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\Big|_V \quad ----(*)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\beta}\Big|_V = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial\beta}\right)_V = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V}_{-S}\cdot\underbrace{\frac{\partial T}{\partial\beta}\Big|_V}_{1/K\beta^2} = -S\cdot\frac{1}{K\beta^2} \overset{(*)}{\Rightarrow} F - \beta S\frac{1}{K\beta^2} = F - \frac{S}{K\beta}$$

$$\Rightarrow F - \frac{S}{K\beta} = F + TS = U$$ وهو المطلوب (4) درجات ; $\beta = -1/KT$

(2): $$F - T\underbrace{\frac{\partial F}{\partial T}\Big|_V}_{-S} = F + TS = U$$ وهو المطلوب (4) درجات

(3): $$-T^2\frac{\partial}{\partial T}\cdot\left(\frac{F}{T}\right)_V = -T^2\left(\frac{T\frac{\partial F}{\partial T} - F}{T^2}\right)_V = F - T\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V}_{-S} = F + TS = U$$ وهو المطلوب (4) درجات

نبدأ من الطرف الأيسر للوصول للأيمن

(4): $$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V\right) = \left[\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial F}{\partial T} - T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right]_V = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Big|_V$$ وهو المطلوب (4) درجات

(5): $$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial \beta F}{\partial\beta}\right)_F \ ;\ \frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{KT^2}\frac{\partial}{\partial\beta}$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{1}{KT^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\beta F}{\partial\beta}\right) = \frac{K}{K^2T^2}\left(\frac{\partial^2\beta F}{\partial\beta^2}\right)_V = K\beta^2\left(\frac{\partial^2\beta F}{\partial\beta^2}\right)_V$$ وهو المطلوب (4) درجات

جامعة طرطوس	اسئلة مقرر فيزياء للرياضيات	الاسم:
كلية العلوم	لطلاب السنة الثانية رياضيات	الدرجة: 100
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي: 2024 - 2025 م	المدة: ساعتان

السؤال الأول (40 درجة):

يطبق إحصاء مكسويل - بولتزمان على الغاز الكلاسيكي ("غاز M-B ")، والذي تكون فيه سويات الطاقة متقاربة لدرجة يمكن اعتبارها مستمرة(بفاصل طاقي قدره $d\varepsilon$). وعند دراسة توزع هذه الجسيمات تبعاً لسرعها المطلقة:
$|\vec{\vartheta}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ في مجال السرع $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$، تبين أنَّ تابع كثافة السرعة المطلقة لماكسويل – بولتزمان يعطى بالعلاقة:

$$f(\vartheta)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2.e^{-\alpha\vartheta^2}$$

علماً أنَّ: $(\alpha=m/2KT)$، وتابع التحاص: $Z=CV(2\pi mKT)^{3/2}$، وثابتة بولتزمان: $\beta=-\frac{1}{KT}$، والعلاقة التي تربط حجم فضاء السرعة الطوري بدرجة التحال بالشكل: $g(\vartheta)d\vartheta=Cd\Gamma(\vartheta)=CV4\pi m^3\vartheta^2d\vartheta\ \ ; C: constant$.

والمطلوب:

- انطلاقاً من العلاقة التي تعطي عدد الجسيمات $dN(\vartheta)$ في مجال السرعة $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$ التالية:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}.e^{(\beta m\vartheta^2/2)}.g(\vartheta)d\vartheta$$

استنتج تابع الكثافة $f(\vartheta)$. علماً أنَّ: $f(\vartheta)d\vartheta=\frac{dN(\vartheta)}{N}$.

- اثبت أن $f(\vartheta)$ تابع كثافة احتمالي.

- اوجد السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H، ثم أوجد المقادير التالية: $\bar{\vartheta},\sqrt{\overline{\vartheta^2}},\overline{\Delta\vartheta^2}$ بدلالة السرعة الأكثر احتمالاً.

- مثل بيانياً السرع المميزة $\vartheta_H,\bar{\vartheta},\sqrt{\overline{\vartheta^2}}$، على منحني تابع الكثافة عند درجة حرارة محددة T.

- لدينا العلاقة التي نحسب من خلالها عدد الجسيمات في مجال محدد للسرعة المطلقة $(0\to\vartheta_0)$ تأخذ الشكل:

$$N_0(0\to\vartheta_0)=N\left[E_r(x)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}\right]$$

والمطلوب:

اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_0(0\to1.6\,\vartheta_H)$.

علماً أنَّ: $E_r(1.6)=0.9763\ \ ;\ \ x=\sqrt{\alpha}.\vartheta_0\ \ ;\ \ \vartheta_H=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

ملاحظة: يعطى تكامل بواسون الثاني بالشكل:

$$\int_0^{+\infty}x^n.e^{-\alpha x^2}=\begin{cases}\dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\,2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ;n\ (\text{زوجي});\ n\geq0\\[2ex] \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ;n\ (\text{فردي});\ n=2m+1;\ m\geq0\end{cases}$$

يتبع ←

السؤال الثاني (30 درجة):

جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$)، موزعة على ثلاث سويات للطاقة بالشكل:

$\varepsilon_1 = 0\ ,\ \varepsilon_2 = \varepsilon\ ,\ \varepsilon_3 = 2\varepsilon\ ;\quad \varepsilon = KT\ (J)$، ومتحللة بالشكل: $g_1 = N,\ g_2 = g_3 = 2$ ، **والمطلوب:**

1. أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد بدلالة N فقط).
2. أوجد طاقة الحالة الماكروية $\left(\overset{\varepsilon_1}{\widehat{N-1}}, \overset{\varepsilon_2}{\widehat{1}}, \overset{\varepsilon_3}{\widehat{0}}\right)$، ثم أوجد الوزن الإحصائي بدلالة N، في الحالات التالية:

(a)- الجسيمات كلاسيكية (متمايزة). (b)- الجسيمات بوزونات (غير متمايزة). (c)- الجسيمات فيرميونات (غير متمايزة).

- **تطبيق:** بفرض $N = 2$، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية للحالات (a, b, c) السابقة ومثلها على سويات الطاقة.

3. بفرض أنّ الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمالاً $\left(\overset{\varepsilon_1}{\widehat{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\widehat{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\widehat{N_3}}\right)_{max}$ بدلالة العدد N و تابع التحاص Z. ثمّ تحقق من حالة التوزع الحاصل (بعد التأكد من أنّ: $N = N_1 + N_2 + N_3$) وذلك من خلال إيجاد نسب أرقام الانشغال للسويات.

السؤال الثالث (20 درجة):

إذا علمت أنّ تحاص الجملة الكلاسيكية يعطى بالعلاقة: $Z = CV(2\pi mKT)^{3/2}$، والمشتقة الأولى لمضروب لاغرانج β تعطى بالعلاقة:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\beta} = KT^2\frac{\partial}{\partial T}}$$

والمشتقة الثانية تعطى بالشكل:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} = KT^2\left[2KT\frac{\partial}{\partial T} + KT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right]}$$

والمطلوب: برهن على ضوء المشتقات $\frac{\partial}{\partial\beta}$ و $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$ أنّ:

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \left.\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}\right|_V = \frac{3}{2}KT,\ \overline{\varepsilon^2} = \left.\frac{1}{z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}\right|_V = \frac{15}{4}(KT)^2,\ \overline{\Delta\varepsilon^2} = \left.\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial\beta^2}\right|_V = \frac{3}{2}(KT)^2}$$

❖ **سؤال القسم العملي:** يجيب على هذا السؤال **فقط** الطلبة ممن ليس لديهم علامة في القسم العملي (10 درجات):

- عرف عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$، ثم استنتج حجوم العناصر التالية: $d\Gamma(p), d\Gamma(\vartheta), d\Gamma(\varepsilon)$.

ملاحظة: يسمح باستخدام الآلة الحاسبة — طرطوس في 2025/08/25 م — حسن اسماعيل – د.آصف يوسف

سلم تصحيح مقرر فيزياء للرياضيات

الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2024 - 2025

☒ إجابة السؤال الأول (1) [40 درجة]:

• إيجاد $f(v)$: (5 درجات)

لدينا: $dN(v) = \frac{N}{Z} e^{\beta m v^2/2} g(v)\,dv$ & $Z = CV(2\pi m kT)^{3/2}$ & $g(v)\,dv = CV 4\pi m^3 v^2 dv$ & $\beta = -1/kT$

وعليه بعد التعويض والاختزال على CV والأخذ بالاعتبار $\alpha = m/2kT$: $dN(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2} dv = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2} dv$

والآن بالقسمة على N : $\frac{dN(v)}{N} = f(v)\,dv \Rightarrow 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2} dv \Longleftrightarrow \boxed{f(v) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2}}$

• برهان أنّ $f(v)$ تابع كثافة احتمالي : (5 درجات)

$v \in [0, \infty[\Rightarrow$ يجب أن يكون $\int_0^\infty f(v)\,dv = 1 \Rightarrow$ احتمالي

للتحقق من ذلك: $\int_0^\infty 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2} dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} dv}_{(*)}$

$$(*) = \int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{2!}{\left(\frac{2}{2}\right)!\, 2^{2+1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2+1}}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$\Rightarrow \int_0^\infty f(v)\,dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1 \Rightarrow f(v)$ تابع كثافة احتمالي

• إيجاد السرع المميزة:

① السرعة الأكثر احتمالاً (v_H) : (5 درجات)

وهي السرعة الموافقة لنهاية عظمى لتابع كثافة السرعة، وبالتالي:

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} = 0 \Rightarrow 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \left[2v e^{-\alpha v^2} - 2\alpha v v^2 e^{-\alpha v^2}\right] = 0 \Rightarrow 2v e^{-\alpha v^2}(1 - \alpha v^2) = 0$$

إمّا $v e^{-\alpha v^2} = 0$ ؛ أي عندما: $v = 0$ & $v = +\infty$ وهي حلول غير مقبولة فيزيائياً.

أو عندما $1 - \alpha v^2 = 0 \Leftarrow \boxed{v_H = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \;;\; \alpha = \frac{m}{2kT}}$

② القيمة الوسطى للسرعة ($\bar{v}$) : (5 درجات)

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v)\,dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv}_{(**)}$$

$(**) = \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv \; ; n=3$ (فردي) $\Rightarrow n=2m+1 \Rightarrow m=1 \Rightarrow (**) = \frac{1}{2\alpha^2}$

بالتعويض $\Rightarrow \bar{v} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_H \simeq 1.13\, v_H = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \simeq 1.13\, v_H}$$

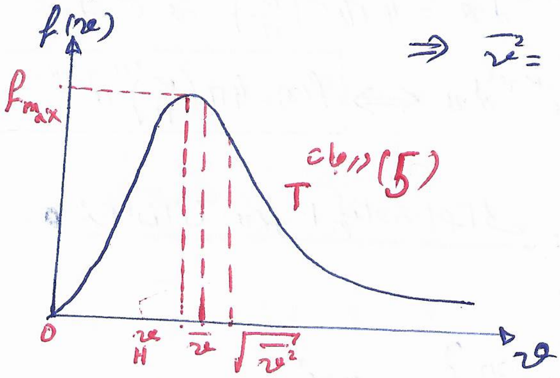
3. إيجاد القيمة الوسطى لمربع السرعة $\overline{v^2}$: (5 درجات)

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)\, dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2} dv}_{(***)}$$

$(***) = \int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2} dv \; ; n=4$ (زوجي) $\Rightarrow (***) = \frac{4!}{\frac{4}{2}!\, 2^{4+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{4+1}}} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$

$$\Rightarrow \overline{v^2} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2} v_H^2 = \frac{3kT}{m}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, v_H \simeq 1.22\, v_H \Rightarrow \boxed{\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \simeq 1.22\, v_H}$$



الشكل ((منحني تابع الكثافة بدلالة v عند T محددة)) وعليه السرع المميزة.

4. إيجاد Δv: (5 درجات)

$$\overline{\Delta v^2} = \overline{v^2} - \bar{v}^2 = \frac{3}{2} v_H^2 - \frac{4}{\pi} v_H^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \simeq 0.227\, v_H^2$$

* $N_0 (0 \to 1.6\, v_H) = 83.67\%\, N$ (5 درجات)

إجابة السؤال الثالث: (30 درجة)

1. عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_0 = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(N+3-1)!}{N!\,(3-1)!} = \frac{(N+2)(N+1)N!}{N!\; 2} = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$ (3 درجات)

2. طاقة الحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{N-1}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$:

$$U_{(N-1,1,0)} = \sum N_i \varepsilon_i = (N-1)\times 0 + 1\times kT + 0\times 2kT = kT \;(J)$$ (3 درجات)

إيجاد الأوزان الإحصائية بدلالة N:

- $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = N!\left[\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{2^1}{1!} \cdot \frac{2^0}{0!}\right] = \frac{N!\, N^{N-1}}{(N-1)!} = 2N^N$ (2 درجات)
- $W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1,0)} = \frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!} \cdot \frac{(1+2-1)!}{1!\,(1-1)!} \cdot \frac{(0+2-1)!}{0!\,(1-1)!}$

$$= \frac{2(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$ (2 درجات)

26 35 65

• في حالة الفيرميونات نتحقق من الشرط $\boxed{g_i \geq N_i}$ من أجل كل سوية طاقة.

ومنه من أجل الحالة المدروسة $(N-1, 1, 0)$ الإحصائية:

من أجل السوية الأولى: $g_1 = N \Rightarrow N > N-1 \Rightarrow$ الشرط محقق

من أجل السوية الثانية: $g_2 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$ الشرط محقق

من أجل السوية الثالثة: $g_3 = 1 \Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow$ الشرط محقق

إذن ، بناءً على السابق يمكن إيجاد الوزن الإحصائي للحالة المعطاة :

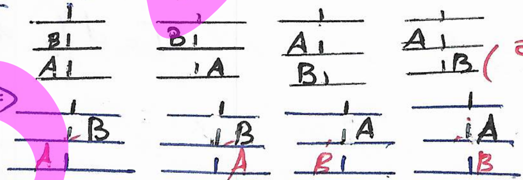
$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} = \frac{N!}{(N-1)!\,(N-N+1)!} \cdot \frac{2!}{1!\,(2-1)!} \cdot \frac{2!}{0!\,(2-0)!}$$

$$= 2N$$ (2 درجة)

• تطبيق: من أجل $N=$ أوجد الأوزان الإحصائية للحالة السابقة :

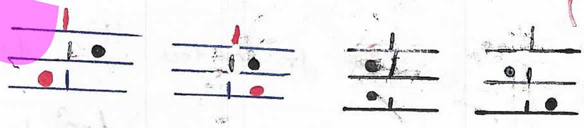
الحالة المطلوبة هي : $(2, 1, 0)$

الجسيمات الكلاسيكية $\Rightarrow W_{M-B} = 2N^N \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 2\cdot 2^2 = 8 \Rightarrow$ (2 درجة)



الجسيمات الكمية بوزونات $\Rightarrow W_{B-E} = \frac{2(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} = \frac{2(4-2)!}{[(2-1)!]^2} = 4$ (2 درجة)

الجسيمات الكمية فرميونات $\Rightarrow W_{F-D} = 2N = 4$ (2 درجة)



③ • إيجاد أرقام إشغال الحالة الأكثر احتمالاً بدلالة العدد N وتابع التقاسم Z :

- الجسيمات كلاسيكية ، نحسب تابع التقاسم من العلاقة :

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = N e^{0} + 2e^{-1} + 2e^{-2} = N + 2e^{-1} + 2e^{-2}$$ (2 درجة)

- نوجد أرقام إشغال كل سوية من السويات :

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} \Rightarrow N_1 = \frac{N}{Z}\cdot N e^{0} = \frac{N^2}{Z}$$

$$N_2 = \frac{N}{Z}\cdot 2\cdot e^{-1} = 2\frac{N}{Z}e^{-1}$$ (3 درجات)

$$N_3 = \frac{N}{Z}\cdot 2\cdot e^{-2} = 2\frac{N}{Z}e^{-2}$$

4

* ويمكن التحقق من ذلك بالجمع:

$$N = \sum N_i = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{N^2}{Z} + \frac{2N}{Z} e^{1} + \frac{2N}{Z} e^{2} = \frac{N}{Z} \underbrace{(N + 2e^{1} + 2e^{2})}_{Z} = N$$ (درجتان)

* لإيجاد نوع التوزيع الحاصل نوجد نسب أرقام الإشغال:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N}{2} e > 1 \quad \& \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{N e^2}{2} > 1 \quad \& \quad \frac{N_2}{N_3} = e > 1$$ (3 درجات)

إذن: $N_1 > N_2 > N_3 \Rightarrow$ التوزيع الحاصل طبيعي (درجتان)

سؤال العشر العملي: (10 درجات)

• يعرف عنصر حجم الفراغ الطوري بالعلاقة:

$$d\Gamma = dq_v \cdot dp_v$$ (درجة واحدة)

• إيجاد $d\Gamma(p)$:

نفرض $dq_v = dx\,dy\,dz = V \quad \& \quad dp_v = d\left(\frac{4}{3}\pi p^3\right) = 4\pi p^2 dp$

$$\Rightarrow \boxed{d\Gamma(p) = 4\pi V p^2 dp} \quad (1)$$ (3 درجة)

• إيجاد $d\Gamma(v)$:

لدينا: $p = m v \Rightarrow dp = m\,dv \xrightarrow{(1)} d\Gamma(v) = 4\pi V m^2 v^2 m\,dv$

$$\Rightarrow \boxed{d\Gamma(v) = 4\pi V m^3 v^2 dv} \quad (2)$$ (درجتان)

• إيجاد $d\Gamma(\varepsilon)$:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p^2 = 2m\varepsilon \Rightarrow p = \sqrt{2m\varepsilon}$$

$$\Rightarrow dp = \frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} \xrightarrow{(1)} d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V \cdot 2m\varepsilon \cdot \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon}$$ (3 درجة)

السؤال الثالث (20 درجة):

للبرهان على صحة علاقة معطاة ننطلق من أحد الأطراف بغية الوصول للطرف الآخر.

(6 درجات) **العلاقة الأولى**:

$$* \ \bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2}KT$$

$$* \ \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\ln C + \ln V + \frac{3}{2}\ln(2\pi m K) + \frac{3}{2}\ln T\right]$$

$$= KT^2 \frac{\partial}{\partial T}\left[\ln C + \ln V + \frac{3}{2}\ln(2\pi m K) + \frac{3}{2}\ln T\right] = KT^2\left(\frac{3}{2T}\right) = \frac{3}{2}KT$$

وهو المطلوب

(8 درجات) **العلاقة الثانية**:

$$* \ \overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{15}{4}(KT)^2$$

$$* \ \frac{1}{Z}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{1}{Z}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\left[CV(2\pi m K T)^{3/2}\right] = \frac{1}{Z}KT^2\left(2KT\frac{\partial}{\partial T} + KT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right)\left[CV(2\pi m K T)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{CV(2\pi m K T)^{3/2}} \cdot CV(2\pi m K)^{3/2} \cdot KT^2\left(2KT\frac{\partial}{\partial T} + KT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right)\left(T^{3/2}\right)$$

$$= KT^{1/2}\left[2KT\frac{\partial}{\partial T}\left(T^{3/2}\right) + KT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(T^{3/2}\right)\right]$$

$$= KT^{1/2}\left[3KT^{3/2} + \frac{3}{4}KT^{3/2}\right] = \frac{15}{4}KT^2$$

وهو المطلوب

(6 درجات) **العلاقة الثالثة**:

$$* \ \overline{\Delta\varepsilon^2} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{3}{2}(KT)^2$$

$$* \ \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = KT^2\left(2KT\frac{\partial}{\partial T} + KT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right)\left[\ln C + \ln V + \frac{3}{2}\ln(2\pi m K) + \frac{3}{2}\ln T\right]$$

$$= KT^2\left(3KT\cdot\frac{3}{2}\frac{\partial \ln T}{\partial T} + KT^2\,\frac{3}{2}\,\frac{\partial^2 \ln T}{\partial T^2}\right)$$

$$= KT^2\left(3K - \frac{3}{2}K\right) = \frac{3}{2}(KT)^2$$

وهو المطلوب

حسن اسماعيل - د. أشرف يوسف

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات ـ السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2024 - 2025

<u>س ١ - أجب عن البنود الثلاث التالية</u>: (50 درجة).

<u>١-</u> استنتج عبارة **<u>رقم الانشغال</u>** $N_{i(B-E)_{max}}$ لتوزع بوزة - آينشتين، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

<u>٢-</u> **<u>مسألة</u>**: جملة مكونة من N جسيم $(N>>1)$ موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT\ \ (J)$، السويتان متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

١- أوجد عدد حالات التوزع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

٢- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{N-1}, \overset{\varepsilon_2}{1})$ في الحالات التالية

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

٣- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة z والطاقم Z_Ω. ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

<u>٣-</u> تُعبر الصيغة $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\vartheta)\, d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$، وفقاً لتوزع (M-B). والمطلوب:

- أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV\,(2\pi\, mKT)^{3/2}$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

<u>س ٢ - أجب عن البندين التاليين</u>: (40 درجة).

<u>١-</u> أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

<u>٢-</u> أجب عن النقاط الثلاث التالية

- استفد من نظرية غوص ومن تعريفي الزاوية المجسمة والحقل الكهربائي بالصيغة الشعاعية في البرهان على أن: $\Phi = k\,q\,\Omega$
- اكتب معادلات مكسويل في الفراغ بالصيغة التفاضلية، ثم استفد من الخاصة التالية $rot(rot\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ في إيجاد معادلة انتشار متجهة الحقل الكهربائي.
- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\,\vec{E} = 0$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: / / 2025

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
دورة الفصل الأول للعام الدراسي 2024 – 2025 (تسعون درجة)

ج ١: (50 درجة)

١- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{\underset{\max}{i(B-E)}}$

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (B-E). المعطاة بالعلاقة: $W_{B-E}=\prod_i \dfrac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}$

وحيث أن الجسيمات هي بوزونات (كمية) فيكون عددها N_i ودرجة تحلل سويات الطاقة g_i كبيرين، لذا يُهمل الواحد في توزع (B-E) وتصبح عبارة الوزن الإحصائي بالشكل التالي: $W_{B-E}\approx\prod_i \dfrac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{B-E})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{B-E})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{B-E})\approx Ln\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)!-Ln\,N_i!-Ln\,g_i!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{B-E})\approx\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]$$

بما أن W_{B-E} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{B-E})=\frac{\partial\,Ln(W_{B-E})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)+\frac{N_i+g_i}{N_i+g_i}-Ln\,N_i-\frac{N_i}{N_i}\right]dN_i=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)-Ln\,N_i\right]dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})\approx\sum_i Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}\,dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N=\sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN=\sum_i dN_i \quad \text{و} \quad U=\sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU=\sum_i \varepsilon_i\,dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\;\Rightarrow\;Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\;\Rightarrow\;\frac{N_i+g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\;\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1\;\Rightarrow\;\boxed{N_{\underset{\max}{i(B-E)}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1}}$$

٢- المسألة:

١- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(N+2-1)!}{N!(2-1)!}=\frac{(N+1)!}{N!\,1!}=\frac{(N+1)N!}{N!\,1!}=N+1$$

٢- A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\;\Rightarrow W_{(N-1,1)}==N!\left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{2^1}{1!}\right)=2N$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{M}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\quad\Rightarrow W_{(N-1,1)}=\frac{(N-1+1-1)!}{(N-1)!\,(1-1)!}\;\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}=2$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i\geq N_i$ فهي غير مقبولة

٣- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N=2$. نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT}=1e^{-1}+2e^{-2}$$

تحاص الطاقم

$$Z_\Omega=Z^N=(1e^{-1}+2\,e^{-2})^2=1\,e^{-2}+4\,e^{-4}+4\,e^{-3} \qquad (*)$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U=\sum_i N_i\,\varepsilon_i$ كما يلي $(\overbrace{1,1}^{U=3KT})(\overbrace{0,2}^{U=4KT})(\overbrace{2,0}^{U=2KT})$.

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_\Omega=\sum_i W_i\, e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}\; e^{\beta U_{(2,0)}}+W_{(0,2)}\; e^{\beta U_{(0,2)}}+W_{(1,1)}\; e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta=-1/KT$ ، نجد:

$$Z_\Omega=\sum_i W_i\, e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}\; e^{-2}+W_{(0,2)}\; e^{-4}+W_{(1,1)}\; e^{-3}$$

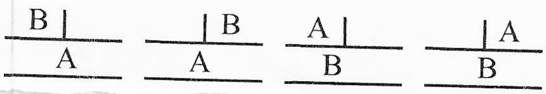
نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة.

$$W_{(1,1)}=4 \quad و \quad W_{(0,2)}=4 \quad و \quad W_{(2,0)}=1$$

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)}=3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$



٣-

لدينا صيغة $dN(\vartheta)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$ بالشكل التالي :

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}\,e^{\beta\,\varepsilon}\,g(\vartheta)\,d\vartheta \qquad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التحاص

$$Z=CV\,(2\pi\, mkT)^{3/2} \qquad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p=m\vartheta \;\Rightarrow\; dp=m\,d\vartheta$$

$$g(\vartheta)\,d\vartheta=C\,d\Gamma(\vartheta)=C\,dq_V\,dp_V=CV\,4\pi\;p^2dp=CV\,4\pi\,m^3\vartheta^2d\vartheta \qquad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

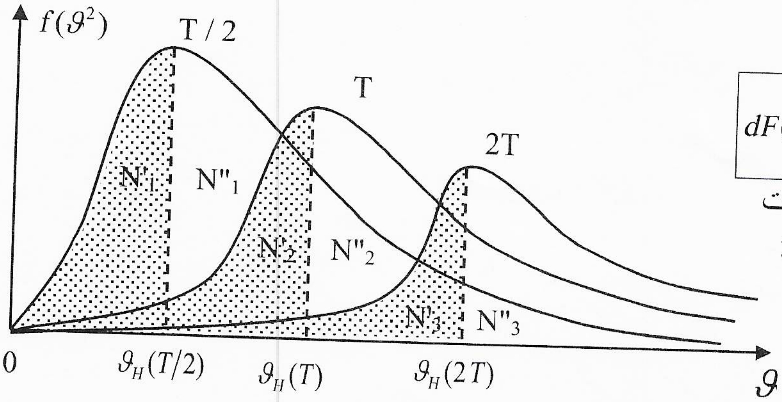
$$\varepsilon=m\vartheta^2/2 \qquad (c)$$

بتعويض العبارات (a) و(b) و(c) في (*)، مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta=-1/kT$ نجد:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{CV\,(2\pi\, mkT)^{3/2}}\;e^{-m\vartheta^2/2kT}\;CV\,4\pi\, m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزع السرعة المطلقة لجسيم واحد ، بالشكل التالي :

$$dF(\vartheta)=\frac{dN(\vartheta)}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi\;kT}\right)^{3/2}\vartheta^2\;\;e^{-m\vartheta^2/2kT}\;d\vartheta=\;f(\vartheta^2)\,d\vartheta$$



و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

$$\boxed{dF(\vartheta) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 \ e^{-\alpha\vartheta^2} \ d\vartheta = f(\vartheta^2)\, d\vartheta}$$

- نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي:

<u>المناقشة والتفسير :</u>

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات $N = cte$ عند كل درجة حرارة .

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث $N = N' + N''$

حيث N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H .

و N'' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من ϑ_H .

حيث ϑ_H السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) ، (السرعة الأكثر احتمالاً).

<u>النتائج :</u>

١- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات

٢- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N'' على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$) .

٣- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

ج ٢: (40 درجة)

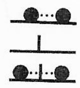
<u>١-</u>

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{1}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{0}})$

LC
ALB

الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^1}{1!} \frac{1^0}{0!} \right) = 24$

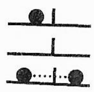
الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{0}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{2}})$



الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!} \frac{(0+2-1)!}{0!\,1!} \frac{(2+1-1)!}{2!\,0!} = 3 \times 1 \times 1 = 3$$

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{0}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{1}})$



الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!} \frac{(0+2-1)!}{0!\,1!} \frac{(1+2-1)!}{1!\,1!} = 3 \times 1 \times 2 = 6$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!} \frac{2!}{0!\,(2-0)!} \frac{2!}{1!\,(2-1)!} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

- لدينا نظرية غوص $\Phi = \oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

وباعتبار الحقل الكهربائي $\vec{E} = k\dfrac{q}{r^3}\vec{r}$ ومن تعريف الزاوية المجسمة $\Omega = \oiint_S \dfrac{\vec{E}\, d\vec{S}}{r^3}$

نجد بالتعويض في غوص

$$\Phi = \oiint_S k\frac{q}{r^3}\vec{r}\, d\vec{S} = k\,q \oiint_S \frac{\vec{r}\, d\vec{S}}{r^3} = k\,q\,\Omega$$

- لدينا معادلات مكسويل في الفراغ بالصيغة التفاضلية

1) $div\,\vec{E} = 0$

2) $div\,\vec{B} = 0$

3) $rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4) $rot\,\vec{B} = \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

وباستخدام الخاصة التالية للتوابع النقطية نجد:

$$rot(rot\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} \qquad (*)$$

$$rot(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\nabla^2\vec{E} \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t} rot\,\vec{B} = \nabla^2\vec{E} \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \nabla^2\vec{E} \;\Rightarrow\; \boxed{\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

وهي معادلة انتشار متجهة الحقل الكهربائي.

- برهان أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\,\vec{E} = 0$

نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية يعطى على بعد منها r بالعلاقة

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{و} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq\frac{x}{r^3}\vec{i} + kq\frac{y}{r^3}\vec{j} + kq\frac{z}{r^3}\vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفرق

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) = k\,q\frac{r^3 - 3r^2\dfrac{\partial r}{\partial x}x}{r^6} = \frac{k\,q}{r^3} - \frac{3k\,q\,r^2\dfrac{x}{r}x}{r^6} = \frac{k\,q}{r^3} - \frac{3k\,q\,x^2}{r^5}$$

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\dfrac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد :

$$div\vec{E} = \frac{3k\,q}{r^3} - \frac{3k\,q(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3k\,q}{r^3} - \frac{3k\,q}{r^3} = 0$$

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2023 - 2024

س١- أجب عن البندين التاليين: (40 درجة).

١- عرف عنصر فراغ الحجم الطوري $d\Gamma$ ، ثم استنتج الحجوم الطورية للعناصر التالية $d\Gamma(P)$ و $d\Gamma(\upsilon)$ و $d\Gamma(\varepsilon)$.

٢- مسألة: جملة مكونة من N جسيم $(N>>1)$ موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = KT \ \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \ \ (J)$ ، السويتين متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

١- أوجد عدد حالات التوزع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

٢- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2})$ في الحالات التالية:

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

٣- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقم Z_Ω . ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

س٢- أجب عن البنود الأربعة التالية: (50 درجة).

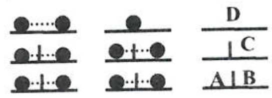
١- اكتب تابع كثافة توزع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية $\overline{n}$ و $\overline{n^2}$ و $\overline{\Delta n^2}$.

٢- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$).
ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}} \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n \ (\text{زوجي}) \ \text{و} \ n \geq 0 \\ \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n \ (\text{فردي}) \ \text{و} \ n = 2m+1 \ \text{و} \ m \geq 0 \end{cases}$$

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.



٤- أجب عن النقطتين التاليتين

- استفد من نظرية غوص ومن تعريفي الزاوية المجسمة والحقل الكهربائي بالصيغة الشعاعية في البرهان على أن: $\Phi = k\, q\, \Omega$
- اكتب معادلات مكسويل في الفراغ بالصيغة التفاضلية، ثم استفد من الخاصة التالية $rot(rot\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ في إيجاد معادلة انتشار متجهة الحقل الكهربائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الحد 12/ 9/ 2024

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2023 – 2024 (تسعون درجة)

ج ١: (40 درجة)

١- يعطى عنصر الفراغ الطوري $\Gamma(q,P)$ بدلالة إحداثيي الموضع q والاندفاع P المعممين. فيكون عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$ بدلالة عنصري الحجم dq_V و dP_V (الخاصين بالموضع والاندفاع على الترتيب)، بالشكل:

$$d\Gamma = dq_V . dP_V \qquad (1)$$

نفرض للسهولة أن عنصر الحجم الخاص بالموضع مساوياً للحجم $dq_V = V$ لأنه يمثل جداءات لعناصر الموضع.

عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

نأخذ عنصر الحجم الخاص بالاندفاع مساوياً لعنصر حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع P ذاته كما يلي:

$$dP_V = d(\frac{4}{3}\pi P^3) = 4\pi P^2 dP$$

بالتعويض في (1) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

$$\boxed{d\Gamma(P) = 4\pi V P^2 dP} \qquad (2)$$

عنصر فراغ السرعة الطوري:

نجده من علاقة كمية الحركة بالسرعة حسب العلاقة:

$$P = m\vartheta \quad \Rightarrow \quad dP = m\,d\vartheta$$

وبالتعويض في (2) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ السرعة الطوري :

$$\boxed{d\Gamma(\vartheta) = 4\pi V m^3 \vartheta^2 d\vartheta} \qquad (3)$$

عنصر فراغ الطاقة الطوري:

نجده من عبارة الطاقة الحركية (باعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المدروس هي طاقة حركية فقط).

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m\vartheta^2 = \frac{P^2}{2m} \qquad (*)$$

وكما هو واضح يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة الاندفاع من (*) في (2) كما يلي:

$$P^2 = 2m\varepsilon \;\Rightarrow\; P = \sqrt{2m\varepsilon} \;\Rightarrow\; dP = \frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على عنصر فراغ الطاقة الطوري :

$$d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V 2m\varepsilon \frac{m\,d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 2\pi V \sqrt{2m}\,\sqrt{\varepsilon}\, 2m\,d\varepsilon$$

$$\boxed{d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon} \qquad (4)$$

٢- المسألة:

١- عدد حالات التوزع الماكروي: $N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(N+2-1)!}{N!(2-1)!} = \frac{(N+1)!}{N!1!} = \frac{(N+1)N!}{N!1!} = N+1$

٢- A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} == N!\left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!}\frac{2^1}{1!}\right) = 2N$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{M}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!(g_i-1)!} \quad \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N-1+1-1)!}{(N-1)!(1-1)!}\frac{(1+2-1)!}{1!(2-1)!} = 2$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة

٣- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N=2$. نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT}=1e^{-1}+2e^{-2}$$

تحاص الطاقم

$$Z_\Omega=Z^N=(1e^{-1}+2\,e^{-2})^2=1\,e^{-2}+4\,e^{-4}+4\,e^{-3} \qquad (*)$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U=\sum_i N_i\varepsilon_i$ كما يلي ($\overbrace{1,1}^{U=3KT}$)($\overbrace{0,2}^{U=4KT}$)($\overbrace{2,0}^{U=2KT}$).

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_\Omega=\sum_i W_i\, e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}\, e^{\beta U_{(2,0)}}+W_{(0,2)}\, e^{\beta U_{(0,2)}}+W_{(1,1)}\, e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta=-1/KT$ ، نجد:

$$Z_\Omega=\sum_i W_i\, e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}\, e^{-2}+W_{(0,2)}\, e^{-4}+W_{(1,1)}\, e^{-3}$$

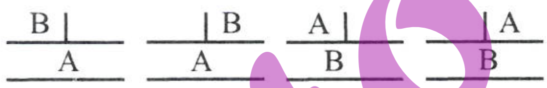
نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة.

$W_{(2,0)}=1$ و $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=4$

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)}=3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$



ج ٢: (50 درجة)

١- يُعطى تابع كثافة توزع برنولي بالعلاقة:

$$\boxed{\omega(n)=\binom{N}{n}p^n\,q^{N-n} \qquad ;\, n\le N}$$

حيث $p\le 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q\le 1$ لأن $q=1-p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N-n)$ مرة من أصل N مرة.

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد لـ نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{N}\omega(n)=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^n\,q^{N-n}=(p+q)^N=(p+1-p)^N=1$$

- إيجاد $\overline{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^n\,q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1}=\sum_{n=0}^{N}n\binom{N}{n}p^{n-1}\,q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1}=\sum_{n=0}^{N}n\underbrace{\binom{N}{n}p^n\,q^{N-n}}_{\omega(n)}=\overline{n} \Rightarrow \boxed{\overline{n}=Np}$$

- إيجاد $\overline{n^2}$: وسطي القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^n\,q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\overline{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1}+N(N-1)p(p+q)^{N-2}=\sum_{n=0}^{N} n^2\binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np+N(N-1)p^2=\sum_{n=0}^{N} n^2 \underbrace{\binom{N}{n} p^{n} q^{N-n}}_{\omega(n)}=\overline{n^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^2}=Np+N^2p^2-Np^2}$$

- إيجاد $\overline{\Delta n^2}$: (التشتت) نعوض في العبارة

$$\boxed{\overline{\Delta n^2}=\overline{n^2}-\bar{n}^2=Np+N^2p^2-Np^2-N^2p^2=Np(1-p)=Npq=\bar{n}\,q}$$

2

٢- لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:

10

ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$.

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}e^{\beta m\vartheta^2/2}\,g(\vartheta)\,d\vartheta$$

2

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta)\,d\vartheta$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\vartheta)\,d\vartheta=C\,d\Gamma(\vartheta)=CV\,4\pi\,m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

2

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z=CV\,(2\pi\,mKT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon=m\vartheta^2/2$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{CV\,(2\pi\,mKT)^{3/2}}\,e^{-m\vartheta^2/2KT}\,CV\,4\pi\,m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\vartheta)=4\pi\,N\left(\frac{m}{2\pi\,KT}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نعتبر أن $\boxed{\alpha=m/2\,KT}$

$$dN(\vartheta)=4\pi\,N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرع بدلالة تابع كثافة السرع كما يلي:

$$dF(\vartheta)=\frac{dN(\vartheta)}{N}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta=f(\vartheta^2)\,d\vartheta$$

حيث يعبر $f(\vartheta^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}$$

4

للبرهان على أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $]0\rightarrow\infty[$.

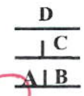
$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty \vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(\vartheta)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}=1$$

2

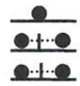
٣- 10



الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\overline{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overline{1}}, \overset{\varepsilon_3}{\overline{1}})$

الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = 4!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^1}{1!}\,\frac{1^1}{1!}\right) = 96$

3



الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\overline{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overline{2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overline{1}})$

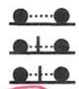
الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)\,!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1\,!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1\,!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,0\,!} = 3\times3\times1 = 9$$

4

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3}\frac{g_i\,!}{N_i!\,(g_i-N_i)\,!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2\,!\,(2-2)\,!}\,\frac{2!}{2\,!\,(2-2)\,!}\,\frac{1\,!}{1!\,(1-1)\,!} = 1\times1\times1 = 1$$



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\overline{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overline{2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overline{2}})$

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)\,!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1\,!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1\,!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0\,!} = 3\times3\times1 = 9$$

3

٤- أجوبة النقطتين التاليتين 20

- لدينا نظرية غوص $\Phi = \oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$

5

وباعتبار الحقل الكهربائي $\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r}$ ومن تعريف الزاوية المجسمة $\Omega = \oiint_S \frac{\vec{r}\, d\vec{S}}{r^3}$

نجد بالتعويض في غوص

$$\Phi = \oiint_S k\frac{q}{r^3}\vec{r}\, d\vec{S} = k\,q\oiint_S \frac{\vec{r}\, d\vec{S}}{r^3} = k\,q\,\Omega$$

5

- لدينا معادلات مكسويل في الفراغ بالصيغة التفاضلية

1) $div\,\vec{E} = 0$

2) $div\,\vec{B} = 0$

3) $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

4) $rot\,\vec{B} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

4

وباستخدام الخاصة التالية للتوابع النقطية نجد:

$$rot(rot\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} \qquad (*)$$

$$rot(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}) = -\nabla^2\vec{E} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}rot\,\vec{B} = \nabla^2\vec{E} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{C^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) = \nabla^2\vec{E} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

6

وهي معادلة انتشار متجهة الحقل الكهربائي.

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2023 - 2024

س١- أجب عن البنود التالية: (50 درجة).

١- عرف عنصر فراغ الحجم الطوري $d\Gamma$ ، ثم استنتج الحجوم الطورية للعناصر التالية $d\Gamma(P)$ و $d\Gamma(\upsilon)$ و $d\Gamma(\varepsilon)$.

٢- مسألة: جملة مكونة من 5000 جسيم متمايز موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = KT \quad (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \quad (J)$ ، السويتان متحللتان بالشكل $g_1 = g_2 = 2$. والمطلوب:

١- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

٢- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2$ ، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$).

٣- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}})_{\max}$ أكبر من وزن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1+1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2-1}})$

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

٣- بفرض أن تابع التحاص $Z = CV\,(2\pi mKT)^{3/2}$. برهن على ضوء المشتقات $\partial/\partial\beta$ و $\partial^2/\partial\beta^2$ أن:

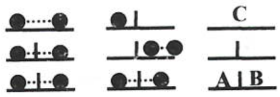
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial LnZ}{\partial\beta} = \frac{3}{2}KT \quad و \quad \overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2} = \frac{15}{4}(KT)^2 \quad و \quad \overline{\Delta\varepsilon^2} = \frac{\partial^2 LnZ}{\partial\beta^2} = \frac{3}{2}(KT)^2$$

- نفرض $Z = (1 - e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}$ ، أوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ في الحالات: $\varepsilon_o << KT$ و $\varepsilon_o = KT$ و $\varepsilon_o >> KT$.

س٢- أجب عن البنود التالية: (40 درجة).

١- جملة مكونة من N من الجسيمات الكمية (غير المتمايزة). فإذا علمت أن دفوعها ترتبط بطاقاتها بالعلاقة: $\varepsilon = C|P|$ حيث C سرعة الضوء. والمطلوب: أوجد تحاص الجملة Z (بدلالة V و T).

٢- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.



٣- أوجد العلاقة بين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ لشحنة $q^{\pm}$ تتحرك بسرعة $\vec{\vartheta}$.

ثم استنتج علاقة التوفيق لـ مكسويل التالية $\varepsilon_o \mu_o C^2 = 1$. علماً أن: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\vec{u}$ و $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} q \frac{\vec{\vartheta} \wedge \vec{u}}{r^2}$

و $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \; Hey/m$ و $\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9 \times 10^9 \; Nm^2/Col^2$ وأن وحدات القياس $\frac{C^2}{Nm^2}\frac{Hey}{m} = \frac{S^2}{m^2}$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 15 / 7 / 2024

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
دورة الفصل الثاني للعام الدراسي 2023 – 2024 (تسعون درجة)

ج ١: (50 درجة)

١- يعطى عنصر الفراغ الطوري $\Gamma(q,P)$ بدلالة إحداثيي الموضع q والاندفاع P المعممين. فيكون عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$ بدلالة عنصري الحجم dq_V و dP_V (الخاصين بالموضع والاندفاع على الترتيب)، بالشكل: 15

$$d\Gamma = dq_V . dP_V \qquad (1)$$

نفرض للسهولة أن عنصر الحجم الخاص بالموضع مساوياً للحجم $dq_V = V$ لأنه يمثل جداءات لعناصر الموضع.

عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

نأخذ عنصر الحجم الخاص بالاندفاع مساوياً لعنصر حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع P ذاته كما يلي:

$$dP_V = d(\frac{4}{3}\pi P^3) = 4\pi P^2 dP$$

بالتعويض في (1) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

$$\boxed{d\Gamma(P) = 4\pi V P^2 dP} \qquad (2)$$

5

عنصر فراغ السرعة الطوري:

نجده من علاقة كمية الحركة بالسرعة حسب العلاقة:

$$P = m\vartheta \quad \Rightarrow \quad dP = m\, d\vartheta$$

وبالتعويض في (2) عن كلٍ بقيمته نحصل على عنصر فراغ السرعة الطوري :

$$\boxed{d\Gamma(\vartheta) = 4\pi V m^3 \vartheta^2 d\vartheta} \qquad (3)$$

5

عنصر فراغ الطاقة الطوري:

نجده من عبارة الطاقة الحركية (باعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المدروس هي طاقة حركية فقط).

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \vartheta^2 = \frac{P^2}{2m} \qquad (*)$$

وكما هو واضح يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة الاندفاع من (*) في (2) كما يلي:

$$P^2 = 2m\varepsilon \quad \Rightarrow \quad P = \sqrt{2m\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad dP = \frac{m\, d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على عنصر فراغ الطاقة الطوري :

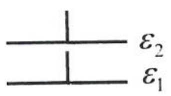
$$d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V\, 2m\varepsilon \frac{m\, d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 2\pi V \sqrt{2m}\, \sqrt{\varepsilon}\, 2m\, d\varepsilon$$

$$\boxed{d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon} \qquad (4)$$

5

٢- المسألة: 20

١- عدد حالات التوزع الماكروي:



$$N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(5000+2-1)!}{5000\,!\,(2-1)!} = \frac{5001\,!}{5000\,!} = \frac{5001\times 5000!}{5000\,!} = 5001 \qquad 4$$

٢- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}})_{max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} \qquad ; Z = \sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} = 1{,}006 \qquad 4$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1\, e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{5000}{1{,}006} 2e^{-1} \approx 3658 \qquad 4$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2\, e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{5000}{1{,}006} 2e^{-2} \approx 1342 \qquad 4$$

$$N = N_1 + N_2 = 3658 + 1342 = 5000 \qquad 1$$

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}=\sum_i N_i\,\varepsilon_i=N_1\,\varepsilon_1+N_2\,\varepsilon_{23}=3658\;KT+1342\times 2KT=6342\;KT$$ 1

٣- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1,N_2)_{\max}}=N!\prod_i\frac{g_i^{\,N_i}}{N_i\,!}=N!\,(\frac{2^{\,N_1}}{N_1\,!}\frac{2^{\,N_2}}{N_2\,!})$$

$$W'_{(N_1+1,N_2-1)}=N!\prod_i\frac{g_i^{\,N_i}}{N_i\,!}=N!\,(\frac{2^{\,N_1+1}}{(N_1+1)!}\frac{2^{\,N_2-1}}{(N_2-1)!})$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-1,)}}=\frac{2^{N_1}}{N_1\,!}\frac{2^{N_2}}{N_2\,!}\frac{(N_1+1)!}{2^{N_1+1}}\frac{(N_2-1)!}{2^{N_2-1}}=\frac{2^{N_1}}{N_1\,!}\frac{2^{N_2}}{N_2\,(N_2-1)\,!}\frac{(N_1+1)\,N_1\,!}{2\times 2^{N_1}}\frac{(N_2-1)!}{2^{-1}\times 2^{N_2}}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-1)}}=\frac{(N_1+1)}{N_2}=\frac{3659}{1342}\approx 2{,}7>1\quad\Rightarrow\quad W_{(N_1,N_2)_{\max}}>W'_{(N_1+1,N_2-1)}$$ 2

٣- لدينا المشتقة $\frac{\partial}{\partial\beta}=KT^2\frac{\partial}{\partial T}$ 15

نوجد المشتقة $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$ بالشكل $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}=\frac{\partial}{\partial\beta}(KT^2\frac{\partial}{\partial T})=KT^2\frac{\partial}{\partial T}(KT^2\frac{\partial}{\partial T})=KT^2(2KT\frac{\partial}{\partial T}+KT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2})$

لبرهان العلاقة $\bar{\varepsilon}=\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}=\frac{3}{2}KT$ ننطلق من الطرف الأيسر وباعتبار $\frac{\partial}{\partial\beta}=KT^2\frac{\partial}{\partial T}$

ولدينا $Z=CV\,(2\pi mKT)^{3/2}=CV\,(2\pi mK)^{3/2}T^{3/2}\Rightarrow LnZ=LnCV\,(2\pi mK)^{3/2}+LnT^{3/2}$ نجد بالتعويض

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}=KT^2\frac{\partial}{\partial T}(LnCV\,(2\pi mK)^{3/2}+LnT^{3/2})=KT^2(0+\frac{3}{2T})=\frac{3}{2}KT$$ 3

لبرهان العلاقة $\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}=\frac{15}{4}(KT)^2$ ننطلق من الطرف الأيسر وباعتبار $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}=KT^2(2KT\frac{\partial}{\partial T}+KT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2})$

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}=\frac{1}{Z}KT^2(2KT\frac{\partial Z}{\partial T}+KT^2\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2})$$

وبملاحظة أن $Z=CV\,(2\pi mK)^{3/2}T^{3/2}\Rightarrow\frac{\partial Z}{\partial T}=\frac{3}{2}CV\,(2\pi mK)^{3/2}T^{1/2}$

فيكون $\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2}=\frac{3}{2}CV\,(2\pi mK)^{3/2}\frac{1}{2T^{1/2}}$ وبالتعويض عن كل بقيمته نجد

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{CV\,(2\pi mK)^{3/2}T^{3/2}}KT^2[2KT\,\frac{3}{2}CV\,(2\pi mK)^{3/2}T^{1/2}+KT^2\frac{3}{2}CV\,(2\pi mK)^{3/2}\frac{1}{2T^{1/2}})]$$

$$\overline{\varepsilon^2}=KT^{1/2}(3KT^{3/2}+\frac{3}{4}KT^{3/2})=\frac{15}{4}(KT)^2$$ 3

لبرهان العلاقة $\overline{\Delta\varepsilon^2}=\frac{\partial^2 LnZ}{\partial\beta^2}=\frac{3}{2}(KT)^2$ نجد بنفس الأسلوب

$$\overline{\Delta\varepsilon^2}=\frac{\partial^2 LnZ}{\partial\beta^2}=KT^2(2KT\frac{\partial LnZ}{\partial T}+KT^2\frac{\partial^2 LnZ}{\partial T^2})$$

وبما أن $\frac{\partial LnZ}{\partial T}=\frac{3}{2T}$ فيكون $\frac{\partial^2 LnZ}{\partial T^2}=-\frac{6}{4T^2}=-\frac{3}{2T^2}$ وبالتعويض عن كل بقيمته نجد

$$\overline{\Delta\varepsilon^2}=KT^2(2KT\frac{3}{2T}-KT^2\frac{3}{2T^2})=\frac{3}{2}(KT)^2$$ 3

أ.د. ...

$$\overline{\Delta\varepsilon^2}=\overline{\varepsilon^2}-\bar{\varepsilon}^2=\frac{15}{4}(KT)^2-(\frac{3}{2}KT)^2=\frac{3}{2}(KT)^2$$

• لدينا $Z=(1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}$

نوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة: $\bar{\varepsilon}=\dfrac{\partial LnZ}{\partial\beta}$

$$LnZ=Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}=-2\,Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}=-2\frac{-\varepsilon_o\,e^{\beta\varepsilon_o}}{1-e^{\beta\varepsilon_o}}=\frac{2\varepsilon_o}{e^{-\beta\varepsilon_o}-1}=\frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}-1}$$ 3

من أجل $\varepsilon_o<<KT$ ننشر التابع الأسي ونكتفي بالحدين الأول والثاني $e^{\varepsilon_o/KT}\approx 1+\dfrac{\varepsilon_o}{KT}$ وبالتعويض نجد:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{2\varepsilon_o}{1+\dfrac{\varepsilon_o}{KT}-1}\approx 2KT$$ 1

من أجل $\varepsilon_o=KT$ نجد: $\bar{\varepsilon}=\dfrac{2\varepsilon_o}{e-1}\approx 1{,}17\,KT \;\Rightarrow\; \bar{\varepsilon}>KT$ 1

من أجل $\varepsilon_o>>KT$ يصبح المقدار $e^{\varepsilon_o/KT}>>1$ ويهمل الواحد الموجود في المقام فنجد: $\bar{\varepsilon}=\dfrac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}}\approx 0$ 1

ج ٢: (40 درجة)

١- نحسب Z من الصيغة التكاملية. ونأخذ التكامل على المجال الموجب $]0\to\infty[$ لأن الاندفاعات مأخوذة بالقيمة المطلقة. كما يلي: 10

$$Z=\int_0^{+\infty}e^{\beta\varepsilon}g(P)\,dP=\frac{1}{h^3}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{C}{KT}|P|}\,dq_V\,dP_V=\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^{+\infty}P^2\,e^{-\delta|P|}\,dP\quad;\ \delta=C|\beta|=\frac{C}{KT}$$ 2

نوجد قيمة التكامل بالشكل التالي:

$$\int_0^{+\infty}P^2e^{-\delta|P|}\,dP=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left(e^{-\delta|P|}\right)dP=\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\int_0^{+\infty}e^{-\delta|P|}\,dP=\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[-\frac{1}{\delta}e^{-\delta|P|}\right]_0^{\infty}=\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left[-\frac{1}{\delta}(0-1)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\delta}\left(-\frac{1}{\delta^2}\right)=-\left(\frac{0-2\delta}{\delta^4}\right)=\frac{2}{\delta^3}=2\left(\frac{1}{\delta}\right)^3$$

ملاحظة: يمكن حل التكامل بطريقة ثانية باستخدام تابع غاما وذلك بإجراء تغيير في المتحول (نفرض $\delta|P|=x$) كما يلي:

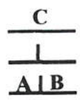
$$\int_0^{+\infty}P^2e^{-\delta|P|}\,dP=\frac{1}{\delta^3}\underbrace{\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}\,dx}_{\Gamma(2+1)=2\Gamma(2)=2}=2\left(\frac{1}{\delta}\right)^3$$

بالتعويض في عبارة Z نجد: 8

$$Z=\frac{8\pi V}{h^3}\left(\frac{1}{\delta}\right)^3=\frac{8\pi VK^3}{C^3h^3}T^3=\lambda VT^3\qquad;\ \lambda=\frac{8\pi K^3}{C^3h^3}=cte$$

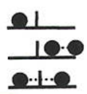
٢- 20

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{0},\overset{\varepsilon_3}{1})$



الوزن الإحصائي $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\dfrac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(2,0,1)}=3!\left(\dfrac{2^2}{2!}\,\dfrac{2^0}{0!}\,\dfrac{1^1}{1!}\right)=12$ 6

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{1})$



الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\;\Rightarrow\; W_{(2,2,1)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!}=3\times3\times2=18$$ 7

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\overrightarrow{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overrightarrow{2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overrightarrow{2}})$

الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!} \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!} \frac{(2+1-1)!}{2!\,0!} = 3\times3\times1 = 9$$

7

٣- العلاقة بين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ لشحنة $q^{\pm}$ تتحرك بسرعة $\vec{\vartheta}$: 10

تُصدر الشحنة $q^{\pm}$ حقلاً كهربائياً $\vec{E}$ سواء كانت ساكنة أم متحركة ، تُعطى قيمته المتجهة وفق العلاقة :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^2} \vec{u} \qquad ; \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \qquad (*)$$

في حين تبدأ الشحنة $q^{\pm}$ بإصدار حقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$ عند حركتها المتسارعة فقط (بسرعة $\vec{\vartheta}$).

تُعطى قيمة $\vec{B}$ المتجهة وفق قانون بيو - سافار :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} q \frac{\vec{\vartheta} \wedge \vec{u}}{r^2} \qquad \mu_o = 4\pi\times10^{-7}\ Hey/m$$

بالضرب والقسمة على ε_o ومراعاة (*) نجد :

$$\vec{B} = \frac{\varepsilon_o \mu_o}{4\pi\varepsilon_o} q \frac{\vec{\vartheta} \wedge \vec{u}}{r^2} = \varepsilon_o \mu_o \vec{\vartheta} \wedge \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{B} = \varepsilon_o \mu_o \vec{\vartheta} \wedge \vec{E} \qquad (**)$$

5

علاقة التوفيق (لـ مكسويل) :

نحسب قيمة جداء ثابتي النفاذية المغناطيسية للفراغ μ_o ، والسماحية الكهربائية للفراغ ε_o

$$\varepsilon_o \mu_o = \frac{1}{36\pi\times10^9} \frac{C^2}{Nm^2} \times 4\pi\times10^{-7} \frac{Hey}{m} = \frac{1}{9\times10^{16}} \underbrace{\frac{C^2}{Nm^2} \frac{Hey}{m}}_{\Delta}$$

وبما أن وحدة القياس Δ تساوي $\Delta = \frac{S^2}{m^2}$. بالتعويض

$$\varepsilon_o \mu_o = \frac{1}{9\times10^{16}} \frac{S^2}{m^2} = \frac{1}{9\times10^{16} \frac{m^2}{S^2}}$$

لاحظ مكسويل أن للجداء $\varepsilon_o \mu_o$ قيمة تساوي مقلوب مربع سرعة . فافترضها c^2 حيث

$$C^2 = 9\times10^{16} \frac{m^2}{S^2} \Rightarrow C = 3\times10^8\ m/s$$

فيما بعد تبيّن لمكسويل أن هذه القيمة $C = 3\times10^8\ m/s$ ماهي إلا سرعة الضوء في الفراغ .

وبالتالي يكون قد اثبت أن الضوء عبارة عن أمواج كهرطيسية ينتشران في الفراغ بسرعة واحدة C .

من هنا أتت تسمية العلاقة التالية بعلاقة التوفيق

$$\varepsilon_o \mu_o C^2 = 1 \qquad (A)$$

لذا يمكن إعادة صياغة (**) بدلالة سرعة الضوء بالشكل التالي :

$$\vec{B} = \frac{1}{C^2} \vec{\vartheta} \wedge \vec{E} \qquad (B)$$

5

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2023 - 2024

س1- أجب عن البنود التالية: (50 درجة).

1- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(B-E)_{\max}}$ لتوزع بوزة - آينشتين، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم $(N>>1)$ موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = KT \ \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \ \ (J)$، السويتان متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overset{\varepsilon_2}{1})$ في الحالات التالية

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

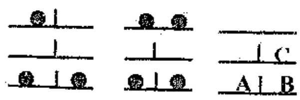
3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة z والطاقم Z_g. ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

3- تُعبر الصيغة $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\vartheta) d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$، وفقاً لتوزع (M-B). والمطلوب:

- أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV(2\pi m KT)^{3/2}$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

س2- أجب عن البنود التالية: (40 درجة).

1- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

2- مسألة كهرباء:

تُثبت في رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $\ell \ (m)$، ثلاث شحنات متساوية القيمة، $q\,(col)$ لكل منها، ومهملة الوزن.

1- إذا كانت الشحنات مختلفة الإشارة بحيث تكون واحدة موجبة واثنتين سالبتين. المطلوب:

- ارسم الشكل، ومثّل عليه اتجاه قوة كولون $\vec{F}_c$ المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ).
- مثّل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ)، وحدد اتجاه حركة كلٍ منها بعد إزالة التثبيت.

2- إذا كانت الشحنات الثلاث متساوية القيمة ومتفقة الإشارة (سالبة). والمطلوب:

- ارسم الشكل الجديد، ومثّل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها.
- أوجد قيمة الشحنة الموجبة الرابعة الواجب وضعها في مركز المثلث بحيث تبقى الشحنات في أماكنها بعد إزالة التثبيت.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأربعاء 24 / 1 / 2024

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
دورة الفصل الأول للعام الدراسي 2023 – 2024 (تسعون درجة)

ج 1: (50 درجة)

1- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{i(B-E)\,\max}$ 20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (B-E). المعطاة بالعلاقة: $W_{B-E}=\prod_i \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}$

وحيث أن الجسيمات هي بوزونات (كمية) فيكون عددها N ودرجة تحلل سويات الطاقة g_i كبيرين، لذا يُهمل الواحد في توزع (B-E) وتصبح عبارة الوزن الإحصائي بالشكل التالي: $W_{B-E}\approx\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{B-E})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{B-E})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{B-E})\approx Ln\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)!-Ln\,N_i!-Ln\,g_i!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{B-E})\approx\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]$$ 10

بما أن W_{B-E} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{B-E})=\frac{\partial\,Ln(W_{B-E})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)+\frac{N_i+g_i}{N_i+g_i}-Ln\,N_i-\frac{N_i}{N_i}\right]dN_i=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)-Ln\,N_i\right]dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})\approx\sum_i Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N=\sum_i N_i\ \Rightarrow\ dN=\sum_i dN_i \quad \text{و} \quad U=\sum_i\varepsilon_i N_i\ \Rightarrow\ dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\ \Rightarrow\ Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\ \Rightarrow\ \frac{N_i+g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$ 10

$$\Rightarrow\ \frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1\ \Rightarrow\ \boxed{N_{i(B-E)\,\max}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1}}$$

2- المسألة: 15

1- عدد حالات التوزع الماكروي: $N_{\mu}=\frac{(N+N_{\varepsilon}-1)!}{N!(N_{\varepsilon}-1)!}=\frac{(N+2-1)!}{N!(2-1)!}=\frac{(N+1)!}{N!\,1!}=\frac{(N+1)N!}{N!\,1!}=N+1$ 2

2- A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

2 $$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\ \Rightarrow\ W_{(N-1,1)}=N!\left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{2^1}{1!}\right)=2N$$

B- الجسيمات بوزونات

2 $$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{M}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\ \Rightarrow\ W_{(N-1,1)}=\frac{(N-1+1-1)!}{(N-1)!\,(1-1)!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}=2$$

2 C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i\geq N_i$ فهي غير مقبولة

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N=2$. نوجد تابع الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z=\sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT}=1e^{-1}+2e^{-2}$$

تحاص الطاقم

$$Z_\Omega=Z^N=(1e^{-1}+2e^{-2})^2=1e^{-2}+4e^{-4}+4e^{-3} \qquad (*)$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U=\sum_i N_i\varepsilon_i$ كما يلي $(\overbrace{1,1}^{U=3KT})(\overbrace{0,2}^{U=4KT})(\overbrace{2,0}^{U=2KT})$.

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_\Omega=\sum_i W_i e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}e^{\beta U_{(2,0)}}+W_{(0,2)}e^{\beta U_{(0,2)}}+W_{(1,1)}e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta=-1/KT$، نجد:

$$Z_\Omega=\sum_i W_i e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}e^{-2}+W_{(0,2)}e^{-4}+W_{(1,1)}e^{-3}$$

نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة.

$W_{(2,0)}=1$ و $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=4$

5

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)}=3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$

B |	| B	A |	| A
A	A	B	B

3-

15

لدينا صيغة $dN(\vartheta)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$ بالشكل التالي :

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}g(\vartheta)d\vartheta \qquad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التحاص

$$Z=CV(2\pi mkT)^{3/2} \qquad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p=m\vartheta \;\Rightarrow\; dp=m\,d\vartheta$$

$$g(\vartheta)d\vartheta=C\,d\Gamma(\vartheta)=C\,dq_i\,dp_i=CV\,4\pi p^2dp=CV\,4\pi m^3\vartheta^2d\vartheta \qquad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon=m\vartheta^2/2 \qquad (c)$$

بتعويض العبارات (a) و(b) و(c) في (*)، مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta=-1/kT$ نجد:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{CV(2\pi mkT)^{3/2}}e^{-m\vartheta^2/2kT}\,CV\,4\pi m^3\vartheta^2d\vartheta$$

5

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزع السرعة المطلقة لجسيم واحد ، بالشكل التالي :

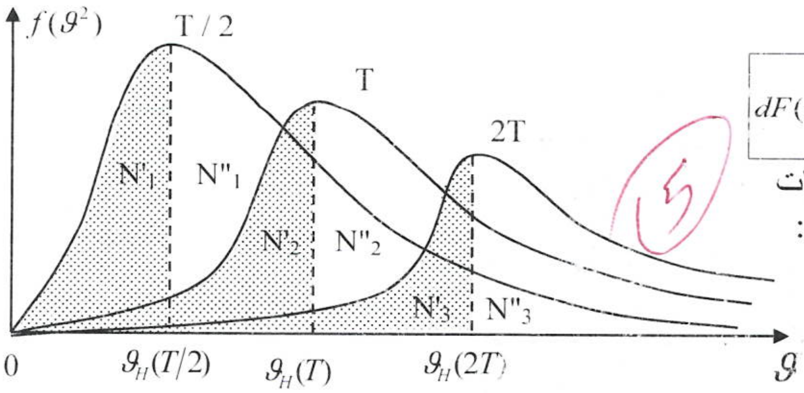
$$dF(\vartheta)=\frac{dN(\vartheta)}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\vartheta^2e^{-m\vartheta^2/2kT}d\vartheta=f(\vartheta^2)d\vartheta$$

و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

$$dF(\vartheta) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 \; e^{-\alpha \vartheta^2} \; d\vartheta = f(\vartheta^2)\, d\vartheta$$

- نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي:

5



المناقشة والتفسير :

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات

N = cte عند كل درجة حرارة .

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث N = N' + N"

حيث 'N عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H .

2

و "N عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من ϑ_H .

حيث ϑ_H السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) (السرعة الأكثر احتمالاً).

النتائج :

3

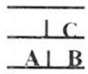
1- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات

2- بارتفاع درجات الحرارة يزداد "N على حساب تناقص 'N بحيث يبقى N ثابت (N = N' + N") .

3- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

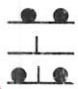
ج 2: (40 درجة)

-1 20



الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{0})$

الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\;\frac{2^1}{1!}\;\frac{1^0}{0!}\right) = 24$ 5



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{2})$

الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\;\frac{(0+2-1)!}{0!\,1!}\;\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!} = 3 \times 1 \times 1 = 3$$ 5

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{0}, \overset{\varepsilon_3}{1})$

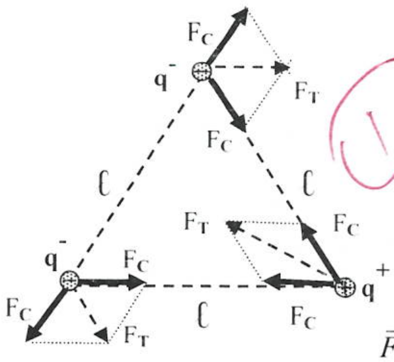
الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\;\frac{(0+2-1)!}{0!\,1!}\;\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!} = 3 \times 1 \times 2 = 6$$ 5

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!}\;\frac{2!}{0!\,(2-0)!}\;\frac{2!}{1!\,(2-1)!} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$ 5

-3
-1 22



(1)

- التمثيل موضح بالشكل، وهي تنافر بين الشحنتين السالبتين، وتجاذب بين الموجبة والسالبة. نحسب شداتها بتطبيق كولون

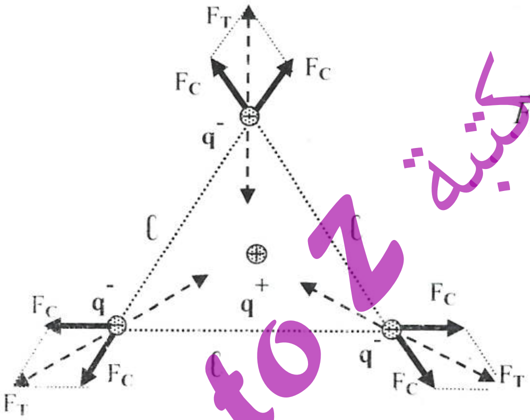
$F_C = k\dfrac{q^2}{\ell^2}$ وهي متساوية لجميع الشحنات . (3)

- نمثّل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة ، كما بالشكل :
نحسب شدة المحصلة المؤثرة في كل من الشحنتين السالبتين

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F^2_{C1} + F^2_{C1} + 2F^2_{C1}\,Cos(\pi - 60)}$$

$$\vec{F}_T(q^-) = F_{C1}\sqrt{2[1 - Cos(60)]} = F_{C1}\sqrt{2[1-0{,}5]} = F_{C1} = k\frac{q^2}{\ell^2}$$ (3)

وهي تساوي الشدة المؤثرة في كلٍ منهما على حدة .
نحسب شدة المحصلة المؤثرة في الشحنة الموجبة بنفس الأسلوب



$$\vec{F}_T(q^+) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^+) = \sqrt{F^2_{C1} + F^2_{C1} + 2F^2_{C1}\,Cos(60)}$$

$$\vec{F}_T(q^+) = F_{C1}\sqrt{2[1 + Cos(60)]} = \sqrt{3}\,F_{C1} = \sqrt{3}\,k\frac{q^2}{\ell^2}$$ (3)

وهذا يعني أن كل شحنة ستتحرك وفق المحصلة $\vec{F}_T$ عند إزالة تثبيتها .

-2

- بدايةً نحسب محصلة قوى التدافع المؤثرة في كل من الشحنات السالبة، كما هو موضح بالشكل.

علماً أن قوة كولون المتبادلة بين كل شحنتين سالبتين هي $F_{C1} = k\dfrac{q^{-2}}{\ell^2}$

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F^2_{C1} + F^2_{C1} + 2F^2_{C1}\,Cos(60)}$$

$$F_T(q^-) = \sqrt{3}\,F_{C1} = \sqrt{3}\,k\frac{(q^-)^2}{\ell^2}$$ (5)

تتوازن كل من الشحنات السالبة الثلاث مع الشحنة الموجبة المركزية بقوة تجاذب $F_{q^+q^-} = k\dfrac{q^-q^+}{x^2} = F_T(q^-)$

أي أن $F_{q^+q^-}$ مساوية بالقيمة المطلقة ومعاكسة بالاتجاه للمحصلة $F_T(q^-)$. حيث x المسافة بين مركز المثلث وأحد رؤوسه وهي هندسياً تساوي ثلثي طول العامد (الارتفاع في المثلث) والمساوي بدوره لـ

$$x = \frac{2}{3}\ell\,Cos30 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell \quad \text{إذن} \quad .\ \ell\,Cos30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

بالتعويض والاختزال نحصل على قيمة q^+ بدلالة q^- كما يلي:

$$3k\frac{q^-q^+}{\ell^2} = \sqrt{3}\,k\frac{(q^-)^2}{\ell^2} \quad\Rightarrow\quad q^+ = \frac{\sqrt{3}}{3}q^- \quad\Leftrightarrow\quad q^+ < q^-$$ (5)

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2022 - 2023

س١ - أجب عن البندين التاليين: (40 درجة).

١- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)\,\max}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

٢- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT \ \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \ \ (J)$ و $\varepsilon_3 = 3KT \ \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = g_3 = 2$. والمطلوب:

١- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

٢- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0{,}368$ و $e^{-2} = 0{,}135$ و $e^{-3} = 0{,}05$).

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

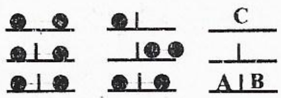
س٢ - أجب عن البنود الأربعة التالية: (50 درجة).

١- اكتب تابع كثافة توزع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية $\overline{n}$ و $\overline{n^2}$ و $\overline{\Delta n^2}$.

٢- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

٤- أجب عن النقطتين التاليتين

- استفد من نظرية غوص ومن تعريفي الزاوية المجسمة والحقل الكهربائي بالصيغة الشعاعية في البرهان على أن: $\Phi = k\, q\, \Omega$
- اكتب بدلالة المؤثر نابلا نتيجة ما يلي: $div\, rot\, \vec{A} = ?$ $\quad rot\, \overrightarrow{grad}\, \varphi = ?$ $\quad div\, \overrightarrow{grad}\, \varphi = ?$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأربعاء 20 / 9 / 2023

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2022 – 2023 (تسعون درجة)

ج ١: (40 درجة)

١- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{i(M-B)\,\max}$ 20

نبطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i \left[N_i\, Ln\, g_i - Ln\, N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial\, Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)\right] dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\, g_i - Ln\, N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$ 10

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i \qquad \text{و} \qquad U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

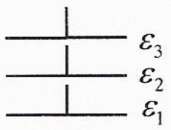
وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\,\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \;\Rightarrow\; Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\,\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}$$ 10

٢- المسألة: 20

١- عدد حالات التوزع الماكروي:



$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!\,(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(1000+3-1)!}{1000!\,(3-1)!} = \frac{1002!}{1000!\times 2!} = \frac{1002\times 1001\times 1000!}{1000!\times 2!} = 501501$$ 4

٢- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} \quad ; Z = \sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + 2e^{-3} = 1{,}106$$ 3

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1\, e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{1000}{1{,}106} 2\, e^{-1} \approx 666$$ 3

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2\, e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{1{,}106} 2\, e^{-2} \approx 244$$ 3

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3\, e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,106}\, 2e^{-3} \approx 90$$ 3

التحقق: $$N = N_1 + N_2 + N_3 = 666 + 244 + 90 = 1000$$ 2

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = \sum_i N_i\, \varepsilon_i = N_1\, \varepsilon_1 + N_2\, \varepsilon_2 + N_3\, \varepsilon_3 = 666KT + 244\times 2KT + 90\times 3KT = 1424\, KT$$ 2

ج ٢: (50 درجة)

١- يُعطى تابع كثافة توزع برنولي بالعلاقة: 14

$$\boxed{\omega(n) = \binom{N}{n} p^n\, q^{N-n} \qquad ; n \le N}$$ 1

حيث $p \le 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q \le 1$ لأن $q = 1 - p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N-n)$ مرة من أصل N مرة.

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد لـ نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{N} \omega(n) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n\, q^{N-n} = (p+q)^N = (p+1-p)^N = 1$$ 4

- إيجاد $\bar{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n\, q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^{n-1}\, q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N} n \underbrace{\binom{N}{n} p^n\, q^{N-n}}_{\omega(n)} = \bar{n} \Rightarrow \boxed{\bar{n} = Np}$$ 3

- إيجاد $\overline{n^2}$: وسطي القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n\, q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\bar{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^{N} n^2 \binom{N}{n} p^{n-1}\, q^{N-n} \Rightarrow Np + N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2 \underbrace{\binom{N}{n} p^n\, q^{N-n}}_{\omega(n)} = \overline{n^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^2} = Np + N^2 p^2 - Np^2}$$ 3

- إيجاد $\overline{\Delta n^2}$: (التشتت) نعوض في العبارة

$$\boxed{\overline{\Delta n^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = Np + N^2 p^2 - Np^2 - N^2 p^2 = Np(1-p) = Npq = \bar{n}\, q}$$ 3

٢- لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 14

نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقاتها، في المجال الطاقي $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم انشغال مكسويل $N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta \varepsilon_i}$ وباعتبار $e^{\alpha} = \dfrac{N}{Z}$ فنجد

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon)\, d\varepsilon$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon)\, d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon) = CV\, 2\pi\, (2m)^{3/2}\, (\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته

$Z = CV\, (2\pi\, m\, KT)^{3/2}$ ، وباعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\varepsilon)=\frac{N}{CV\,(2\pi\, m\, KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}\,CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\varepsilon)=\frac{2N}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{N}=\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon=f(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad (1)$$

حيث يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\varepsilon)=\frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}}$$

10

للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $[0\to\infty[$.

$$F(\varepsilon)=\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

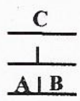
$$\varepsilon=KT\,x \;\Rightarrow\; d\varepsilon=KT\,dx \qquad \text{و} \qquad \varepsilon^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{1/2}\,KT\underbrace{\int_0^\infty x^{1/2}e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

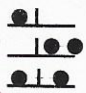
4

٣- 12



الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{0},\overset{\varepsilon_3}{1})$

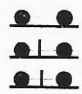
الوزن الإحصائي $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(2,0,1)}=3!\left(\frac{2^2}{2!}\;\frac{2^0}{0!}\;\frac{1^1}{1!}\right)=12$ 4



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{1})$

الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(2,2,1)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,1!}=3\times3\times2=18$$ 4



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{2})$

الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(2,2,2)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!}=3\times3\times1=9$$ 4

٤- أجوبة النقطتين التاليتين 10

- لدينا نظرية غوص

$$\Phi=\oiint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_o}$$

وباعتبار الحقل الكهربائي $\vec{E}=k\frac{q}{r^3}\vec{r}$ ومن تعريف الزاوية المجسمة $\Omega=\oiint_S\frac{\vec{E}\,d\vec{S}}{r^3}$

نجد بالتعويض في غوص

$$\Phi = \oiint_S k\frac{q}{r^3}\vec{r}\,d\vec{S} = k\,q\oiint_S \frac{\vec{r}\,d\vec{S}}{r^3} = k\,q\,\Omega$$ (4)

- نتائج العلاقات

$$div\,rot\,\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$$ (2)

$$rot\,\overrightarrow{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0}$$ (2)

$$div\,\overrightarrow{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi) = \nabla^2\varphi$$ (2)

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات

السنة الثانية رياضيات الفصل الثاني للعام الدراسي 2022 - 2023

س1- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)\,\max}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متمايزة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$، متحللتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقم الجملة
- أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{1}, \overset{\varepsilon_2}{2})$ في الحالات التالية:
  1- الجسيمات متمايزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).

1- ليكن تابع كثافة توزع غوص الطبيعي $; -\infty < x < +\infty$ $f(x) = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}$ والمطلوب:

برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية: $\overline{x}$ و $\overline{x^2}$ و $\overline{\Delta x^2}$.

2- جملة مكونة من عدد لانهائي من الجسيمات غير المتمايزة. موزعة على عدد لانهائي من السويات بالشكل: $\varepsilon_n = n\varepsilon_o \;\; ; n = 0,1,2,3,......$ ودرجات تحللها معطاة بالعلاقة: $g_n = n+1$. والمطلوب:

1- أوجد تحاص الجملة Z.

2- أوجد متوسط طاقة الجسيم $\overline{\varepsilon}$ في الحالات: $\varepsilon_o << KT$ و $\varepsilon_o = KT$ و $\varepsilon_o >> KT$.

3- أجب عن النقطتين التاليتين

- استفد من نظرية غوص ومن تعريفي الزاوية المجسمة والحقل الكهربائي بالصيغة الشعاعية في البرهان على أن: $\Phi = k\,q\,\Omega$
- اكتب نتيجة ما يلي: $div\, rot\, \vec{A} = ?$ $\quad rot\, \overrightarrow{grad}\, \varphi = ?$ $\quad div\, \overrightarrow{grad}\, \varphi = ?$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: الاثنين 24/ 7/ 2023

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات

السنة الثانية رياضيات الفصل الثاني للعام الدراسي 2022 – 2023 (تسعون درجة)

ج 1: (45 درجة)

1- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{i(M-B)\,\max}$ 25

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B}=N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B})+\alpha\, dN+\beta\, dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B})=Ln\,N!+\sum_i\left[N_i\,Ln\,g_i-Ln\,N_i!\right]$$

5

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x-x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B})\approx N\,Ln\,N-N+\sum_i(N_i\,Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i+N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B})=\frac{\partial\,Ln(W_{M-B})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N-N+\sum_i(N_i\,Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i+N_i)\right]dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0-0+\sum_i(Ln\,g_i-Ln\,N_i-1+1)\,dN_i=\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i}\,dN_i$$

10

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$N=\sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN=\sum_i dN_i \qquad \text{و} \qquad U=\sum_i\varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i}dN_i+\alpha\sum_i dN_i+\beta\sum_i\varepsilon_i\,dN_i=0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i}{N_i}+\alpha+\beta\,\varepsilon_i\right)dN_i=0\;\Rightarrow\;Ln\frac{g_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)\;\Rightarrow\;\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\,\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)}=g_i\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}}\;\Leftrightarrow\;\boxed{N_{i(M-B)}=e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}$$

10

2- المسألة: 20

- حالات التوزع الماكروي: $N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!}=\frac{4!}{3!\,1!}=4$ 3

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U=\sum_i N_i\varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{\underbrace{(3,0)}_{U=3kT},\underbrace{(0,3)}_{U=6kT},\underbrace{(2,1)}_{U=4kT},\underbrace{(1,2)}_{U=5kT}\right\}$. 3

- نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j}=\frac{e^{\alpha}g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha}g_j\,e^{\beta\varepsilon_j}}=\frac{g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j\,e^{-\varepsilon_j/KT}}\;\Rightarrow\;\frac{N_1}{N_2}=\frac{1e^{-\frac{KT}{KT}}}{2e^{-\frac{2KT}{KT}}}=\frac{1}{2e^{-1}}=\frac{e}{2}>1\;\Rightarrow\;N_1>N_2$$

1

والتوزع طبيعي

- تحاصل الجملة: $Z=\sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}=e^{-1}+2e^{-2}$ 1

تحاص الطاقم: $Z_\Omega = Z^N = (e^{-1}+2e^{-2})^3 = e^{-3}+6e^{-4}+12e^{-5}+8e^{-6}$

نقارنه بالعبارة: $Z_\Omega = \sum_i W_i\, e^{-U_i/kT} = W_{(3,0)}e^{-3} + W_{(2,1)}e^{-4} + W_{(1,2)}e^{-5} + W_{(0,3)}e^{-6}$

(4)

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

$W_{(3,0)}=1$ و $W_{(2,1)}=6$ و $W_{(1,2)}=12$ و $W_{(0,3)}=8$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة $(1,2)$ (1)

- للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة $\Omega = (\sum_i g_i)^N = 3^3 = 27$

(1)

و هذا يتطابق مع الحسابات $\Omega = \sum_i W_i = 1+6+12+8 = 27$

- 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3!\left(\frac{1^1}{1!}\frac{2^2}{2!}\right) = 12$

B C | / A	| B C / A	B | C / A	C | B / A
A C | / B	| A C / B	A | C / B	C | A / B
A B | / C	| A B / C	A | B / C	B | A / C

(2)

2- الجسيمات بوزونات $W_{B-E} = \prod_{i=1}^{2}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(1+1-1)!}{1!(1-1)!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!} = 3$

●● | / ●	| ●● / ●	● | ● / ●

(2)

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(1,2)$ تحقق الشرط $g_i \ge N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{2}\frac{g_i!}{N_i!(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{1!}{1!(1-1)!}\,\frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$ ● \| ● / ● (2)

ج 2: (45 درجة)

1- لدينا تابع كثافة توزع غوص: $f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha x^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$ (20)

هو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\int_0^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$ (5)

- إيجاد $\bar{x}$: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-\alpha x^2}dx = 0$ (5)

- إيجاد $\overline{x^2}$: $\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\,\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha}$ (5)

- إيجاد $\overline{\Delta x^2}$: نعوض في العبارة $\boxed{\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 1/2\alpha}$ (5)

2- الحل: 1- نحسب Z من صيغة التجميع في المجال $[0 \to \infty[$ كما يلي: (10)

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{\beta\varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{n\beta\varepsilon_o}$$

نفرض $x = e^{\beta\varepsilon_o} < 1$

لأن $e^{\beta\varepsilon_o} = e^{-\varepsilon_o/KT} = (1/e^{\varepsilon_o/KT}) < 1$ حيث يكون $e^{\varepsilon_o/KT} > 1$ في الحالتين $\varepsilon_o > KT$ و $\varepsilon_o < KT$:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$$

وبفرض $m = n+1$ يمكننا كتابة Z بدلالة مشتق سلسلة أخرى S_m كما يلي:

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} m\, x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{d\, x^m}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + ...) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$$

وبإيجاد عبارة الحد العام للسلسلة الجديدة S_m التي أساسها x :

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + ... = (1-x)^{-1}$$

$$Z = \frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = (1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}$$

5

2- نوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة: $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial Ln\, Z}{\partial \beta}$

$$Ln\, Z = Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2} = -2\, Ln(1-e^{\beta\varepsilon_o})$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial Ln\, Z}{\partial \beta} = -2\frac{-\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o}}{1-e^{\beta\varepsilon_o}} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{-\beta\varepsilon_o}-1} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}-1}$$

من أجل $\varepsilon_o << KT$ ننشر التابع الأسي ونكتفي بالحدين الأول والثاني $e^{\varepsilon_o/KT} \approx 1 + \frac{\varepsilon_o}{KT}$ وبالتعويض نجد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_o}{1 + \frac{\varepsilon_o}{KT} - 1} \approx 2KT$$

3

من أجل $\varepsilon_o = KT$ نجد: $\bar{\varepsilon} > KT \Leftarrow \bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_o}{e-1} \approx 1,16\, KT$

من أجل $\varepsilon_o >> KT$ يصبح المقدار $e^{\varepsilon_o/KT} >> 1$ ويهمل الواحد الموجود في المقام فنجد: $\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}} \approx 0$

3- أجوبة النقطتين التاليتين

1.5

- لدينا نظرية غوص $\Phi = \oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$

وباعتبار الحقل الكهربائي $\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r}$ ومن تعريف الزاوية المجسمة $\Omega = \oiint_S \frac{\vec{r}\, d\vec{S}}{r^3}$

نجد بالتعويض في غوص

$$\Phi = \oiint_S k\frac{q}{r^3}\vec{r}\, d\vec{S} = k\, q \oiint_S \frac{\vec{r}\, d\vec{S}}{r^3} = k\, q\, \Omega$$

9

- نتائج العلاقات

6

$$\begin{cases} div\, rot\, \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \\ rot\, \overrightarrow{grad}\, \varphi = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0} \\ div\, \overrightarrow{grad}\, \varphi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi) = \nabla^2\varphi \end{cases}$$

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٢ - ٢٠٢٣

س١ - أجب عن البنود الثلاثة التالية: (٥٠ درجة).

١- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)\,\max}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

٢- مسألة: جملة مكونة من 5000 جسيم متمايز موزعة على سويتين للطاقة $(J)\ \ \varepsilon_1 = KT$ و $(J)\ \ \varepsilon_2 = 2KT$ ، السويتان متحللتان بالشكل $g_1 = g_2 = 2$. والمطلوب:

١- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

٢- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2$ ، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0{,}368$ و $e^{-2} = 0{,}135$).

٣- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1 + 1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2 - 1}})$

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

٣- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\,\vec{E} = 0$.

س٢ - أجب عن البنود الثلاثة التالية: (٤٠ درجة).

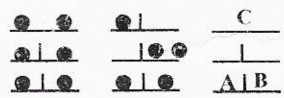
١- استنتج من بواسون (باستخدام التقريبات المناسبة) تابع كثافة غوص الطبيعي.

٢- عرف تابع فيرمي $f(\varepsilon)$ ، ومثّله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f(T = 0k^o)$.

ثم مثّله في جوارها من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.

- اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$.

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد ٥ / ٣ / ٢٠٢٣

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
دورة الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٢ – ٢٠٢٣ (تسعون درجة)

ج ١: (٥٠ درجة)

١- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{i(M-B)\,\max}$

20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \dfrac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i \left[N_i\, Ln\, g_i - Ln\, N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial\, Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)\right] dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\, g_i - Ln\, N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i$$

10

بالتعويض في (١) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i \qquad \text{و} \qquad N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln\frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\,\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\,\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}$$

10

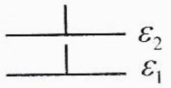
٢- المسألة:

20

١- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!\,(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(5000+2-1)!}{5000!\,(2-1)!} = \frac{5001!}{5000!} = \frac{5001\times 5000!}{5000!} = 5001$$

3



٢- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}})_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} \qquad ;\; Z = \sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} = 1{,}006$$

3

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1\, e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{5000}{1{,}006} 2\, e^{-1} \approx 3658$$

3

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2\, e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{5000}{1{,}006} 2\, e^{-2} \approx 1342$$

3

$$N = N_1 + N_2 = 3658 + 1342 = 5000$$

2

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,\ )_{\max}}=\sum_i N_i\,\varepsilon_i=N_1\,\varepsilon_1+N_2\,\varepsilon_2=3658\,KT+1342\times 2KT=6342\,KT$$ 2

٣- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1,N_2,\ )_{\max}}=N!\prod_i\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=N!\,(\frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!})$$

$$W'_{(N_1+1,N_2-1)}=N!\prod_i\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=N!\,(\frac{2^{N_1+1}}{(N_1+1)!}\frac{2^{N_2-1}}{(N_2-1)!})$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-1,)}}=\frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\,\frac{(N_1+1)!}{2^{N_1+1}}\frac{(N_2-1)!}{2^{N_2-1}}=\frac{2^{N_1}}{N_1!}\,\frac{2^{N_2}}{N_2(N_2-1)!}\,\frac{(N_1+1)N_1!}{2^{+1}\times 2^{N_1}}\,\frac{(N_2-1)!}{2^{-1}\times 2^{N_2}}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-1,)}}=\frac{(N_1+1)}{N_2}=\frac{3659}{1341}\approx 2{,}73>1\quad\Rightarrow\quad W_{(N_1,N_2)_{\max}}>W'_{(N_1+1,N_2-1,)}$$ 4

٣- برهان أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\,\vec{E}=0$

15 نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية يعطى على بعد منها r بالعلاقة

$$\vec{E}=k\frac{q}{r^3}\vec{r}\qquad;\quad \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\quad \wp\quad r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{E}=kq\frac{x}{r^3}\vec{i}+kq\frac{y}{r^3}\vec{j}+kq\frac{z}{r^3}\vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفرق

$$div\,\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$ 5

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=kq\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3})=k\,q\frac{r^3-3r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6}=\frac{k\,q}{r^3}-\frac{3k\,q\,r^2\frac{x}{r}x}{r^6}=\frac{k\,q}{r^3}-\frac{3k\,q\,x^2}{r^5}$$

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد :

$$div\,\vec{E}=\frac{3k\,q}{r^3}-\frac{3k\,q\,(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=\frac{3k\,q}{r^3}-\frac{3k\,q}{r^3}=0$$ 5

ج ٢ : (٤٠ درجة)

13 **١-** لإيجاد تابع كثافة توزع غوص الطبيعي ننشر لغارتم تابع كثافة توزع بواسون باستخدام منشور تايلور بجوار القيمة الوسطى $\bar{x}=a$. ونكتفي بالحدود الثلاثة الأولى من المنشور فقط.

$$Ln\,\omega(x)=Ln\,\omega(x)\big|_{x=a}+\frac{(x-a)}{1!}\frac{d\,Ln\,\omega(x)}{dx}\bigg|_{x=a}+\frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2\,Ln\,\omega(x)}{dx^2}\bigg|_{x=a}+\ldots\ldots\qquad (a)$$

نوجد قيمة $Ln\omega(x)$ ومشتقاته، ثم نعوض في حدود المنشور.

$$\omega(x)=\frac{a^x}{x!}e^{-a}\Rightarrow Ln\omega(x)=x\,Ln\,a-a-Ln\,x!$$

وباستخدام تقريب، ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x-x$ 4

$$Ln\omega(x)\approx x\,Ln\,a-a-x\,Ln\,x+x$$

$$\frac{d\,Ln\,\omega(x)}{dx}\bigg|_{x=a}=\frac{d}{dx}\left[x\,Ln\,a-a-x\,Ln\,x+x\right]_{x=a}=\left[Ln\,a-Ln\,x-1+1\right]_{x=a}=0$$ 3

$$\left.\frac{d^2 Ln\,\omega(x)}{dx^2}\right|_{x=a} = \frac{d}{dx}\left[Ln\,a - Ln\,x\right]_{x=a} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=a} = -\frac{1}{a}$$ 3

بتعويض كلٍ بقيمته في (a) نجد:

$$Ln\,\omega(x) \approx Ln\,\omega(a) + 0 + \frac{(x-a)^2}{2!}(-\frac{1}{a}) \Rightarrow Ln\frac{\omega(x)}{\omega(a)} \approx -\frac{\Delta X^2}{2a} \quad ; \quad \Delta X^2 = (x-a)^2$$

3

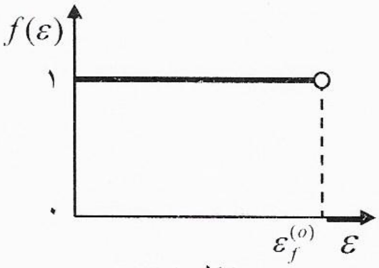
$$\Rightarrow \omega(x) \approx \omega(a)\, e^{-\frac{\Delta X^2}{2a}}$$

وهذا يطابق تابع كثافة توزع غوص الطبيعي المعطى بالصيغة $f(x) = A e^{-\alpha x^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$

٢- يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزع (فيرمي – ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \to g + dg)$ بالشكل : 13

$$dN = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1} = \frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1} = f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad ; f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1}$$

حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$ ، ونمثله بالشكل :

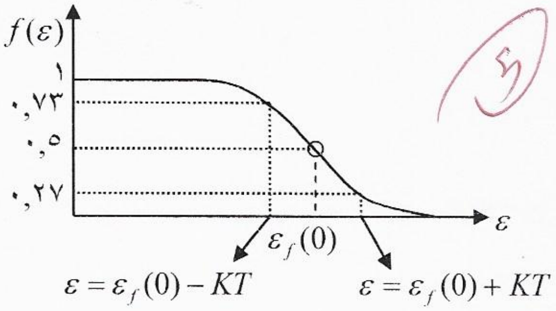


5

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 \ ; \varepsilon < \varepsilon_f \\ \dfrac{1}{e^{+\infty} + 1} = 0 \ ; \varepsilon > \varepsilon_f \\ \dfrac{1}{e^{0/0} + 1} = XX \ ; \varepsilon = \varepsilon_f \end{cases}$$

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال [١ - ٠] . شكل ( )

وفي جوار سوية فيرمي ، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.



5

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(o)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-1} + 1} \approx 0{,}73 \ ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) - KT \\ \dfrac{1}{e^{0} + 1} = 0{,}5 \ ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) \\ \dfrac{1}{e^{+1} + 1} \approx 0{,}27 \ ; \varepsilon_f(0) + KT \end{cases}$$

- تعاريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$: 3

١- هي الطاقة الموافقة لتوزع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$

٢- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0k^o$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(o)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i > \varepsilon_f^{(o)}$

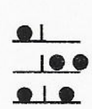
٣- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon) = 0{,}5$

٣- 14

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{0}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{1}})$

الوزن الإحصائي 12 $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\ \frac{2^0}{0!}\ \frac{1^1}{1!}\right) = 12$ 4

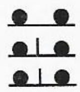
الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{1}})$



الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)\,!} \quad\Rightarrow\quad W_{(2,2,1)}=\frac{(2+2-1)\,!}{2!\,1\,!}\cdot\frac{(2+2-1)\,!}{2!\,1\,!}\cdot\frac{(1+2-1)!}{1!\,1\,!}=3\times3\times2=18$$

5



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overbrace{2}^{\varepsilon_1}, \overbrace{2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{2}^{\varepsilon_3})$

الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)\,!} \quad\Rightarrow\quad W_{(2,2,2)}=\frac{(2+2-1)\,!}{2!\,1\,!}\cdot\frac{(2+2-1)\,!}{2!\,1\,!}\cdot\frac{(2+1-1)\,!}{2!\,0\,!}=3\times3\times1=9$$

5

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات -
السنة الثانية رياضيات الفصل الثاني للعام الدراسي 2021 - 2022

س1- أجب عن البندين التاليين: (40 درجة).

1- أوجد علاقة المشتقة الثانية $\partial^2/\partial\beta^2$ انطلاقاً من المشتقة الأولى $\partial/\partial\beta$
وبفرض أن تابع التحاص $Z = CV\,(2\pi\, m\, KT)^{3/2}$ برهن على ضوء المشتقات $\partial/\partial\beta$ و $\partial^2/\partial\beta^2$ صحة المساواة الثانية لما يلي $\bar{\varepsilon} = \dfrac{\partial Ln Z}{\partial\beta} = \dfrac{3}{2}KT$ و $\overline{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{Z}\dfrac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2} = \dfrac{15}{4}(KT)^2$ و $\overline{\Delta\varepsilon^2} = \dfrac{\partial^2 Ln Z}{\partial\beta^2} = \dfrac{3}{2}(KT)^2$

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT \ \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \ \ (J)$ و $\varepsilon_3 = 3KT \ \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = g_3 = 2$. والمطلوب:

1- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overbrace{N_1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{N_2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{N_3}^{\varepsilon_3})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0{,}368$ و $e^{-2} = 0{,}135$ و $e^{-3} = 0{,}05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overbrace{N_1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{N_2+1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{N_3-1}^{\varepsilon_3})$

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (50 درجة).

1- ليكن تابع كثافة توزع غوص الطبيعي $-\infty < x < +\infty \ ;$ $f(x) = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}$ والمطلوب:

برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية: $\bar{x}$ و $\overline{x^2}$ و $\overline{\Delta x^2}$.

2- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$). ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \dfrac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ;\ n\ (\text{زوجي})\ \wp\ \ n \geq 0 \\[2ex] \dfrac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ;\ n\ (\text{فردي})\ \wp\ \ n = 2m+1\ \wp\ \ m \geq 0 \end{cases}$$

3- أجب عن النقطتين التاليتين

- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\,\vec{E} = 0$.
- اكتب القانون الرياضي فقط (دون برهان) لكل مما يلي: دعوى استوكس، دعوى اوستراغرادسكي - غوص، نظرية غوص.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 18/ 7/ 2022

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
السنة الثانية رياضيات الفصل الثاني للعام الدراسي 2021 – 2022 (تسعون درجة)

ج 1: (40 درجة)

1- إيجاد المشتقة $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$: لدينا المشتقة الأولى $\partial/\partial\beta$ بالشكل $\frac{\partial}{\partial\beta}=KT^2\frac{\partial}{\partial T}$ فتكون المشتقة الثانية $\partial^2/\partial\beta^2$ بالشكل

15

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}=\frac{\partial}{\partial\beta}(KT^2\frac{\partial}{\partial T})=KT^2\frac{\partial}{\partial T}(KT^2\frac{\partial}{\partial T})=KT^2(2KT\frac{\partial}{\partial T}+KT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2})$$ 3

لبرهان العلاقة $\bar{\varepsilon}=\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}=\frac{3}{2}KT$ ننطلق من الطرف الأيسر وباعتبار $\frac{\partial}{\partial\beta}=KT^2\frac{\partial}{\partial T}$

ولدينا $LnZ=LnCV\left(2\pi mK\right)^{3/2}+LnT^{3/2} \Leftarrow Z=CV\left(2\pi mKT\right)^{3/2}=CV\left(2\pi mK\right)^{3/2}T^{3/2}$ نجد بالتعويض

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}=KT^2\frac{\partial}{\partial T}(LnCV\left(2\pi mK\right)^{3/2}+LnT^{3/2})=KT^2(0+\frac{3}{2T})=\frac{3}{2}KT$$ 4

لبرهان العلاقة $\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}=\frac{15}{4}(KT)^2$ ننطلق من الطرف الأيسر وباعتبار $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}=KT^2(2KT\frac{\partial}{\partial T}+KT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2})$

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}=\frac{1}{Z}KT^2(2KT\frac{\partial Z}{\partial T}+KT^2\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2})$$

وبملاحظة أن $Z=CV\left(2\pi mK\right)^{3/2}T^{3/2} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial T}=\frac{3}{2}CV\left(2\pi mK\right)^{3/2}T^{1/2}$

فيكون $\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2}=\frac{3}{2}CV\left(2\pi mK\right)^{3/2}\frac{1}{2T^{1/2}}$ وبالتعويض عن كل بقيمته نجد

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{CV\left(2\pi mK\right)^{3/2}T^{3/2}}KT^2[2KT\frac{3}{2}CV\left(2\pi mK\right)^{3/2}T^{1/2}+KT^2\frac{3}{2}CV\left(2\pi mK\right)^{3/2}\frac{1}{2T^{1/2}})]$$

$$\overline{\varepsilon^2}=KT^{1/2}(3KT^{3/2}+\frac{3}{4}KT^{3/2})=\frac{15}{4}(KT)^2$$ 4

لبرهان العلاقة $\overline{\Delta\varepsilon^2}=\frac{\partial^2 LnZ}{\partial\beta^2}=\frac{3}{2}(KT)^2$ نجد بنفس الأسلوب

$$\overline{\Delta\varepsilon^2}=\frac{\partial^2 LnZ}{\partial\beta^2}=KT^2(2KT\frac{\partial LnZ}{\partial T}+KT^2\frac{\partial^2 LnZ}{\partial T^2})$$

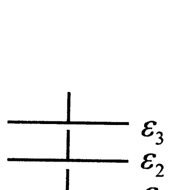
وبما أن $\frac{\partial LnZ}{\partial T}=\frac{3}{2T}$ فيكون $\frac{\partial^2 LnZ}{\partial T^2}=-\frac{6}{4T^2}=-\frac{3}{2T^2}$ وبالتعويض عن كل بقيمته نجد

$$\overline{\Delta\varepsilon^2}=KT^2(2KT\frac{3}{2T}-KT^2\frac{3}{2T^2})=\frac{3}{2}(KT)^2$$ 4

2- المسألة:

25

1- عدد حالات التوزع الماكروي:



$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(1000+3-1)!}{1000\,!\,(3-1)!}=\frac{1002\,!}{1000\,!\times 2\,!}=\frac{1002\times 1001\times 1000!}{1000\,!\times 2\,!}=501501$$ 5

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overbrace{N_1}^{\varepsilon_1},\overbrace{N_2}^{\varepsilon_2},\overbrace{N_3}^{\varepsilon_3})_{max}$ من العبارة

$$N_i=\frac{N}{Z}g_i e^{-\varepsilon_i/KT} \quad ; Z=\sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT}=2e^{-1}+2e^{-2}+2e^{-3}=1{,}106$$ 3

$$N_1=\frac{N}{Z}g_1 e^{-\varepsilon_1/KT}=\frac{1000}{1{,}106}2\,e^{-1}\approx 666$$ 3

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 \, e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{1,106} 2\, e^{-2} \approx 244$$ 3

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 \, e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,106} \, 2e^{-3} \approx 90$$ 3

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 666 + 244 + 90 = 1000$$ 2

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \, \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_3 \varepsilon_3 = 666KT + 244 \times 2KT + 90 \times 3KT = 1424\,KT$$ 2

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{\,N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{2^{N_2}}{N_2!} \frac{2^{N_3}}{N_3!} \right)$$

$$W'_{(N_1,N_2+1,N_3-1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{\,N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{2^{N_2+1}}{(N_2+1)!} \frac{2^{N_3-1}}{(N_3-1)!} \right)$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1,N_2+1,N_3-1)}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{2^{N_2}}{N_2!} \frac{2^{N_3}}{N_3!} \frac{N_1!}{2^{N_1}} \frac{(N_2+1)!}{2^{N_2+1}} \frac{(N_3-1)!}{2^{N_3-1}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{2^{N_2}}{N_2!} \frac{2^{N_3}}{N_3 (N_3-1)!} \frac{N_1!}{2^{N_1}} \frac{(N_2+1) N_2!}{2^{+1} \times 2^{N_2}} \frac{(N_3-1)!}{2^{-1} \times 2^{N_3}}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1,N_2+1,N_3-1)}} = \frac{(N_2+1)}{N_3} = \frac{245}{90} = 2,72 > 1 \quad \Rightarrow \quad W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} > W'_{(N_1,N_2+1,N_3-1)}$$ 4

ج 2: $\boxed{\text{(50 درجة)}}$

1- لدينا تابع كثافة توزع غوص: $f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \, e^{-\alpha x^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$ 16

هو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي كما يلي:

4 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \, 2 \int_0^{+\infty} x^0 \, e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \, 2 \, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

- إيجاد $\overline{x}$:

4 $$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \, e^{-\alpha x^2}\,dx = 0$$

- إيجاد $\overline{x^2}$:

4 $$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \, 2 \int_0^{+\infty} x^2 \, e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \, 2 \, \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha}$$

- إيجاد $\overline{\Delta x^2}$: نعوض في العبارة

4 $$\boxed{\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 1/2\alpha}$$

2- لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$. 17

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta m \vartheta^2/2} \, g(\vartheta)\, d\vartheta$$ 5

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta)\,d\vartheta$ بقيمته من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(\vartheta)\,d\vartheta = C\, d\Gamma(\vartheta) = CV \, 4\pi \, m^3 \, \vartheta^2 \, d\vartheta$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV\,(2\pi m KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m\vartheta^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{CV\,(2\pi m KT)^{3/2}} e^{-m\vartheta^2/2KT} \, CV \, 4\pi m^3 \, \vartheta^2 \, d\vartheta$$ 4

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\vartheta) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta$$

نعتبر أن $\boxed{\alpha = m/2KT}$ فنجد

$$dN(\vartheta) = 4\pi N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرع بدلالة تابع كثافة السرع كما يلي:

$$\frac{dN(\vartheta)}{N} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta = f(\vartheta^2)\, d\vartheta$$

4

حيث يعبر $f(\vartheta^2) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2}$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

للبرهان على أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي في المجال $]0 \to \infty[$.

$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\, d\vartheta = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(\vartheta) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

4

3- أجوبة النقطتين التاليتين

17

- برهان أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\,\vec{E} = 0$

نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية يعطى على بعد منها r بالعلاقة

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \wp \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq\frac{x}{r^3}\vec{i} + kq\frac{y}{r^3}\vec{j} + kq\frac{z}{r^3}\vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفرق

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

5

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = kq\frac{r^3 - 3r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kqr^2\frac{x}{r}x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kqx^2}{r^5}$$

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد :

$$div\,\vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0$$

6

- دعوى ستوكس $\oint_c \vec{E}\, d\vec{r} = \iint_S (rot\vec{E})_n\, d\vec{S}$ 2

دعوى أوستراغرادسكي – غوص $\oiint_S \vec{B}\, d\vec{S} = \iiint_\tau div\,\vec{B}_n\, d\tau$ 2

نظرية غوص $\Phi = \oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$ 2

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2021 - 2022

س1- أجب عن البندين التاليين: (40 درجة).

1- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{\underset{\max}{i(M-B)}}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT \quad (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \quad (J)$ و $\varepsilon_3 = 3KT \quad (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = g_3 = 2$. والمطلوب:

1- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2 + 1}}, \overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3 - 1}})$

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

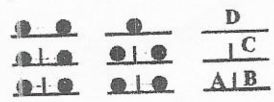
س2- أجب عن البنود الأربعة التالية: (50 درجة).

1- اكتب تابع كثافة توزع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية $\overline{n}$ و $\overline{n^2}$ و $\overline{\Delta n^2}$.

2- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

3- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

4- أجب عن النقطتين التاليتين

- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\,\vec{E} = 0$.
- اكتب القانون الرياضي فقط (دون برهان) لكل مما يلي: دعوى استوكس، دعوى اوستراغرادسكي - غوص، نظرية غوص.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الحد 2022/9/8

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2021 – 2022 (تسعون درجة)

ج 1: (40 درجة)

1- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{i(M-B)_{\max}}$ 20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i \left[N_i\, Ln\, g_i - Ln\, N_i!\right]$$

5

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial\, Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)\right] dN_i$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\, g_i - Ln\, N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i \qquad (*)$$

8

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

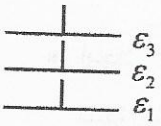
$$\sum_i \left(Ln\frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\,\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\,\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}$$

7

2- المسألة: 20

1- عدد حالات التوزع الماكروي:



$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!\,(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000!\,(3-1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501$$

3

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overbrace{N_1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{N_2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{N_3}^{\varepsilon_3})_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} \quad ; Z = \sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + 2e^{-3} = 1,106$$

3

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1\, e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{1000}{1,106} 2\, e^{-1} \approx 666$$

3

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2\, e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{1,106} 2\, e^{-2} \approx 244$$

3

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{1{,}106} 2e^{-3} \approx 90$$ 3

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 666 + 244 + 90 = 1000$$ 1

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \varepsilon_i = N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + N_3\varepsilon_3 = 666KT + 244\times 2KT + 90\times 3KT = 1424\,KT$$ 1

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N!\left(\frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\frac{2^{N_3}}{N_3!}\right)$$

$$W'_{(N_1,N_2+1,N_3-1)} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N!\left(\frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2+1}}{(N_2+1)!}\frac{2^{N_3-1}}{(N_3-1)!}\right)$$ 3

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1,N_2+1,N_3-1)}} = \frac{2^{N_1}\,2^{N_2}\,2^{N_3}}{N_1!\,N_2!\,N_3!}\frac{N_1!\,(N_2+1)!\,(N_3-1)!}{2^{N_1}\,2^{N_2+1}\,2^{N_3-1}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\frac{2^{N_3}}{N_3(N_3-1)!}\frac{N_1!}{2^{N_1}}\frac{(N_2+1)N_2!}{2^{+1}\times 2^{N_2}}\frac{(N_3-1)!}{2^{-1}\times 2^{N_3}}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1,N_2+1,N_3-1)}} = \frac{(N_2+1)}{N_3} = \frac{245}{90} = 2{,}72 > 1 \quad\Rightarrow\quad W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}} > W'_{(N_1,N_2+1,N_3-1)}$$

ج 2: (50 درجة)

1- يُعطى تابع كثافة توزع برنولي بالعلاقة: 15

$$\boxed{\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \qquad ; n \le N}$$

حيث $p \le 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q \le 1$ لأن $q = 1-p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N-n)$ مرة من أصل N مرة. 3

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد لـ نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{N}\omega(n) = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = (p+1-p)^N = 1$$ 3

- إيجاد $\overline{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N} n\binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N} n\underbrace{\binom{N}{n} p^n q^{N-n}}_{\omega(n)} = \overline{n} \Rightarrow \boxed{\overline{n} = Np}$$ 3

- إيجاد $\overline{n^2}$: وسطي القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\overline{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^{N} n^2\binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np + N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2\underbrace{\binom{N}{n} p^n q^{N-n}}_{\omega(n)} = \overline{n^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^2} = Np + N^2p^2 - Np^2}$$ 3

- إيجاد $\overline{\Delta n^2}$: (التشتت) نعوض في العبارة

$$\boxed{\overline{\Delta n^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = Np + N^2p^2 - Np^2 - N^2p^2 = Np(1-p) = Npq = \bar{n}\,q}$$

03

2- لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:

10

نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقاتها، في المجال الطاقي $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم انشغال مكسويل $N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}$ وباعتبار $e^{\alpha} = \dfrac{N}{Z}$ فنجد $dN(\varepsilon) = \dfrac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon$

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon)\, d\varepsilon$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon)\, d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon) = CV\, 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته

$Z = CV\, (2\pi\, m KT)^{3/2}$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{CV\, (2\pi\, m KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}\, CV\, 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}\, (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}\, (\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N} = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\, (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}\, d\varepsilon = f(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad (1)$$

حيث يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\varepsilon) = \frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\, (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}}$$

5

للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $]0 \to \infty[$.

$$F(\varepsilon) = \int_0^{\infty} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, (KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2}\, e^{-\varepsilon/KT}\, d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT\, x \;\Rightarrow\; d\varepsilon = KT\, dx \qquad \& \qquad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, (KT)^{3/2}} (KT)^{1/2}\, KT \underbrace{\int_0^{\infty} x^{1/2}\, e^{-x}\, dx}_{\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, (KT)^{3/2}} (KT)^{3/2}\, \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

5

3- أجوبة النقطتين التاليتين

13

- برهان أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\, \vec{E} = 0$

نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية يعطى على بعد منها r بالعلاقة

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \& \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq\frac{x}{r^3}\vec{i} + kq\frac{y}{r^3}\vec{j} + kq\frac{z}{r^3}\vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفرق

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = kq\frac{r^3 - 3r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kqr^2\frac{x}{r}x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kqx^2}{r^5}$$ 5

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد :

$$div\,\vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0$$ 2

- دعوى ستوكس

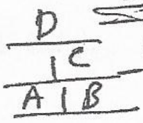
2 $$\oint_c \vec{E}\,d\vec{r} = \iint_S (rot\vec{E})_n\,d\vec{S}$$

دعوى أوستراغرادسكي – غوص

2 $$\oiint_S \vec{B}\,d\vec{S} = \iiint_\tau div\,\vec{B}_n\,d\tau$$

نظرية غوص

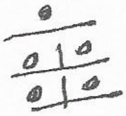
2 $$\Phi = \oiint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$



3/12

كلاسيكية والحالة الأعم (2,1,1)

$$W_{M-B} = N!\prod\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = 4!\left(\frac{2^2}{2!}\frac{2^1}{1!}\frac{1^1}{1!}\right) = 96$$ 3



بوزونات أو فيرميونات والحالة الأعم (2,2,1)

بحالة بوزونات 3

$$W_{B-E} = \prod\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!(g_i-1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!}\frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!}\frac{(1+1-1)!}{1!(1-1)!} = 3\cdot3\cdot1 = 9$$

بحالة فيرميونات 3

$$W_{F-D} = \prod\frac{g_i!}{N_i!(g_i-N_i)!} = \frac{2!}{2!(2-2)!}\frac{2!}{2!(2-2)!}\frac{1!}{1!(1-1)!} = 1\cdot1\cdot1 = 1$$

بوزونات حصراً والحالة الأعم (2,2,2)

$$W_{B-E} = \prod\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!(g_i-1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!}\frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!}\frac{(2+1-1)!}{2!(1-1)!} = 3\cdot3\cdot1 = 9$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2021 - 2022

س1- أجب عن ~~البندين التاليين~~ السؤالين التالية: (45 درجة).

1- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)_{\max}}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم $(N >> 1)$ موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = KT \quad (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \quad (J)$، السويتين متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:
1- أوجد عدد حالات التوزع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).
2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N-1}}, \overset{\varepsilon_2}{1})$ في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقم Z_Ω. ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

3- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\,\vec{E} = 0$.

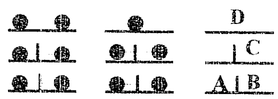
س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).

1- اكتب تابع كثافة توزع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال،
ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية (بعد تسميتها) $\overline{n}$ و $\overline{n^2}$ و $\overline{\Delta n^2}$.

2- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل -- بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

3- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الثلاثاء 15 / 2/ 2022

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات

دورة الفصل الأول للعام الدراسي 2021 – 2022 (تسعون درجة)

ع1: (45 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{i(M-B)\max}$

15

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B)، المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بداية $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i [N_i\, Ln\, g_i - Ln\, N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\,Ln\,g_i - N_i\,Ln\,N_i + N_i)$$

5

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial\, Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\,Ln\,g_i - N_i\,Ln\,N_i + N_i)\right] dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\,g_i - Ln\,N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i$$

5

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات و الطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln\frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\,\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \Rightarrow Ln\frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\,\varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}$$

5

2- المسألة:

20

1- عدد حالات التوزع الماكروي: 2

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(N+2-1)!}{N!(2-1)!} = \frac{(N+1)!}{N!1!} = \frac{(N+1)N!}{N!1!} = N+1$$

2- A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

2 $$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N!\left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!}\frac{2^1}{1!}\right) = 2N$$

B- الجسيمات بوزونات

2 $$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{M} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N-1+1-1)!}{(N-1)!(1-1)!}\frac{(1+2-1)!}{1!(2-1)!} = 2$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة 2

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i\, e^{\beta\varepsilon_i} = \sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} = 1e^{-1} + 2e^{-2}$$

تحاص الطاقم

$$Z_\Omega = Z^N = (1e^{-1} + 2e^{-2})^2 = 1e^{-2} + 4e^{-4} + 4e^{-3} \qquad (*)$$ 4

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ كما يلي $(\overbrace{1,1}^{U=3KT})(\overbrace{0,2}^{U=4KT})(\overbrace{2,0}^{U=2KT})$.

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_\Omega = \sum_i W_i\, e^{\beta U_i} = W_{(2,0)}\, e^{\beta U_{(2,0)}} + W_{(0,2)}\, e^{\beta U_{(0,2)}} + W_{(1,1)}\, e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta = -1/KT$، نجد:

$$Z_\Omega = \sum_i W_i\, e^{\beta U_i} = W_{(2,0)}\, e^{-2} + W_{(0,2)}\, e^{-4} + W_{(1,1)}\, e^{-3}$$

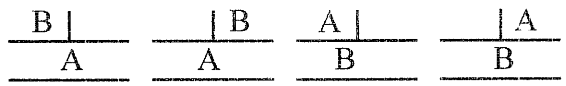
نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة.

$W_{(2,0)} = 1$ و $W_{(0,2)} = 4$ و $W_{(1,1)} = 4$ 4

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(0,2)} = 4$ و $W_{(1,1)} = 4$

2 فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)} = 3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$



2

3- برهان أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $div\,\vec{E} = 0$

10 نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية يعطى على بعد منها r بالعلاقة

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad و \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq\frac{x}{r^3}\vec{i} + kq\frac{y}{r^3}\vec{j} + kq\frac{z}{r^3}\vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفرق

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = kq\frac{r^3 - 3r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kqr^2\frac{x}{r}x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kqx^2}{r^5}$$ 7

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد :

$$div\,\vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0$$ 3

ج2: (45 درجة)

1- يُعطى تابع كثافة توزع برنولي بالعلاقة: 15

$$\boxed{\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \qquad ; n \le N}$$

حيث $p \le 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q \le 1$ لأن $q = 1 - p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N-n)$ مرة من أصل N مرة. 3

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد لـ نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{N}\omega(n)=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^{n}q^{N-n}=(p+q)^{N}=(p+1-p)^{N}=1$$ 3

- إيجاد $\overline{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^{N}=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^{n}q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1}=\sum_{n=0}^{N}n\binom{N}{n}p^{n-1}q^{N-n}\;\Rightarrow\;Np(p+q)^{N-1}=\sum_{n=0}^{N}n\underbrace{\binom{N}{n}p^{n}q^{N-n}}_{\omega(n)}=\overline{n}\;\Rightarrow\;\boxed{\overline{n}=Np}$$ 3

- إيجاد $\overline{n^2}$: وسطي القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^{N}=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^{n}q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\overline{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1}+N(N-1)p(p+q)^{N-2}=\sum_{n=0}^{N}n^{2}\binom{N}{n}p^{n-1}q^{N-n}\;\Rightarrow\;Np+N(N-1)p^{2}=\sum_{n=0}^{N}n^{2}\underbrace{\binom{N}{n}p^{n}q^{N-n}}_{\omega(n)}=\overline{n^{2}}\;\Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^{2}}=Np+N^{2}p^{2}-Np^{2}}$$ 3

- إيجاد $\overline{\Delta n^2}$: (التشتت) نعوض في العبارة

$$\boxed{\overline{\Delta n^{2}}=\overline{n^{2}}-\overline{n}^{2}=Np+N^{2}p^{2}-Np^{2}-N^{2}p^{2}=Np(1-p)=Npq=\overline{n}\,q}$$ 3

2- لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 15

نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقاتها، في المجال الطاقي $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم انشغال مكسويل $N_{i(M-B)}=e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}$ وباعتبار $e^{\alpha}=\dfrac{N}{Z}$ فنجد $dN(\varepsilon)=\dfrac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon$

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon)\,d\varepsilon$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته

$Z=CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد:

$$dN(\varepsilon)=\frac{N}{CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}\,CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$ 5

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\varepsilon)=\frac{2N}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{N}=\frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon=f(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad (1)$$

حيث يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\varepsilon)=\frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}}$$ 5

للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على الطاقة في

المجال $[0 \to \infty]$.

$$F(\varepsilon)=\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon=KT\,x \;\Rightarrow\; d\varepsilon=KT\,dx \qquad \text{و} \qquad \varepsilon^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

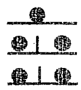
$$\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{1/2}\,KT\underbrace{\int_0^\infty x^{1/2}\,e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$ 5

-3 15

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{1},\overset{\varepsilon_3}{1})$ 1

الوزن الإحصائي $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(2,1,1)}=4!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^1}{1!}\,\frac{1^1}{1!}\right)=96$ 3

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{1})$ 1



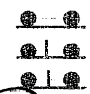
الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\;\Rightarrow\; W_{(2,2,1)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,0!}=3\times3\times1=9$$ 3

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\;\Rightarrow\; W_{(2,2,1)}=\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{1!}{1!\,(1-1)!}=1\times1\times1=1$$ 3

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2},\overset{\varepsilon_2}{2},\overset{\varepsilon_3}{2})$ 1



الوزن الإحصائي

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\;\Rightarrow\; W_{(2,2,2)}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!}=3\times3\times1=9$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البندين التاليين (40 درجة).

-1 استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)\,\max}$ لتوزع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج). 20

-2 مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT\ \ (J)$ و $\varepsilon_3 = 3KT\ \ (J)$، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$. والمطلوب: 20

1- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overbrace{N_1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{N_2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{N_3}^{\varepsilon_3})_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$،
ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0{,}368$ و $e^{-2} = 0{,}135$ و $e^{-3} = 0{,}05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\overbrace{N_1+1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{N_2-2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{N_3+1}^{\varepsilon_3})$

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية (50 درجة).

-1 استنتج صيغة تحول كل من غازي بوزة وفيرمي الكميين إلى غاز بوزة الكلاسيكي عند الطاقات العالية. 5

-2 استنتج تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة ($G(\vartheta_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha \vartheta_x^2}$ غوص الطبيعي)، أي ما يعرف بالسرعة الموجهة، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة ما يلي: $\overline{\vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^2}$ ، $\overline{\Delta \vartheta_x^{\ 2}}$ 30

توجيه: استفد في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{\frac{n}{2}!\, 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} \qquad ; n\ (\text{زوجي})$$

-3 أجب عن النقاط التالية 15

- برهن أن الحقل الكهربائي الساكن $\vec{E}$ تدرج لكمون كهربائي سلمي V.
- برهن أن الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ دوار لكمون مغناطيسي متجه $\vec{A}$.
- استنتج معادلتا بواسون ولابلاس.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأربعاء 25 / 8 / 2021

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2020 – 2021 (تسعون درجة)

ج 1: (40 درجة)

1- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{(F-D)_{\max}}$ 20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D}=\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}$ 2

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i. أي $\boxed{g_i>>N_i}$. 1

نوجد بدايةً $Ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\, dN+\beta\, dU=0 \qquad (1)$$ 1

$$Ln(W_{F-D})\approx Ln\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}=\sum_i\left[Ln\, g_i!-Ln\, N_i!-Ln(g_i-N_i)!\right]$$ 2

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد: 2

$$Ln(W_{F-D})\approx\sum_i\left[g_iLn\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_iLn(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]$$ 2 10

بما أن W_{F-D} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{F-D})=\frac{\partial\, Ln(W_{F-D})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[g_iLn\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_iLn(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[-Ln\,N_i-1+\frac{g_i}{g_i-N_i}+Ln(g_i-N_i)-\frac{N_i}{g_i-N_i}\right]dN_i=\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}-1+\frac{g_i-N_i}{g_i-N_i}\right)dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})\approx\sum_i Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}dN_i$$ 3

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$N=\sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN=\sum_i dN_i$ 1 و $U=\sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU=\sum_i \varepsilon_i\, dN_i$ 1

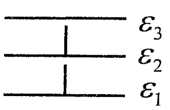
$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\, dN+\beta\, dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\;\Rightarrow\;\frac{g_i-N_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\;\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1\;\Rightarrow\;\boxed{N_{i(F-D)_{\max}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1}}$$ 5 10

2- المسألة: 20

1- عدد حالات التوزع الماكروي:



$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(1000+3-1)!}{1000!\,(3-1)!}=\frac{1002!}{1000!\times 2!}=\frac{1002\times1001\times1000!}{1000!\times 2!}=501501$$ 4

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{N_1}},\overset{\varepsilon_2}{\overbrace{N_2}},\overset{\varepsilon_3}{\overbrace{N_3}})_{\max}$ من العبارة

$$N_i=\frac{N}{Z}g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}\qquad ;\; Z=\sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}=2e^{-1}+2e^{-2}+e^{-3}=1{,}056$$ 2

$$N_1=\frac{N}{Z}g_1\,e^{-\varepsilon_1/KT}=\frac{1000}{1{,}056}2\,e^{-1}\approx 697$$ 2

$$N_2=\frac{N}{Z}g_2\,e^{-\varepsilon_2/KT}=\frac{1000}{1{,}056}2\,e^{-2}\approx 256$$ 2

$$N_3=\frac{N}{Z}g_3\,e^{-\varepsilon_3/KT}=\frac{1000}{1,056}\,e^{-3}\approx 47$$ 2

$$N=N_1+N_2+N_3=697+256+47=1000$$ 2

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}=\sum_i N_i\,\varepsilon_i=N_1\,\varepsilon_1+N_2\,\varepsilon_2+N_3\,\varepsilon_3=697KT+256\times 2KT+47\times 3KT=1340\,KT$$ 2

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}=N!\prod_i\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=N!\,\Big(\frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\frac{1^{N_3}}{N_3!}\Big)$$

$$W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}=N!\prod_i\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}=N!\,\Big(\frac{2^{N_1+1}}{(N_1+1)!}\frac{2^{N_2-2}}{(N_2-2)!}\frac{1^{N_3+1}}{(N_3+1)!}\Big)$$ 4

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}}=\frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2!}\frac{1}{N_3!}\frac{(N_1+1)!}{2^{N_1+1}}\frac{(N_2-2)!}{2^{N_2-2}}\frac{(N_3+1)!}{1}=\frac{2^{N_1}}{N_1!}\frac{2^{N_2}}{N_2(N_2-1)(N_2-2)!}\frac{1}{N_3!}\frac{(N_1+1)N_1!}{2\times 2^{N_1}}\frac{(N_2-2)!}{2^{-2}\times 2^{N_2}}\frac{(N_3+1)\,N_3!}{1}$$

$$\frac{W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}}=2\,\frac{(N_1+1)(N_3+1)}{N_2\,(N_2-1)}=2\,\frac{(698)(48)}{256(255)}=1,026\quad\Rightarrow\quad W_{(N_1,N_2,N_3)_{\max}}>W'_{(N_1+1,N_2-2,N_3+1)}$$

ج 2: (50 درجة)

1- <u>تحول غاز بوزه الكمي إلى غاز مكسويل الكلاسيكي (عند الطاقات العالية):</u> 5

عند الطاقات العالية تكون قيمة المعامل $e^{\varepsilon_i/KT}>>1$ حيث يمكننا إهمال الواحد الموجود في مقام عبارة رقم الانشغال بالشكل:

$$N_{\substack{i(B-E)\\ \max}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1}\approx\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}}=g_i\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}=N_{\substack{i(M-B)\\ \max}}$$

<u>تحول غاز فيرمي الكمي إلى غاز بوزة الكلاسيكي (عند الطاقات العالية):</u> 5

أي من أجل $\varepsilon-\varepsilon_f^{(o)}>>kT$ يكون: $e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f^{(o)}}{kT}}>>1$ وبالتالي يمكن إهمال الواحد في مقام عبارة رقم الانشغال.

وتصبح بالشكل التالي:

$$N_{\substack{(F-D)\\ \max}}\approx\frac{g}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f^{(o)}}{kT}}}\Rightarrow\qquad N_{\substack{(F-D)\\ \max}}\Rightarrow N_{\substack{Clasic\\ B-E}}\equiv N_{M-B}=g\,e^{\frac{\varepsilon_f^{(o)}-\varepsilon}{kT}}=g\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}$$

2- نعيد كتابة العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعها المطلقة وفق توزع M-B في المجالات $[\vartheta_x,\vartheta_x+d\vartheta_x]$ ، $[\vartheta_y,\vartheta_y+d\vartheta_y]$ ، $[\vartheta_z,\vartheta_z+d\vartheta_z]$ كما يلي: 30

3 $$dN(\vartheta_{x,y,z})=\frac{N}{Z}\,e^{\beta\varepsilon}\,g(\vartheta_{x,y,z})\,d\vartheta_{x,y,z}\qquad(1)$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (ox مثلاً). (أي لمعرفة $dN(\vartheta_x)$ التي تنحصر سرعها في المجال $[\vartheta_x,\vartheta_x+d\vartheta_x]$)، نُعيد صياغة مفهوم عنصر فراغ الاندفاع الطوري بالشكل التالي:

$$d\Gamma(P_{x,y,z})=dq_V.dP_V=V\,dP_x\,dP_y\,dP_z\qquad(2)$$

وبما أن $dP_x=m\,d\vartheta_x$ و $dP_y=m\,d\vartheta_y$ و $dP_z=m\,d\vartheta_z$ 3

بالتعويض في (2) بعد استبدال مركبات الاندفاع بمركبات السرع

$$d\Gamma(\vartheta_{x,y,z})=dq_V.dP_V=V\,m^3\,d\vartheta_x\,d\vartheta_y\,d\vartheta_z$$

وبالعودة إلى العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري التي تصبح بالشكل التالي:

4 $$g(\vartheta_{x,y,z})\,d\vartheta_{x,y,z}=C\,d\Gamma(\vartheta_{x,y,z})=CV\,m^3\,d\vartheta_x\,d\vartheta_y\,d\vartheta_z\qquad(3)$$ 7

وإذا اعتبرنا الطاقة الإجمالية طاقة حركية

$$\varepsilon=\frac{1}{2}m\vartheta^2=\frac{1}{2}m(\vartheta_x^2+\vartheta_y^2+\vartheta_z^2) \qquad (4)$$

وإذا أخذنا تابع التحاص لجسيم واحد

$$Z=CV\left(2\pi mKT\right)^{3/2} \qquad (5)$$

كما نأخذ مضروب لاغرانج بعين الاعتبار

$$\beta=-1/KT \qquad (6)$$

نعوض (3) و (4) و (5) و (6) في (1) نحصل على عدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعها المطلقة بالشكل التالي:

$$dN(\vartheta_{x,y,z})=\frac{N}{CV\left(2\pi mKT\right)^{3/2}}\,e^{-\frac{m}{2KT}(\vartheta_x^2+\vartheta_y^2+\vartheta_z^2)}\,CV\,m^3\,d\vartheta_x\,d\vartheta_y\,d\vartheta_z$$

$$dN(\vartheta_{x,y,z})=N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_x^2}d\vartheta_x\;e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_y^2}d\vartheta_y\;e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_z^2}d\vartheta_z$$

7

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (وليكن ox مثلاً) ندع مركبة سرعته دون تكامل.
ونكامل مركبات السرعة على المحورين الآخرين oy و oz في المجال $]-\infty,+\infty[$ كما يلي:

$$dN(\vartheta_x)=N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_x^2}d\vartheta_x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_y^2}d\vartheta_y\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_z^2}d\vartheta_z$$

نحل التكاملات باستخدام تكاملات بواسون وذلك بفرض $\alpha=m/2KT$ على النحو التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\vartheta_y^0\,e^{-\alpha\vartheta_y^2}d\vartheta_y=2\int_0^{+\infty}\vartheta_y^0\,e^{-\alpha\vartheta_y^2}d\vartheta_y=2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\vartheta_z^0\,e^{-\alpha\vartheta_z^2}d\vartheta_z=2\int_0^{+\infty}\vartheta_z^0\,e^{-\alpha\vartheta_z^2}d\vartheta_z=2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بالتعويض عن $\alpha=m/2KT$ وعن التكاملات بقيمها نجد:

$$\boxed{dN(\vartheta_x)=N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x=N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x}$$

للحصول على تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة ، نقسم الطرفين على N

$$dF(\vartheta_x)=\frac{dN(\vartheta_x)}{N}=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x$$

6

وبملاحظة أن المقدار $G(\vartheta_x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha\vartheta_x^2}$ يمثل تابع كثافة غوص الطبيعي،

<u>وهو تابع كثافة احتمال</u>. لأنه يحقق الشرط الواحدي.

1

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G(\upsilon_x)\,dx=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\upsilon_x^2}d\upsilon_x=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\int_0^{+\infty}\upsilon_x^0\,e^{-\alpha\upsilon_x^2}d\upsilon_x=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=1$$

<u>إيجاد قيم المقادير:</u> $\overline{\vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^2}$ ، $\overline{\Delta\upsilon_x^{\,2}}$

بما أن الأس فردي فنجد من تكاملات بواسون

2

$$\overline{\vartheta_x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\vartheta_x\,G(\vartheta_x)\,d\vartheta_x=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\vartheta_x^{\,1}\,e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x=0$$

تشير هذه النتيجة إلى أن عدد الجسيمات المتحركة وفق ox^+ يساوي العدد المتحرك وفق ox^-

2

$$\overline{\vartheta_x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\vartheta_x^2\,G(\vartheta_x)\,d\vartheta_x=2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^{+\infty}\vartheta_x^{\,2}\,e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x=2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\underbrace{\int_0^{+\infty}\vartheta_x^{\,2}\,e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x}_{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}}=2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}=\frac{1}{2\alpha}=\frac{KT}{m}$$

$$\overline{\Delta \upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_x^2} - \overline{\upsilon}_x{}^2 = 1/2\alpha$$

2

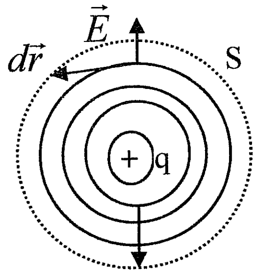
3- أجب عن النقاط التالية

15

- برهان أن الحقل الكهربائي الساكن $\vec{E}$ تدرج لكمون كهربائي سلمي V.

بتطبيق دعوى ستوكس

$$\oint_c \vec{E}\, d\vec{r} = \iint_S (rot\vec{E})_n\, d\vec{S}$$



نفرض C منحني مغلق واقع في سطح تساوي كمون،

فنجد بالاستفادة من الشكل:

$$\vec{E} \perp d\vec{r} \quad \Rightarrow \oint_C \vec{E}\, d\vec{r} = 0$$

فيكون ما تحت التكامل في الطرف الثاني معدوم أيضاً $rot\vec{E} = \vec{0}$.

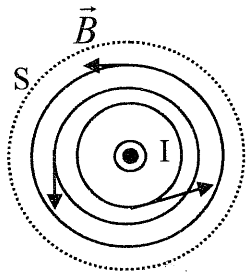
(دوار الحقل الكهربائي الساكن معدوم).

5

وبمطابقة الناتج مع العبارة $rot\, \overrightarrow{grad}\, \varphi = \vec{0}$ نجد : $\vec{E} = \overrightarrow{grad}\, \varphi$ ،

أي أن الحقل $\vec{E}$ يساوي تدرج كمون سلمي φ . فإذا فرضنا $\varphi = -V$ نجد: $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V}$

- برهان أن الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ دوار لكمون مغناطيسي متجه $\vec{A}$.



بما أن $\vec{B}$ حقل لفاف (يكون مماسياً للدوائر المتمركزة مع التيار I)

كما بالشكل. فنجد بتطبيق دعوى أوستراغرادسكي – غوص :

وملاحظة أن $\vec{B}$ لا يتدفق عبر السطح الاسطواني الافتراضي S ،

نجد :

$$\oiint_S \vec{B}\, d\vec{S} = \iiint_\tau div\, \vec{B}_n\, d\tau = 0$$

وهذا يشير إلى مبدأ انحفاظ التدفق المغناطيسي

أي : $div\, \vec{B}_n = 0$ وبمطابقة الناتج مع العبارة ، $div\, rot\, \vec{A} = 0$ نجد : $\boxed{\vec{B} = rot\, \vec{A}}$

يدعى $\vec{A}$ الكمون المغناطيسي ، وهو مقدار متجه .

5

- استنتاج معادلتا بواسون ولابلاس.

بتطبيق دعوى أوستراغرادسكي – غوص ،

$$\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \iiint_\tau div\, \vec{E}_n\, d\tau$$

نوجد تدفق $\vec{E}$ لشحنة نقطية q واقعة داخل سطح افتراضي غاوسي S بتطبيق نظرية غوص $\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$

فإذا افترضنا أن الشحنة النقطية q موزعة داخل الحجم المحدد بهذا السطح الافتراضي الغاوسي S بكثافة حجمية ρ ثابتة، نستطيع أن نعبر عن الطرف الأيسر من الدعوى بالشكل التالي :

$$\frac{q}{\varepsilon_o} = \iiint_\tau \frac{\rho}{\varepsilon_o}\, d\tau = \iiint_\tau div\, \vec{E}_n\, d\tau$$

وبمطابقة ما داخل التكامل في الطرفين ، نحصل على عبارة بواسون التي اعتمدها مكسويل كواحدة من المعادلات الأربعة التي تشرح النظرية الكهرطيسية .

5

$$\boxed{div\, \vec{E} = \rho/\varepsilon_o}$$

يمكن كتابة النتيجة بصيغة أخرى باستخدام $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ بالشكل : $div\, \overrightarrow{grad}\, V = -\rho/\varepsilon_o$

وبما أن تفرق التدرج هو اللابلاسي نجد $\boxed{\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_o}$

وعند كثافة توزع حجمي معدومة للشحنة $\rho = 0$ ، نحصل على معادلة لابلاس التالية: $\nabla^2 V = 0$

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)\,\max}$ لتوزع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم $(N >> 1)$ موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = KT \quad (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \quad (J)$، السويتين متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2})$ في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقم Z_Ω. ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

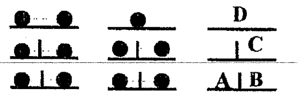
س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).

1- اكتب تابع كثافة توزع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية (بعد تسميتها) $\overline{n}$ و $\overline{n^2}$ و $\overline{\Delta n^2}$.

2- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استفد في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

3- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الخميس 18/ 2/ 2021

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)\max}$ لتوزع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج). 18

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم $(N>>1)$ موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = KT \ (J)$ و $\varepsilon_2 = 2KT \ (J)$، السويتين متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب: 27

1- أوجد عدد حالات التوزع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2})$ في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقم Z_Ω. ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

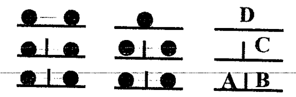
س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).

1- اكتب تابع كثافة توزع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية (بعد تسميتها) $\overline{n}$ و $\overline{n^2}$ و $\overline{\Delta n^2}$. 15

2- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل – بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال. 15

توجيه: استفد في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

3- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها 15



ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الخميس 18/ 2 / 2021

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات

دورة الفصل الأول للعام الدراسي 2020 – 2021 (تسعون درجة)

ج 1: (45 درجة)

1- استنتاج **رقم الانشغال** لتوزع $N_{\underset{\max}{(F-D)}}$ 18

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D}=\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i. أي $\boxed{g_i >> N_i}$.

نوجد بدايةً $Ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\, dN+\beta\, dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{F-D})\approx Ln\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}=\sum_i\left[Ln\, g_i!-Ln\, N_i!-Ln(g_i-N_i)!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\, x!\approx x\, Ln\, x$ نجد:

$$Ln(W_{F-D})\approx\sum_i\left[g_i Ln\, g_i-N_i\, Ln\, N_i-g_i Ln(g_i-N_i)+N_i\, Ln(g_i-N_i)\right]$$ 6

بما أن W_{F-D} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{F-D})=\frac{\partial\, Ln(W_{F-D})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[g_i Ln\, g_i-N_i\, Ln\, N_i-g_i Ln(g_i-N_i)+N_i\, Ln(g_i-N_i)\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[-Ln\, N_i-1+\frac{g_i}{g_i-N_i}+Ln(g_i-N_i)-\frac{N_i}{g_i-N_i}\right]dN_i=\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}-1+\frac{g_i-N_i}{g_i-N_i}\right)dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})\approx\sum_i Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}dN_i$$ 6

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N=\sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN=\sum_i dN_i \quad \text{و} \quad U=\sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU=\sum_i \varepsilon_i\, dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\, dN+\beta\, dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0 \;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i-N_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1 \;\Rightarrow\; \boxed{N_{\underset{\max}{i(F-D)}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1}}$$ 6

2- المسألة: 27

1- عدد حالات التوزع الماكروي: 4

$$N_o=\frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!}=\frac{(N+2-1)!}{N!(2-1)!}=\frac{(N+1)!}{N!1!}=\frac{(N+1)N!}{N!1!}=N+1$$

2- A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(N-1,1)}==N!\left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!}\frac{2^1}{1!}\right)=2N$$ 4

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{M}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\Rightarrow W_{(N-1,1)}=\frac{(N-1+1-1)!}{(N-1)!\,(1-1)!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}=2$$ 4

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i\ge N_i$ فهي غير مقبولة 3

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N=2$. نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

2

$$Z=\sum_i g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}=\sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT}=1e^{-1}+2e^{-2}$$

تحاص الطاقم

2

$$Z_\Omega=Z^N=(1e^{-1}+2e^{-2})^2=1e^{-2}+4e^{-4}+4e^{-3} \qquad (*)$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U=\sum_i N_i\varepsilon_i$ كما يلي $(\overbrace{1,1}^{U=3KT})(\overbrace{0,2}^{U=4KT})(\overbrace{2,0}^{U=2KT})$.

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

2

$$Z_\Omega=\sum_i W_i\, e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}\,e^{\beta U_{(2,0)}}+W_{(0,2)}\,e^{\beta U_{(0,2)}}+W_{(1,1)}\,e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta=-1/KT$ ، نجد:

$$Z_\Omega=\sum_i W_i\, e^{\beta U_i}=W_{(2,0)}\,e^{-2}+W_{(0,2)}\,e^{-4}+W_{(1,1)}\,e^{-3}$$

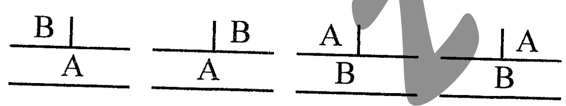
نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة.

$W_{(2,0)}=1$ و $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=4$ 3

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(0,2)}=4$ و $W_{(1,1)}=4$

فتكون الحالة الأكثر احتمالاً هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)}=3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$



3

ج 2: (45 درجة)

1- يُعطى تابع كثافة توزع برنولي بالعلاقة:

15

$$\boxed{\omega(n)=\binom{N}{n}p^n q^{N-n} \qquad ; n\le N}$$

حيث $p\le 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q\le 1$ لأن $q=1-p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N-n)$ مرة من أصل N مرة.

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد لـ نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{N}\omega(n)=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^n q^{N-n}=(p+q)^N=(p+1-p)^N=1$$

3

- إيجاد $\overline{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^n q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1}=\sum_{n=0}^{N}n\binom{N}{n}p^{n-1}q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1}=\sum_{n=0}^{N}n\underbrace{\binom{N}{n}p^n q^{N-n}}_{\omega(n)}=\overline{n} \Rightarrow \boxed{\overline{n}=Np}$$

4

- إيجاد $\overline{n^2}$: وسطي القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشتق تابع التوزع $(p+q)^N=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^n q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\overline{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1}+N(N-1)p(p+q)^{N-2}=\sum_{n=0}^{N}n^2\binom{N}{n}p^{n-1}q^{N-n}\Rightarrow Np+N(N-1)p^2=\sum_{n=0}^{N}n^2\underbrace{\binom{N}{n}p^{n}q^{N-n}}_{\omega(n)}=\overline{n^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^2}=Np+N^2p^2-Np^2}$$

4

- إيجاد $\overline{\Delta n^2}$: (التشتت) نعوض في العبارة

$$\boxed{\overline{\Delta n^2}=\overline{n^2}-\bar{n}^2=Np+N^2p^2-Np^2-N^2p^2=Np(1-p)=Npq=\bar{n}\,q}$$

4

-2 لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:

15

نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقاتها، في المجال الطاقي $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم انشغال مكسويل $N_{i(M-B)}=e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}$ وباعتبار $e^{\alpha}=\dfrac{N}{Z}$ فنجد $dN(\varepsilon)=\dfrac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon$

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon)\,d\varepsilon$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته

$Z=CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد:

$$dN(\varepsilon)=\frac{N}{CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}\,CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

5

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\varepsilon)=\frac{2N}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{N}=\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon=f(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad (1)$$

حيث يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\varepsilon)=\frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}}$$

5

للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $]0\to\infty[$.

$$F(\varepsilon)=\int_0^{\infty}f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\int_0^{\infty}\varepsilon^{1/2}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon=KT\,x\;\Rightarrow\;d\varepsilon=KT\,dx \qquad \wp \qquad \varepsilon^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2}$$

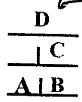
وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^{\infty}f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{1/2}\,KT\underbrace{\int_0^{\infty}x^{1/2}\,e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{3/2}\;\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

5

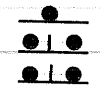
15

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overbrace{2}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{1}^{\varepsilon_3})$ ١



الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = 4!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^1}{1!}\,\frac{1^1}{1!}\right) = 96$ 3

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overbrace{2}^{\varepsilon_1}, \overbrace{2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{1}^{\varepsilon_3})$ ١



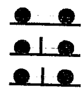
الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,0!} = 3\times 3\times 1 = 9$$ 3

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\frac{1!}{1!\,(1-1)!} = 1\times 1\times 1 = 1$$ 3

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overbrace{2}^{\varepsilon_1}, \overbrace{2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{2}^{\varepsilon_3})$ ١



الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,1!}\,\frac{(2+1-1)!}{2!\,0!} = 3\times 3\times 1 = 9$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2019 - 2020

س١- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

١- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)_{\max}}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

٢- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متمايزة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$، متحللتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقم الجملة
- أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{1}} , \overset{\varepsilon_2}{\overbrace{2}})$ في الحالات التالية:
  ١- الجسيمات متمايزة A و B و C.   ٢- الجسيمات بوزونات.   ٣- الجسيمات فيرميونات.

س٢- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).

١- استنتج من بواسون (باستخدام التقريبات المناسبة) تابع كثافة غوص الطبيعي.

٢- استنتج علاقة كثافة الطاقة الطيفية $\rho(\varepsilon)$ لماكس بلانك في تفسير إشعاع الجسم الأسود (الغاز الفوتوني)، ثم ضع العبارة الحاصلة بدلالة التردد والطول الموجي، ثم مثل بيانياً $\rho(\lambda)$ عند ثلاث درجات حرارة مختلفة، ماذا تستنتج ؟.

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات. فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد 6 / 9 / 2020

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2019 – 2020 (تسعون درجة)

ج ١: (45 درجة)

١- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{i(M-B)_{\max}}$ 20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$ 2

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\,dN + \beta\,dU = 0 \qquad (1)$$ 2

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i \left[N_i\,Ln\,g_i - Ln\,N_i!\right]$$ 2

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد: 2

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\,Ln\,g_i - N_i\,Ln\,N_i + N_i)$$ 2 / 10

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial\,Ln(W_{M-B})}{\partial N_i}dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\,Ln\,g_i - N_i\,Ln\,N_i + N_i)\right]dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\,g_i - Ln\,N_i - 1 + 1)\,dN_i = \sum_i Ln\frac{g_i}{N_i}\,dN_i$$ / 5

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\,dN_i \qquad \text{و} \qquad N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i}dN_i + \alpha\sum_i dN_i + \beta\sum_i \varepsilon_i\,dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln\frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\,\varepsilon_i\right)dN_i = 0 \;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\,\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\,e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}$$ / 5

٢- المسألة: 25

- حالات التوزع الماكروي: $N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ 2

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i\,\varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة. 2

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{\underbrace{(3,0)}_{U=3kT},\underbrace{(0,3)}_{U=6kT},\underbrace{(2,1)}_{U=4kT},\underbrace{(1,2)}_{U=5kT}\right\}$ 2 6

- نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha}\,g_j\,e^{\beta\varepsilon_j}} = \frac{g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j\,e^{-\varepsilon_j/KT}} \qquad \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1e^{-\frac{KT}{KT}}}{2e^{-\frac{2KT}{KT}}} = \frac{1}{2e^{-1}} = \frac{e}{2} > 1 \;\Rightarrow\; N_1 > N_2$$ 2

والتوزع طبيعي

- تحاص الجملة: $Z = \sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT} = e^{-1} + 2e^{-2}$ 1

1 $Z_\Omega = Z^N = (e^{-1}+2e^{-2})^3 = e^{-3}+6e^{-4}+12e^{-5}+8e^{-6}$ تحاص الطاقم:

1 $Z_\Omega = \sum_i W_i\, e^{-U_i/kT} = W_{(3,0)}e^{-3} + W_{(2,1)}e^{-4} + W_{(1,2)}e^{-5} + W_{(0,3)}e^{-6}$ نقارنه بالعبارة:

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

2 $W_{(3,0)}=1$ و $W_{(2,1)}=6$ و $W_{(1,2)}=12$ و $W_{(0,3)}=8$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة $(1,2)$ 1 (6)

- للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة $\Omega = (\sum_i g_i)^N = 3^3 = 27$

(2) وهذا يتطابق مع الحسابات $\Omega = \sum_i W_i = 1+6+12+8 = 27$

- ١- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3!\left(\frac{1^1}{1!}\frac{2^2}{2!}\right) = 12$

B C | A	| B C A	B | C A	C | B A
A C | B	| A C B	A | C B	C | A B
A B | C	| A B C	A | B C	B | A C

(3)

٢- الجسيمات بوزونات $W_{B-E} = \prod_{i=1}^{2}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!} = 3$

●● | ●	| ●● ●	● | ● ●

(3)

٣- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(1,2)$ تحقق الشرط $g_i \ge N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{2}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{1!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-2)!} = 1$

● | ●   ●

(3)

ج ٢: (45 درجة)

١- لإيجاد تابع كثافة توزع غوص الطبيعي ننشر لغارتم تابع كثافة توزع بواسون باستخدام منشور تايلور بجوار القيمة الوسطى $\bar{x} = a$. ونكتفي بالحدود الثلاثة الأولى من المنشور فقط. (11)

3 $$Ln\omega(x) = Ln\omega(x)\Big|_{x=a} + \frac{(x-a)}{1!}\frac{d\,Ln\omega(x)}{dx}\Big|_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2\,Ln\omega(x)}{dx^2}\Big|_{x=a} + \dots\dots \quad (a)$$

نوجد قيمة $Ln\omega(x)$ ومشتقاته، ثم نعوض في حدود المنشور

3 $$\omega(x) = \frac{a^x}{x!}e^{-a} \Rightarrow Ln\omega(x) = x\,Ln a - a - Ln x!$$

وباستخدام تقريب ستيرلنغ $Ln x! \approx x\,Ln x - x$

1 $$Ln\omega(x) \approx x\,Ln a - a - x\,Ln x + x$$ (7)

1 $$\frac{d\,Ln\omega(x)}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx}\left[x\,Ln a - a - x\,Ln x + x\right]_{x=a} = \left[Ln a - Ln x - 1 + 1\right]_{x=a} = 0$$

1 $$\frac{d^2 Ln\omega(x)}{dx^2}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx}\left[Ln a - Ln x\right]_{x=a} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=a} = -\frac{1}{a}$$ (2)

بتعويض كلٍ بقيمته في (a) نجد:

$$Ln\,\omega(x) \approx Ln\,\omega(a) + 0 + \frac{(x-a)^2}{2!}(-\frac{1}{a}) \Rightarrow Ln\frac{\omega(x)}{\omega(a)} \approx -\frac{\Delta X^2}{2a} \quad ; \quad \Delta X^2 = (x-a)^2$$

$$\Rightarrow \omega(x) \approx \omega(a)\, e^{-\frac{\Delta X^2}{2a}}$$ (2)

وهذا يطابق تابع كثافة توزع غوص الطبيعي المعطى بالصيغة $f(x) = A e^{-\alpha x^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$

20 **٢-** الفوتونات هي جسيمات الطاقة الكهرطيسية (الإشعاع الكهرطيسي)، وهي تنتمي لطائفة البوزونات، وعددها داخل تجويف الجسم الأسود غير ثابت وذلك بسبب ظاهرتي الخلق Creation والإفناء Annihilation. أي:

$$N = \sum_i N_i \neq cte \quad \Rightarrow \quad dN \neq 0$$

فنجد من شرط الحالة الأكثر احتمالاً: $d\,Ln(W_{B-E}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0$ أن $\alpha = 0$. وبالتالي يكون: $e^{-\alpha} = 1$

ويصبح عدد الفوتونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ وفقاً لتوزع بوزه - آينشتين:

$$dN_{(B-E)} = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{-\alpha} e^{\varepsilon/kT} - 1} = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \qquad (a)$$ 3

نكتب درجة التحلل $dg(\varepsilon)$ للسويات الواقعة في المجال $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ بدلالة عنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma$ من العبارة

$$dg(\varepsilon) = c\, d\Gamma(\varepsilon) \qquad ; c = 1/h^3 \qquad \wp \qquad d\Gamma(\varepsilon) = dq_V\, dp_V = V\, d(\frac{4}{3}\pi\, p^3) = V\, 4\pi\, p^2 dp$$

$$dg(\varepsilon) = \frac{V 4\pi\, p^2 dp}{h^3} \qquad (*)$$

وبما أن الفوتونات أشعة كهرطيسية فهي تملك اتجاهين مستقلين للاستقطاب، ويحصل تضاعف لقيمة درجة التحلل.

وحيث أن طاقة الفوتون ε مرتبطة بزخمه p بواسطة سرعة الضوء c وفق العلاقة:

$$\varepsilon = c\, p \Rightarrow p = \frac{\varepsilon}{c} \Rightarrow dp = \frac{d\varepsilon}{c}$$ 3

فنجد بالتعويض في (*) :

$$dg(\varepsilon) = 2\, \frac{V 4\pi\, \varepsilon^2 d\varepsilon}{h^3 c^3} \qquad (**)$$

نعوض (**) في (a) فنجد:

$$dN_{(B-E)} = \frac{V 8\pi\, \varepsilon^2}{h^3 c^3} \frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \qquad (b)$$

وبما أن طاقة الجملة في الحالة المستمرة

$$U = \int \varepsilon\, dN \Rightarrow dU = \varepsilon\, dN_{(B-E)} \qquad (c)$$

نعوض (b) في (c) فنجد:

$$dU = \frac{V 8\pi\, \varepsilon^3}{h^3 c^3} \frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

نحصل على كثافة الطاقة في وحدة الحجوم $(V = 1)$ بالشكل:

$$du = \frac{dU}{V} = \frac{8\pi\, \varepsilon^3}{h^3 c^3} \frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} = \rho(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad (d)$$ 3

يمثل $\rho(\varepsilon)$ كثافة طيف طاقة الإشعاع الصادر عن الجسم الأسود وفقاً لتفسير ماكس بلانك.

(علاقة ماكس بلانك في الإشعاع)

$$\boxed{\rho(\varepsilon) = \frac{8\pi\, \varepsilon^3}{h^3 c^3} \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1}} \qquad (E)$$ 2

- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\varepsilon)$ بدلالة التردد ν، باستخدام علاقة ماكس بلانك: $\varepsilon = h\nu \Rightarrow d\varepsilon = h\, d\nu$

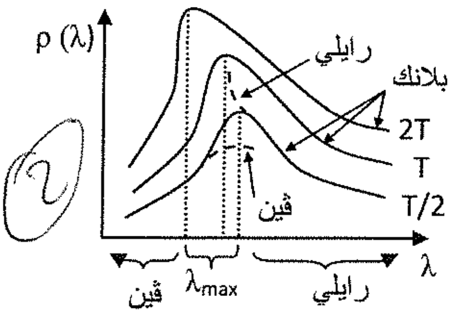
$$\boxed{\rho(\nu) = \frac{8\pi\, h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}} \qquad (F)$$ 2

- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\nu)$ بدلالة طول الموجة λ، باستخدام العلاقة: $|d\nu| = (c/\lambda^2)\,d\lambda \quad \Rightarrow \quad \nu = c/\lambda$

$$\boxed{\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}} \qquad (G)$$

2

- نمثل بيانياً عبارة بلانك (G) لكثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بدلالة طول الموجة λ كما هو موضح بالشكل.



2

ونستنتج مايلي:

3

1 - لا تتعلق كثافة الإشعاع بكتلة الجسم m.

1 - يتحقق قانون ڤين في الإزاحة

$$\boxed{\lambda_{max} T = cte = 2{,}897\times10^{-3}\ mk^{o}}$$

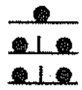
1 - تنزاح القيمة العظمى للأطوال الموجية بارتفاع درجات الحرارة نحو الأطوال الموجية القصيرة (الطاقات العالية).

-٣

14

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\widehat{1}}\,,\ \overset{\varepsilon_2}{\widehat{2}}\,,\ \overset{\varepsilon_3}{\widehat{0}})$ 2

الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{3}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2,0)} = 3!\left(\frac{2^1}{1!}\ \frac{2^2}{2!}\ \frac{1^0}{0!}\right) = 24$ 2



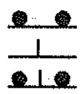
الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\widehat{2}}\,,\ \overset{\varepsilon_2}{\widehat{2}}\,,\ \overset{\varepsilon_3}{\widehat{1}})$ 2

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \quad \Rightarrow \quad W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1\,!}\ \frac{(2+2-1)!}{2!\,1\,!}\ \frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)\,!} = 3\times3\times1 = 9$$ 2

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{3}\frac{g_i\,!}{N_i!\,(g_i-N_i)\,!} \quad \Rightarrow \quad W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2\,!\,(2-2)\,!}\ \frac{2!}{2\,!\,(2-2)\,!}\ \frac{1\,!}{1!\,(1-1)\,!} = 1\times1\times1 = 1$$ 2



الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{\widehat{2}}\,,\ \overset{\varepsilon_2}{\widehat{0}}\,,\ \overset{\varepsilon_3}{\widehat{2}})$ 2

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{3}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)\,!} \quad \Rightarrow \quad W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,1\,!}\ \frac{(0+2-1)!}{0!\,1\,!}\ \frac{(2+1-1)!}{2!\,0\,!} = 3\times1\times1 = 3$$ 2

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2017 - 2018

السؤال الأول: أجب عن البنود التالية: (45 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{\max(F-D)}$ لتوزع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- استنتج عبارة تابع كثافة الطاقة التالية $f(\varepsilon)=\dfrac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}$، علماً أن قيمة تابع التحاص Z
$Z=CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}$، والعلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري هي
$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=CV\,2\pi\left(2m\right)^{3/2}\left(\varepsilon\right)^{1/2}\,d\varepsilon$.

ثم أجب عن النقاط التالية، علماً أن: $\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n\,e^{-x}\,dx=n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

1- برهن أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. 2- برهن باستخدام طريقة الوسطي الإحصائية أن $\bar{\varepsilon}=\dfrac{3}{2}KT$.

3- أوجد قيمة تشتت الطاقة الحركية $\overline{\Delta\varepsilon^2}$. 4- أوجد عبارة القيمة الوسطى للطاقة $\overline{\varepsilon^n}$ (من المرتبة n).

السؤال الثاني: أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- جملة مكونة من 3 جسيمات متمايزة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1=kT$ و $\varepsilon_2=2kT$، متحللتين بالشكل:
$g_1=2$ و $g_2=1$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{2}}\,,\,\overset{\varepsilon_2}{\overbrace{1}})$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متمايزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

2- برهن أن سعة مكثفة اسطوانية (مكونة من سطحين اسطوانيين S متحدي المركز، تفصل بينهما مسافة ثابتة d).
تعطى بالعلاقة $C=\varepsilon_o\dfrac{S}{d}$، (الرسم ضروري).

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس آذار 4 / 9 / 2018
مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2017 - 2018 (الدرجة العظمى: تسعون)

أجوبة بنود السؤال الأول: (45 درجة)

-1 20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D}=\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i. أي $\boxed{g_i >> N_i}$.

نوجد بدايةً $Ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{F-D})\approx Ln\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}=\sum_i\left[Ln\,g_i!-Ln\,N_i!-Ln(g_i-N_i)!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{F-D})\approx\sum_i\left[g_i Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_i Ln(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]$$ 7

بما أن W_{F-D} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{F-D})=\frac{\partial\,Ln(W_{F-D})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[g_i Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_i Ln(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[-Ln\,N_i-1+\frac{g_i}{g_i-N_i}+Ln(g_i-N_i)-\frac{N_i}{g_i-N_i}\right]dN_i=\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}-1+\frac{g_i-N_i}{g_i-N_i}\right)dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})\approx\sum_i Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}\,dN_i$$ 7

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N=\sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN=\sum_i dN_i \qquad \text{و} \qquad U=\sum_i\varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\;\Rightarrow\;Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\;\Rightarrow\;\frac{g_i-N_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\;\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1\;\Rightarrow\;\boxed{N_{\underset{\max}{i(F-D)}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1}}$$ 6

:2 نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقاتها، في المجال الطاقي $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$. 25

$$dN(\varepsilon)=\frac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon)\,d\varepsilon$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=CV\,2\pi\left(2m\right)^{3/2}\left(\varepsilon\right)^{1/2}d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z=CV\,\left(2\pi\,m\,KT\right)^{3/2}$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد:

$$dN(\varepsilon)=\frac{N}{CV\,\left(2\pi\,m\,KT\right)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}\,CV\,2\pi\left(2m\right)^{3/2}\left(\varepsilon\right)^{1/2}d\varepsilon$$

بالاختزال والإصلاح.

$$dN(\varepsilon)=\frac{2N}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}\ (\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{N}=\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon=f(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\varepsilon)=\frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}}$$

5

1- للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تابع الكثافة يحقق الشرط الواحدي.
وذلك بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $]0\to\infty[$.

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon=KT\,x\ \Rightarrow\ d\varepsilon=KT\,dx \qquad \wp \qquad \varepsilon^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{1/2}\,KT\underbrace{\int_0^\infty x^{1/2}\,e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

5

2- نحسب الطاقة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ بطريقة الوسطي الإحصائية بالشكل التالي

$$\bar{\varepsilon}=\int_0^\infty \varepsilon\,f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل من تابع غاما

نفرض $\varepsilon^{3/2}=(KT)^{3/2}x^{3/2} \Rightarrow \varepsilon=KT\,x \Rightarrow x=\varepsilon/KT$ فتكون $d\varepsilon=KT\,dx$ وبالتعويض:

$$\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\,e^{-\varepsilon/KT}=(KT)^{3/2}\,KT\int_0^\infty x^{3/2}\ e^{-x}\,dx=(KT)^{5/2}\,\Gamma(\frac{5}{2})=(KT)^{5/2}\ \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

بالتعويض نجد المطلوب

$$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\ (KT)^{5/2}\ \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3}{2}KT$$

5

3- نوجد تشتت الطاقة الحركية من العلاقة $\overline{\Delta\varepsilon^2}=\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2}=\overline{\varepsilon^2}-\bar{\varepsilon}^2$

نوجد أولاً وسطي القيمة التربيعية للطاقة $\overline{\varepsilon^2}$ بطريقة الوسطي. علماً أن مربع القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}^2=\frac{9}{4}(KT)^2$

$$\overline{\varepsilon^2}=\int_0^\infty \varepsilon^2\,f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}}\int_0^\infty \varepsilon^{5/2}\,e^{-\varepsilon/KT}d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $\varepsilon^{5/2}=(KT)^{5/2}\ x^{5/2} \quad \wp \quad d\varepsilon=KT\,dx \Leftarrow \varepsilon=KT\,x \Leftarrow x=\varepsilon/KT$

وبالتعويض

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}}(KT)^{5/2}KT\int_0^\infty x^{5/2}\,e^{-x}\,dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(KT)^2\ \Gamma(\frac{7}{2})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(KT)^2\,\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{15}{4}(KT)^2$$

بالتعويض في عبارة تشتت الطاقة نجد

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{15}{4}(KT)^2 - \frac{9}{4}(KT)^2 = \frac{3}{2}(KT)^2$$

5

4- نوجد وسطي الطاقة $\overline{\varepsilon^n}$ (من الرتبة n) بالطريقة الإحصائية.

$$\overline{\varepsilon^n} = \int_0^\infty \varepsilon^n f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^n \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} = (KT)^{n+\frac{1}{2}} x^{n+\frac{1}{2}}$ و $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT\,x \Rightarrow d\varepsilon = KT\,dx$

وبالتعويض

$$\overline{\varepsilon^n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{n+\frac{1}{2}} KT \int_0^\infty x^{n+\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^n \, \Gamma(n+\frac{3}{2})$$

5

أجوبة بنود السؤال الثاني: (45 درجة).

1: 25

- حالات التوزع الماكروي: $N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة.

5

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{ \underbrace{(3,0)}_{U=3kT}, \underbrace{(0,3)}_{U=6kT}, \underbrace{(2,1)}_{U=4kT}, \underbrace{(1,2)}_{U=5kT} \right\}$.

- تحاص الجملة: $Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + e^{-2}$

تحاص الطاقم: $Z_\Omega = Z^N = (2e^{-1}+e^{-2})^3 = 8e^{-3} + 12e^{-4} + 6e^{-5} + e^{-6}$

نقارنه بالعبارة: $Z_\Omega = \sum_i W_i e^{-U_i/kT} = W_{(3,0)} e^{-3} + W_{(2,1)} e^{-4} + W_{(1,2)} e^{-5} + W_{(0,3)} e^{-6}$

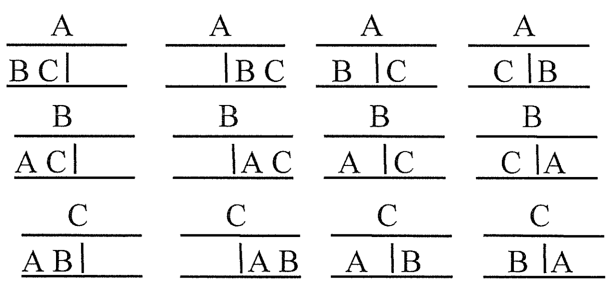
فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

$W_{(3,0)} = 8$ و $W_{(2,1)} = 12$ و $W_{(1,2)} = 6$ و $W_{(0,3)} = 1$

5

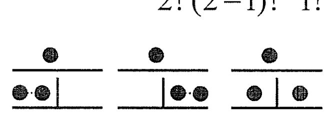
الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (2,1)

- 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^{2} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1)} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{1^1}{1!}\right) = 12$



5

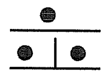
2- الجسيمات بوزونات $W_{B-E} = \prod_{i=1}^{2} \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!} = 3$



5

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (2,1) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i\,!}{N_i\,!\,(g_i-N_i)!}\quad\Rightarrow W_{(2,1)}=\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\frac{1!}{1!\,(1-1)!}=1$$

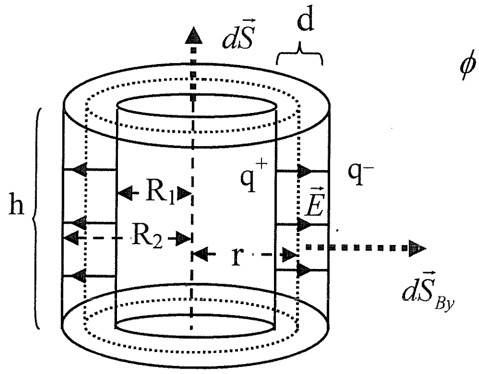


5

:2 (حساب سعة المكثفة الاسطوانية) 20

نأخذ سطح افتراضي غاوسي على شكل اسطوانة متحدة المحور مع اللبوسين الاسطوانيين نصف قطرها r حيث $R_1<r<R_2$ وارتفاعها h ثابت وتحيط باللبوس الموجب q^+ كما في الشكل: 5

أولاً: نحسب شدة الحقل بتطبيق غوص، أي نوجد تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر السطح الغاوسي الافتراضي المغلق S، علماً أن $E=cte$ فيكون تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر سطح الاسطوانة المغلق عبارة عن مجموع تدفقين عبر سطحين مفتوحين، هما سطح القاعدة S، والسطح الجانبي S_{By} .



$$\phi=\oiint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\iint_S\underbrace{\vec{E}\,d\vec{S}}_{\substack{0\\ \vec{E}\perp d\vec{S}}}+\iint_{S_{By}}\vec{E}\,d\vec{S}_{by}=\underbrace{\iint_{S_{By}}\vec{E}\,d\vec{S}_{By}=\iint_S E\,dS_{By}}_{\vec{E}\,//\,d\vec{S}_{By}}=\frac{q}{\varepsilon_o}$$

وبما أن $E=cte$ (يمكن إخراجه خارج التكامل) ومساحة السطح الافتراضي الجانبي $S_{By}=2\pi r\,h$ ، نجد:

$$E\iint_S dS=E(2\pi r\,h)=\frac{q}{\varepsilon_o}\ \Rightarrow E=\frac{q}{2\pi r\,h\varepsilon_o}$$

5

ثانياً: نطبق العبارة (جولان الحقل بين الشحنتين يساوي فرق الكمون بينهما) مع الأخذ بعين الاعتبار أن

$$\ln(1\pm\frac{d}{R})=\ln(1\pm\delta)\approx\pm\delta\quad;\ \delta=\frac{d}{R}<<1$$

حيث اعتبرنا R متوسط نصف قطر الاسطوانتين

$$\int_{q^+}^{q^-}E\,dr=\frac{q}{2\pi\varepsilon_o h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_o h}\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_o h}\ln\frac{R_1+d}{R_1}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_o h}\ln(1+\frac{d}{R_1})\approx\frac{q}{2\pi\varepsilon_o h}\,\frac{d}{R}=V$$

5

ثالثاً: نحسب السعة بتطبيق العلاقة: (بعد اعتبار أن $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ و $S_{By}=2\pi r\,h$) نجد المطلوب

$$c=\frac{q}{V}=\frac{q}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_o h}\,\frac{d}{R}}=\varepsilon_o\frac{2\pi R\,h}{d}=\varepsilon_o\frac{S}{d}$$

5

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2017 - 2018

س1: أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(B-E)\,\max}$ لتوزع بوزه - آينشتين $(B\text{-}E)$، في الحالة الأكثر احتمال.

2- استنتج عبارة تابع كثافة الطاقة التالية $f(\varepsilon)=\dfrac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,e^{-\varepsilon/KT}$ ، علماً أن قيمة تابع التحاص Z $Z=CV\,(2\pi\, m\,KT)^{3/2}$ ، والعلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري هي $g(\varepsilon)\,d\varepsilon = CV\,2\pi(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$.

ثم أجب عن النقاط التالية، علماً أن: $\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

1- برهن أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. 2- برهن باستخدام طريقة الوسطي الإحصائية أن $\bar{\varepsilon}=\dfrac{3}{2}KT$.

3- أوجد قيمة تشتت الطاقة الحركية $\overline{\Delta\varepsilon^2}$. 4- أوجد عبارة القيمة الوسطى للطاقة $\overline{\varepsilon^n}$ (من المرتبة n).

س2: أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- جملة مكونة من N جسيم موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1=0$ و $\varepsilon_2=KT$.
السويتان متحللتين بالشكل: $g_1=N$ و $g_2=1$. والمطلوب:
أولاً: أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).
ثانياً: أوجد طاقة الحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1},\overbrace{1}^{\varepsilon_2})$ ، ثم أوجد وزنها الإحصائي في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
ثالثاً: بفرض أن الجسيمات متمايزة، أوجد رقمي انشغال حالة التوزع الماكروي الأكثر احتمال (N_1,N_2) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1+N_2=N$)، ثم تحقق أن هذا التوزع هو توزع طبيعي.

2- برهن أن سعة مكثفة كروية (مكونة من سطحين كرويين S متحدي المركز، تفصل بينهما مسافة ثابتة d). تعطى بالعلاقة $C=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$ ، (الرسم ضروري).

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد 2018 / 7 / 1

مدرس المقرر د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2017 - 2018
(الدرجة العظمى: تسعون)

جواب السؤال الأول: (45 درجة).

البند 1: 20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (B-E). المعطاة بالعلاقة: $W_{B-E}=\prod_i \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}$

وحيث أن الجسيمات هي بوزونات (كمية) فيكون عددها N_i ودرجة تحلل سويات الطاقة g_i كبيرين، لذا يُهمل الواحد في توزع (B-E) وتصبح عبارة الوزن الإحصائي بالشكل التالي: $W_{B-E}\approx\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{B-E})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{B-E})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{B-E})\approx Ln\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)!-Ln\,N_i!-Ln\,g_i!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{B-E})\approx\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]$$ 7

بما أن W_{B-E} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{B-E})=\frac{\partial\,Ln(W_{B-E})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[(N_i+g_i)\,Ln(N_i+g_i)-N_i\,Ln\,N_i-g_i\,Ln\,g_i\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)+\frac{N_i+g_i}{N_i+g_i}-Ln\,N_i-\frac{N_i}{N_i}\right]dN_i=\sum_i\left[Ln(N_i+g_i)-Ln\,N_i\right]dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})\approx\sum_i Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}dN_i$$ 7

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N=\sum_i N_i \Rightarrow dN=\sum_i dN_i \quad \text{و} \quad U=\sum_i\varepsilon_i N_i \Rightarrow dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i$$

$$d\,Ln(W_{B-E})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\Rightarrow Ln\frac{N_i+g_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\Rightarrow\frac{N_i+g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1\Rightarrow\boxed{N_{i(B-E)\,\max}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}-1}}$$ 6

البند 2: 25

نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقاتها، في المجال الطاقي $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$.

$$dN(\varepsilon)=\frac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon)\,d\varepsilon$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon)d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z=CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد:

$$dN(\varepsilon)=\frac{N}{CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}\,CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\,(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

بالاختزال والإصلاح.

$$dN(\varepsilon)=\frac{2N}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}\;(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon)=\frac{dN(\varepsilon)}{N}=\frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon=f(\varepsilon)d\varepsilon$$

يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\varepsilon)=\frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}e^{-\varepsilon/KT}}$$

5

1- للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تابع الكثافة يحقق الشرط الواحدي. وذلك بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $]0\to\infty[$.

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon=KT\,x\;\Rightarrow\;d\varepsilon=KT\,dx\qquad و\qquad \varepsilon^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{1/2}\,KT\underbrace{\int_0^\infty x^{1/2}\,e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{3/2}\;\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

5

2- نحسب الطاقة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ بطريقة الوسطي الإحصائية بالشكل التالي

$$\bar{\varepsilon}=\int_0^\infty\varepsilon\,f(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\int_0^\infty\varepsilon^{3/2}e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل من تابع غاما

نفرض $\varepsilon^{3/2}=(KT)^{3/2}x^{3/2}\;\Leftarrow\;\varepsilon=KT\,x\;\Leftarrow\;x=\varepsilon/KT$ فتكون $d\varepsilon=KT\,dx$ وبالتعويض:

$$\int_0^\infty\varepsilon^{3/2}\,e^{-\varepsilon/KT}=(KT)^{3/2}KT\int_0^\infty x^{3/2}\;e^{-x}\,dx=(KT)^{5/2}\,\Gamma(\frac{5}{2})=(KT)^{5/2}\;\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

بالتعويض نجد المطلوب

$$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{5/2}\;\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3}{2}KT$$

5

3- نوجد تشتت الطاقة الحركية من العلاقة $\overline{\Delta\varepsilon^2}=\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2}=\overline{\varepsilon^2}-\bar{\varepsilon}^2$

نوجد أولاً وسطي القيمة التربيعية للطاقة $\overline{\varepsilon^2}$ بطريقة الوسطي. علماً أن مربع القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}^2=\frac{9}{4}(KT)^2$

$$\overline{\varepsilon^2}=\int_0^\infty\varepsilon^2\,f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}}\int_0^\infty\varepsilon^{5/2}\,e^{-\varepsilon/KT}d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $\varepsilon^{5/2}=(KT)^{5/2}\,x^{5/2}$ و $d\varepsilon=KT\,dx\;\Leftarrow\;\varepsilon=KT\,x\;\Leftarrow\;x=\varepsilon/KT$

وبالتعويض

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}}(KT)^{5/2}KT\int_0^\infty x^{5/2}\,e^{-x}\,dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(KT)^2\,\Gamma(\frac{7}{2})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(KT)^2\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{15}{4}(KT)^2$$

بالتعويض في عبارة تشتت الطاقة نجد

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \overline{\varepsilon}^2 = \frac{15}{4}(KT)^2 - \frac{9}{4}(KT)^2 = \frac{3}{2}(KT)^2$$ 5

4- نوجد وسطي الطاقة $\overline{\varepsilon^n}$ (من الرتبة n) بالطريقة الإحصائية.

$$\overline{\varepsilon^n} = \int_0^\infty \varepsilon^n f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^n \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT\,x \Rightarrow d\varepsilon = KT\,dx$ و $\varepsilon^{n+\frac{1}{2}} = (KT)^{n+\frac{1}{2}} x^{n+\frac{1}{2}}$
وبالتعويض

$$\overline{\varepsilon^n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{n+\frac{1}{2}} KT \int_0^\infty x^{n+\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^n\, \Gamma(n+\frac{3}{2})$$ 5

جواب السؤال الثاني: (45 درجة).

البند 1: 25

أولاً - عدد حالات التوزع الماكروي: 5

$$N_a = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(N+2-1)!}{N!(2-1)!} = \frac{(N+1)!}{N!\,1!} = \frac{(N+1)N!}{N!\,1!} = N+1$$

ثانياً - طاقة الحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{N-1}, \overset{\varepsilon_2}{1})$ نجدها من العلاقة

$$U_{(N-1,1)} = \sum_i N_i \varepsilon_i = (N-1)\times 0 + 1\times KT = KT$$ 1

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N!\left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!}\frac{1^1}{1!}\right) = N(N-1)!\left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!}\frac{1^1}{1!}\right) = N\,N^{N-1} = N^N$$ 3

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{2} \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!}\,\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$ 3

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{2} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{N!}{(N-1)!\,(N-N+1)!}\,\frac{1!}{1!\,(1-1)!} = \frac{N(N-1)!}{(N-1)!} = N$$ 3

ثالثاً - بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta\varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = N e^{-0} + e^{-1} = N + e^{-1}$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i = g_i e^{\alpha+\beta\varepsilon_i} = e^\alpha g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$

فيكون $N_1 = \frac{N}{N+e^{-1}} N = \frac{N}{Z} N$ 4 و $N_2 = \frac{N}{N+e^{-1}} e^{-1} = \frac{N e^{-1}}{Z}$. 4

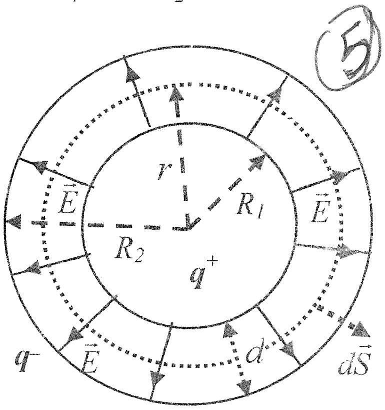
ويمكن التحقق من ذلك بالجمع $N_1 + N_2 = \frac{N}{N+e^{-1}} N + \frac{N}{N+e^{-1}} e^{-1} = \frac{N(N+e^{-1})}{N+e^{-1}} = N$ 1

للتحقق من كون هذا التوزع (في الحالة الأكثر احتمالاً) هو توزع طبيعي نوجد نسبة رقمي الانشغال

$$\frac{N_1}{N_2} = Ne > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$ 1

البند 2: (حساب سعة المكثفة الكروية) 20

نأخذ سطح افتراضي غاوسي يحيط باللبوس الموجب q^+ على شكل كرة نصف قطرها r حيث $R_1 < r < R_2$ ومتحد المركز مع اللبوسين الكرويين q^+ و q^-، كما هو موضح في الشكل. 5



أولاً: نحسب شدة الحقل بتطبيق غوص، أي نوجد تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر السطح الغاوسي الافتراضي المغلق S، علماً أن $E = cte$

$$\phi = \underbrace{\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \oiint_S E\, dS}_{\vec{E} // d\vec{S}} = E \oiint_S dS = E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \; E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^2} = k \frac{q}{r^2}$$ 5

ثانياً: نطبق العبارة (جولان الحقل بين الشحنتين يساوي فرق الكمون بينهما)

$$\int_{q^+}^{q^-} E\, dr = k\, q \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = k\, q \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = k\, q \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \approx k\, q \frac{d}{R^2} = V$$ 5

حيث اعتبرنا R متوسط نصف قطر الكرتين $R_1 R_2 \approx R^2$ و $d = R_2 - R_1$ حيث $d << R$

ثالثاً: نحسب السعة بتطبيق العلاقة: (بعد اعتبار أن $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ و $S = 4\pi R^2$) نجد المطلوب

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{k\, q \dfrac{d}{R^2}} = \varepsilon_o \frac{4\pi R^2}{d} = \varepsilon_o \frac{S}{d}$$ 5

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018

س١- أجب عن البنود التالية: (60 درجة).

١- استنتج عبارة **رقم الانشغال** $N_{i(M-B)\,\max}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

٢- مسألة:
جملة مكونة من 3 جسيمات موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$، متحللتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\overbrace{1}}\,,\overset{\varepsilon_2}{\overbrace{2}})$ في الحالات التالية:

١- الجسيمات متمايزة A و B و C. ٢- الجسيمات بوزونات. ٣- الجسيمات فيرميونات.

٣- تُعبر الصيغة $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\vartheta)\, d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$، وفقاً لتوزع (M-B). والمطلوب:

- أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV\,(2\pi\, m\, KT)^{3/2}$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

س٢- أجب عن المسألة التالية: (20 درجة).
تُثبت في رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $\ell\,(m)$، ثلاث شحنات متساوية القيمة، $q\,(co\ell)$ لكل منها، ومهملة الوزن.

١- إذا كانت الشحنات مختلفة الإشارة بحيث تكون واحدة موجبة واثنتين سالبتين. المطلوب:

- ارسم الشكل، ومثِّل عليه اتجاه قوة كولون $\vec{F}_C$ المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ).
- مثِّل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ)، وحدد اتجاه حركة كلٍ منها بعد إزالة التثبيت.

٢- إذا كانت الشحنات الثلاث متساوية القيمة ومتفقة الإشارة (سالبة). والمطلوب:

- ارسم الشكل الجديد، ومثِّل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها.
- أوجد قيمة الشحنة الموجبة الرابعة الواجب وضعها في مركز المثلث بحيث تبقى الشحنات في أماكنها بعد إزالة التثبيت.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الثلاثاء 16 / 1 / 2018

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات

لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018

(الدرجة العظمى: ثمانون)

جواب السؤال الأول: (60 درجة).

20

١- ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i \left[N_i\, Ln\, g_i - Ln\, N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\,Ln\,g_i - N_i\,Ln\,N_i + N_i)$$

5

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial\, Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\,Ln\,g_i - N_i\,Ln\,N_i + N_i)\right] dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\,g_i - Ln\,N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i \qquad \text{و} \qquad N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

5

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln\frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\,\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\,\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}$$

5

20

٢- **المسألة**

- حالات التوزع الماكروي: $N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i\,\varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{\underbrace{(3,0)}_{U=3kT}, \underbrace{(0,3)}_{U=6kT}, \underbrace{(2,1)}_{U=4kT}, \underbrace{(1,2)}_{U=5kT}\right\}$.

5

- ١- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3!\left(\frac{1^1}{1!}\frac{2^2}{2!}\right) = 12$

BC |	| BC	B | C	C | B
A	A	A	A
AC |	| AC	A | C	C | A
B	B	B	B
AB |	| AB	A | B	B | A
C	C	C	C

5

٢- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{2}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\quad\Rightarrow W_{(1,2)}=\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!}=3$$

●● |	| ●●	● | ●
●	●	●

5

٣- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(1,2)$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}\quad\Rightarrow W_{(1,2)}=\frac{1!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-2)!}=1$$

● | ●
●

5

٣- 20

لدينا صيغة $dN(\vartheta)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$ بالشكل التالي :

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}g(\vartheta)\,d\vartheta \qquad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التحاص

$$Z=CV\,(2\pi mkT)^{3/2} \qquad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p=m\vartheta \;\rightarrow\; dp=m\,d\vartheta$$

$$g(\vartheta)\,d\vartheta=C\,d\Gamma(\vartheta)=C\,dq_V\,dp_V=CV\,4\pi\,p^2dp=CV\,4\pi\,m^3\vartheta^2d\vartheta \qquad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

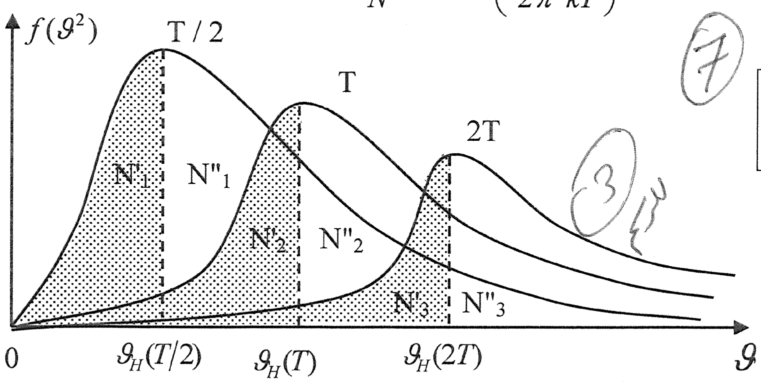
$$\varepsilon=m\vartheta^2/2 \qquad (c)$$

بتعويض العبارات (a) و(b) و(c) في (*)، مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta=-1/kT$ نجد:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{CV\,(2\pi mkT)^{3/2}}e^{-m\vartheta^2/2kT}\,CV\,4\pi\,m^3\vartheta^2d\vartheta$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزع السرعة المطلقة لجسيم واحد ، بالشكل التالي :

$$dF(\vartheta)=\frac{dN(\vartheta)}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi\,kT}\right)^{3/2}\vartheta^2\;e^{-m\vartheta^2/2kT}\,d\vartheta=f(\vartheta^2)\,d\vartheta$$



7

3

و بدلالة الثابت $\alpha=m/2kT$

$$\boxed{dF(\vartheta)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\;e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta=f(\vartheta^2)\,d\vartheta}$$

- نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي :

المناقشة والتفسير :

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات $N=cte$ عند كل درجة حرارة .

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث $N=N'+N''$

حيث 'N عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H . 4

و "N عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من ϑ_H .

حيث ϑ_H السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) ، (السرعة الأكثر احتمالاً).

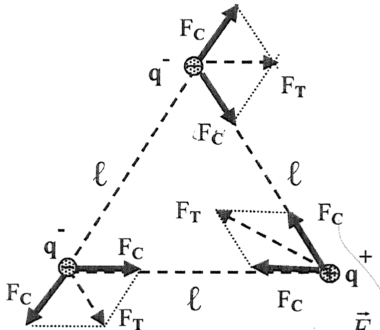
<u>النتائج :</u>

١- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات

٢- بارتفاع درجات الحرارة يزداد "N على حساب تناقص 'N بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$) . 6

٣- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

<u>جواب السؤال الثاني (المسألة):</u> (20 درجة).



-١ 10

- التمثيل موضح بالشكل، وهي تنافر بين الشحنتين السالبتين، وتجاذب بين الموجبة والسالبة. نحسب شداتها بتطبيق كولون وهي متساوية لجميع الشحنات . $F_C = k\dfrac{q^2}{\ell^2}$ 4
- نمثّل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة ، كما بالشكل :

نحسب شدة المحصلة المؤثرة في كل من الشحنتين السالبتين

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F^2{}_{C1} + F^2{}_{C1} + 2F^2{}_{C1}\,Cos(\pi - 60)}$$

$$\vec{F}_T(q^-) = F_{C1}\sqrt{2[1 - Cos(60)]} = F_{C1}\sqrt{2[1 - 0{,}5]} = F_{C1} = k\frac{q^2}{\ell^2}$$ 3

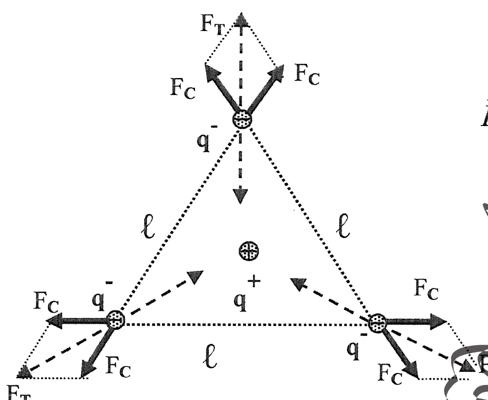
وهي تساوي الشدة المؤثرة في كلٍ منهما على حدة .

نحسب شدة المحصلة المؤثرة في الشحنة الموجبة بنفس الأسلوب

$$\vec{F}_T(q^+) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^+) = \sqrt{F^2{}_{C1} + F^2{}_{C1} + 2F^2{}_{C1}\,Cos(60)}$$

$$\vec{F}_T(q^+) = F_{C1}\sqrt{2[1 + Cos(60)]} = \sqrt{3}\,F_{C1} = \sqrt{3}\,k\frac{q^2}{\ell^2}$$ 3

وهذا يعني أن كل شحنة ستتحرك وفق المحصلة $\vec{F}_T$ عند إزالة تثبيتها .



-٢ 10

- بدايةً نحسب محصلة قوى التدافع المؤثرة في كل من الشحنات السالبة، كما هو موضح بالشكل.

علماً أن قوة كولون المتبادلة بين كل شحنتين سالبتين هي $F_{C1} = k\dfrac{{q^-}^2}{\ell^2}$

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F^2{}_{C1} + F^2{}_{C1} + 2F^2{}_{C1}\,Cos(60)}$$

$$F_T(q^-) = \sqrt{3}\,F_{C1} = \sqrt{3}\,k\frac{(q^-)^2}{\ell^2}$$

5

- تتوازن كل من الشحنات السالبة الثلاث مع الشحنة الموجبة المركزية بقوة تجاذب $F_{q^+q^-} = k\dfrac{q^- q^+}{x^2} = F_T(q^-)$

أي أن $F_{q^+q^-}$ مساوية بالقيمة المطلقة ومعاكسة بالاتجاه للمحصلة $F_T(q^-)$. حيث x المسافة بين مركز المثلث وأحد رؤوسه وهي هندسياً تساوي ثلثي طول العامد (الارتفاع في المثلث) والمساوي بدوره لـ

$$x = \frac{2}{3}\ell\,Cos30 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell \text{ إذن } .\ \ell\,Cos30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

بالتعويض والاختزال نحصل على قيمة q^+ بدلالة q^- كما يلي:

$$3k\frac{q^- q^+}{\ell^2} = \sqrt{3}\,k\frac{(q^-)^2}{\ell^2} \quad \Rightarrow \quad q^+ = \frac{\sqrt{3}}{3}q^- \quad \Leftrightarrow \quad q^+ < q^-$$ 5

جامعة طرطوس	اسم الطالب:
كلية العلوم	الدرجة العظمى: ثمانون
قسم الرياضيات	مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الدورة الإضافية (الصيفية) للعام الدراسي 2016 -2017

السؤال الأول: أجب عن البنود التالية: (60 درجة).

1- جملة مكونة من 3 جسيمات متمايزة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$، متحللتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{1}\ ,\ \overset{\varepsilon_2}{2})$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متمايزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

2- جملة مكونة من N جزيء نقطي متماثل (من غاز مثالي)، موضوعة في وعاء حجمه V، في الدرجة $T(k^o)$.

فإذا علمت أن كتلة كل جزيء m، وطاقته الحركية ε. وأن حجم كرة نصف قطرها r في فراغ ذي n بُعد يعطى بالصيغة $V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!} r^n$، المطلوب:

1- أوجد (بدلالة المعطيات) عبارة الوزن الإحصائي للجملة W.

2- أوجد عبارة الأنتروبية.

3- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)\,\max}$ لتوزع فيرمي - ديراك في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

السؤال الثاني: أجب عن أحد البندين التاليين: (20 درجة).

1- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي لشحنة نقطية q معدوم ($div\,\vec{E} = 0$).

ثم برهن أنه يمكن كتابة الحقل الكهربائي بالصيغة $\vec{E} = -k\,q\,\overline{grad}\,\frac{1}{r}$

2- احسب الكمون V الناتج عن قرص دائري، نصف قطره R، مهمل السماكة، ويقع في المستوي (x,y)، إذا كان مشحوناً بشحنة سالبة q^-، موزعة عليه بكثافة سطحية σ منتظمة، وذلك في نقطة ما M من محوره، بحيث تبعد عن مركزه o مسافة z ثابتة. ثم احسب شدة الحقل $\vec{E}$ في هذه النقطة. (الرسم ضروري)

ناقش قيمتي الحقل $\vec{E}$ والكمون V في الحالتين $z = 0$ و $z >> R$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 7 / 9 / 2017

مدرس المقرر	د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة الإضافية (الصيفية) للعام الدراسي 2016 - 2017 (الدرجة العظمى: ثمانون)

أجوبة بنود السؤال الأول: (60 درجة).

-1 20

- حالات التوزع الماكروي: $N_o = \dfrac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \dfrac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$ 2

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U=\sum_i N_i\,\varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{ \underbrace{(3,0)}_{U=3kT}, \underbrace{(0,3)}_{U=6kT}, \underbrace{(2,1)}_{U=4kT}, \underbrace{(1,2)}_{U=5kT} \right\}$. 2

- نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha}\,g_i\,e^{\beta\varepsilon_i}}{e^{\alpha}\,g_j\,e^{\beta\varepsilon_j}} = \frac{g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT}}{g_j\,e^{-\varepsilon_j/KT}} \qquad \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1e^{-\frac{KT}{KT}}}{2e^{-\frac{2KT}{KT}}} = \frac{1}{2e^{-1}} = \frac{e}{2} > 1 \;\Rightarrow\; N_1 > N_2$$

والتوزع طبيعي 2

- تحاص الجملة: $Z = \sum_i g_i\,e^{-\varepsilon_i/KT} = e^{-1} + 2e^{-2}$ 1

تحاص الطاقم: $Z_\Omega = Z^N = (e^{-1}+2e^{-2})^3 = e^{-3} + 6e^{-4} + 12e^{-5} + 8e^{-6}$

نقارنه بالعبارة: $Z_\Omega = \sum_i W_i\,e^{-U_i/kT} = W_{(3,0)}e^{-3} + W_{(2,1)}e^{-4} + W_{(1,2)}e^{-5} + W_{(0,3)}e^{-6}$ 2

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

$W_{(3,0)}=1$ و $W_{(2,1)}=6$ و $W_{(1,2)}=12$ و $W_{(0,3)}=8$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة $(1,2)$ 2

- 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2}\dfrac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3!\left(\dfrac{1^1}{1!}\dfrac{2^2}{2!}\right) = 12$

B C | A	| B C A	B | C A	C | B A
A C | B	| A C B	A | C B	C | A B
A B | C	| A B C	A | B C	B | A C

3

2- الجسيمات بوزونات $W_{B-E} = \prod_{i=1}^{2}\dfrac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \dfrac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\,\dfrac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!} = 3$

●● | ●	| ●● ●	● | ● ●

3

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(1,2)$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{2}\dfrac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \dfrac{1!}{1!\,(1-1)!}\,\dfrac{2!}{2!\,(2-2)!} = 1$

● | ●   ●

3

20

:2

1- لدينا عدد الحالات الإجمالي التي يمكن أن يشغلها N جزيء هو $N!$ حالة. فيكون احتمال وقوع الجزيء في إحدى الحالات $\omega = 1/N!$. ويكون عدد الجسيمات المتوضعة في المجال الطاقي $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ هو $dN(\varepsilon)$.

فتكون صيغة عبارة الوزن الإحصائي للجملة W بالشكل التالي:

$$dW = \omega\, dN(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N!} = \frac{C\, d\Gamma(\varepsilon)}{N!} = \frac{dq_V\, dP_V}{h^{3N}\, N!} \qquad ; C = \frac{1}{h^{3N}}$$

بمكاملة الطرفين على أبعاد الفراغ الطوري المكون من $6N$ بُعد. منها $3N$ للحجم q_V و $3N$ للاندفاع P_V.

$$W = \int dW = \frac{\int_{3N} dq_V \int_{3N} dP_V}{h^{3N}\, N!} \qquad (a)$$

3

وبملاحظة أن التكامل الخاص بالحجم لجزيء واحد بثلاثة أبعاد هو $\int_3 dq_V = \int_3 dx\, dy\, dz = V$.

فيكون من أجل N جزيء

$$\int_{3N} dq_V = \left(\int_3 dx\, dy\, dz \right)^N = V^N \qquad (b)$$

3

أما التكامل الخاص باندفاع جزيء واحد (بثلاثة أبعاد)، وكما نعلم، فهو يساوي حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع ذاته. أي: $\int_3 dP_V = \frac{4}{3}\pi P^3$.

أما بالنسبة لـ N جزيء (ذي الـ $3N$ بعد خاص بالاندفاع)، فإننا نجد (اعتماداً على المعطيات) أن حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع في هذا الفراغ يعطى بالصيغة

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!} r^n \quad \Leftrightarrow \quad \int_{3N} dP_V \equiv V_{3N}(P) = \frac{\pi^{3N/2}}{(\frac{3N}{2})!} P^{3N} \qquad (c)$$

3

وبدلالة الطاقة الحركية المرتبطة بالاندفاع $P = m\vartheta$ بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \vartheta^2 = \frac{m^2 \vartheta^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad P = \sqrt{2m\varepsilon}$$

3

نعوض $P = \sqrt{2m\varepsilon}$ في (c)، ثم نعوض (b) و (c) في (a) نجد:

$$W = \frac{V^N}{h^{3N}\, N!} \frac{\pi^{3N/2}}{(\frac{3N}{2})!} \left(\sqrt{2m\varepsilon}\right)^{3N} = \frac{V^N}{h^{3N}\, N!} \frac{\left(\sqrt{2\pi m\varepsilon}\right)^{3N}}{(\frac{3N}{2})!} \qquad (d)$$

3

2- نوجد عبارة الأنتروبية من علاقة بولتزمان $S = K\, LnW$. فنجد من (d):

$$S = K\, LnW = K \left[Ln \frac{V^N}{h^{3N}\, N!} + Ln \frac{\left(\sqrt{2\pi m}\right)^{3N} \varepsilon^{3N/2}}{(\frac{3N}{2})!} \right]$$

$$S = K\, LnW = K \left[N\, LnV - N\, Ln h^3 - Ln N! + N\, Ln\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3 + \frac{3N}{2} Ln\varepsilon - Ln(\frac{3N}{2})! \right]$$

وباستخدام تقريب ستيرلنغ $Ln X! \approx X\, Ln X - X$ نجد:

$$S \approx K \left[N\, LnV - N\, Ln h^3 - N\, Ln N + N + N\, Ln\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3 + \frac{3N}{2} Ln\varepsilon - \frac{3N}{2} Ln(\frac{3N}{2}) + \frac{3N}{2} \right]$$

$$S \approx NK \left[\underline{LnV} - \underline{\underline{Ln h^3}} - \underline{Ln N} + 1 + \underline{\underline{Ln\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3}} + \underline{\underline{\frac{3}{2} Ln\varepsilon}} - \underline{\underline{\frac{3}{2} Ln(\frac{3N}{2})}} + \frac{3}{2} \right]$$

$$S \approx NK\left[Ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}Ln\frac{2\varepsilon}{3N} + Ln\frac{\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3}{h^3} + Ln\, e^{5/2} \right] \qquad ; \frac{5}{2} = Ln\, e^{5/2}$$

$$S \approx NK\left[Ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}Ln\frac{2\varepsilon}{3N} + Ln\frac{\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3 e^{5/2}}{h^3} \right]$$

5

يعبر الحدين الأول والثاني الواقعين داخل القوس عن متحولات الجملة (N,ε,V)، أما الحد الثالث فيعبر عن المقادير الثابتة.

20

:3

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!}$ 2

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i. أي $\boxed{g_i >> N_i}$.

2

نوجد بدايةً $Ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{F-D}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{F-D}) \approx Ln\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} = \sum_i \left[Ln\, g_i! - Ln\, N_i! - Ln(g_i - N_i)! \right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\, x! \approx x\, Ln\, x$ نجد:

$$Ln(W_{F-D}) \approx \sum_i \left[g_i Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i - g_i Ln(g_i - N_i) + N_i\, Ln(g_i - N_i) \right]$$

4

بما أن W_{F-D} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{F-D}) = \frac{\partial\, Ln(W_{F-D})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i \left[g_i Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i - g_i Ln(g_i - N_i) + N_i\, Ln(g_i - N_i) \right] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[-Ln\, N_i - 1 + \frac{g_i}{g_i - N_i} + Ln(g_i - N_i) - \frac{N_i}{g_i - N_i} \right] dN_i = \sum_i \left(Ln\frac{g_i - N_i}{N_i} - 1 + \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right) dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D}) \approx \sum_i Ln\frac{g_i - N_i}{N_i}\, dN_i$$

6

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i \qquad و \qquad U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0$$

$$\sum_i \left(Ln\frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta\varepsilon_i \right) dN_i = 0 \;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} + 1 \;\Rightarrow\; \boxed{N_{\substack{i(F-D)\\ \max}} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} + 1}}$$

6

أجوبة بنود السؤال الثاني: (20 درجة).

1: (اختياري)

20

- نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية q يعطى على بعد منها $\vec{r}$ بالعلاقة:

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{و} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{E} = kq\frac{x}{r^3}\vec{i} + kq\frac{y}{r^3}\vec{j} + kq\frac{z}{r^3}\vec{k}$$

5

نوجد حدود عبارة التفرق

$$div\ \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = kq\frac{r^3 - 3r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kqr^2\frac{x}{r}x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kqx^2}{r^5}$$

5

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد :

$$div\ \vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0$$

5

- نكتب العبارة الشعاعية للحقل بالشكل: $\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r} = kq\frac{\vec{r}}{r^3}$

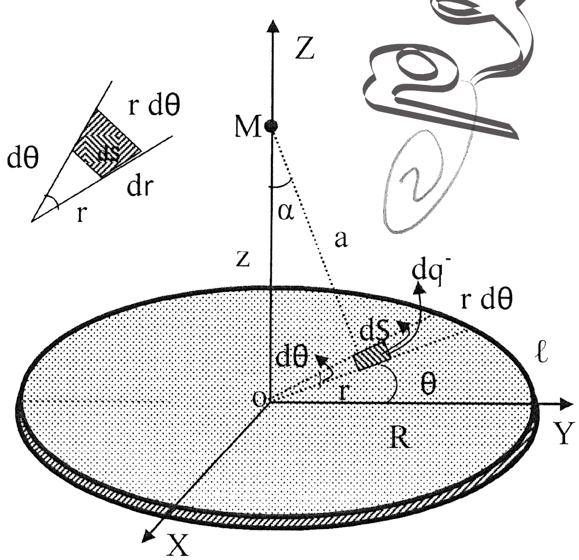
ثم نبرهن أن $\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ بالشكل التالي:

$$\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = \vec{\nabla}\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{0-\frac{x}{r}}{r^2}\vec{i} + \frac{0-\frac{y}{r}}{r^2}\vec{j} + \frac{0-\frac{z}{r}}{r^2}\vec{k} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

فنجد المطلوب $\vec{E} = -kq\,\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}$

2: (اختياري)

20



نحسب الكمون الناتج عن عنصر الشحنة dq^- المتوضع على عنصر المساحة dS (الشريحة) من القرص في النقطة M ، كما هو موضح في الشكل ، وفق العلاقة التالية .

$$dV = k\frac{dq}{a}$$

وبما أن $dS = r\,dr\,d\theta$. وبالأخذ بعين الاعتبار كثافة التوزع السطحي $dq = \sigma\,dS = \sigma\,r\,dr\,d\theta$

وبُعد النقطة M عن الشريحة $a = \sqrt{z^2+r^2}$

بالتعويض نجد :

$$dV = k\frac{\sigma\,r\,dr\,d\theta}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

5

وبالمكاملة على r في المجال $[0, R]$

وعلى θ في المجال $[0, 2\pi]$ نجد :

$$V = \int dV = k\sigma\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2+r^2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

نحل التكامل على r بتغيير المتحول ، حيث نفرض $u = z^2 + r^2 \Rightarrow du = 2r\,dr$ وبملاحظة التغير في حدود التكامل ، ونعوض عن k بقيمتها $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ فنجد :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int_{Z^2}^{Z^2+R^2}\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int_{Z^2}^{Z^2+R^2} d\sqrt{u} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[\sqrt{Z^2+R^2} - z\right]$$ (5)

نحسب شدة الحقل من عبارة التدرج

$$\left|\vec{E}\right| = -\left|\overrightarrow{grad}\,V\right| = -\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right]$$ (2)

عندما $z = 0$ نجد $V = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}R$ و $\left|\vec{E}\right| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$ (2)

و عندما $z >> R$ نُجري التقريب التالي

$$\sqrt{z^2+R^2} = z\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx z\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+\ldots\ldots\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+\ldots\right)$$

فنجد الكمون V

$$V \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} z\left[1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}-1\right] = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_o z}\frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{q}{z} = k\frac{q}{z}$$ (2)

حيث قمنا بالضرب والقسمة على π ، مع العلم أن $q = \sigma S = \sigma\pi R^2$ فنحصل بهذه الحالة على كمون شحنة نقطية q .

ونجد الحقل $\left|\vec{E}\right|$ بنفس الطريقة فنحصل على حقل شحنة نقطية كما يلي :

$$\left|\vec{E}\right| \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right] = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_o z^2}\frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{q}{z^2} = k\frac{q}{z^2}$$ (2)

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 - 2017

أجب عن أربعة فقط من الأسئلة التالية: (20 درجة لكل سؤال).

س1- جملة مكونة من 3 جسيمات متمايزة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$، متحللتين بالشكل: $g_1 = 2$ و $g_2 = 1$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{\hat{2}}, \overset{\varepsilon_2}{\hat{1}})$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متمايزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

س2- جملة مكونة من N جزيء نقطي متماثل (من غاز مثالي)، موضوعة في وعاء حجمه V، في الدرجة $T(k^o)$.
فإذا علمت أن كتلة كل جزيء m، وطاقته الحركية ε. وأن حجم كرة نصف قطرها r في فراغ ذي n بُعد يعطى بالصيغة $V_n(r) = \dfrac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!} r^n$، المطلوب:

1- أوجد (بدلالة المعطيات) عبارة الوزن الإحصائي للجملة W.
2- أوجد عبارة الأنتروبية.
3- استفد من معادلة الحالة للغاز المثالي $PV = NKT$ في الحصول على قيمة المقدار $T(\dfrac{\partial S}{\partial V})_{\varepsilon,N}$.

س3- عرف تابع فيرمي $f(\varepsilon)$، ومثّله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\varepsilon_f(T = 0k^o)$.
ثم مثّله في جوارها من أجل $T \neq 0$ (عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$).

- اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$.

س4- نُثبت في النقطتين $M_1(0,1)$ و $M_2(0,-1)$ من المستوي الديكارتي ذي المحاور المقدرة بالمتر شحنتين موجبة وسالبة على الترتيب ومتساويتين عدديا $|q_1^+| = |q_2^-| = 10^{-6}\ col$.
فإذا علمت أن قيمة ثابت التناسب الكولوني هي $k = 9\times10^9\ \dfrac{N\,m^2}{col^2}$، المطلوب:

1. ارسم الشكل ومثل عليه قوة كولون واحسب شدتها.
2. احسب شدات الحقول والحقل المحصل في النقطة $M_3(\sqrt{3}, 0)$ ومثلها جميعاً على الشكل.
3. احسب الكمون المحصل في M_3. واحسب الطاقة الكامنة لهذا التوزع.

س5- احسب الكمون V الناتج عن قرص دائري، نصف قطره R، مهمل السماكة، ويقع في المستوي (x,y)، إذا كان مشحوناً بشحنة موجبة q^+، موزعة عليه بكثافة سطحية σ منتظمة، وذلك في نقطة ما M من محوره، بحيث تبعد عن مركزه o مسافة z ثابتة. ثم احسب شدة الحقل $\bar{E}$ في هذه النقطة.
ناقش قيمتي الحقل $\bar{E}$ والكمون V في الحالتين $z = 0$ و $z >> R$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 18 / 7 / 2017

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات

لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 - 2017

(الدرجة العظمى: ثمانون)

جواب السؤال الأول: 20

- حالات التوزع الماكروي: $N_o = \dfrac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \dfrac{(3+2-1)!}{3!(2-1)!} = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة.

10

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{ \underbrace{(3,0)}_{U=3kT}, \underbrace{(0,3)}_{U=6kT}, \underbrace{(2,1)}_{U=4kT}, \underbrace{(1,2)}_{U=5kT} \right\}$

- تحاص الجملة: $Z = \sum_i g_i\, e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + e^{-2}$

تحاص الطاقم: $Z_\Omega = Z^N = (2e^{-1}+e^{-2})^3 = 8e^{-3} + 12e^{-4} + 6e^{-5} + e^{-6}$

نقارنه بالعبارة: $Z_\Omega = \sum_i W_i\, e^{-U_i/kT} = W_{(3,0)} e^{-3} + W_{(2,1)} e^{-4} + W_{(1,2)} e^{-5} + W_{(0,3)} e^{-6}$

1

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

$W_{(3,0)} = 8$ و $W_{(2,1)} = 12$ و $W_{(1,2)} = 6$ و $W_{(0,3)} = 1$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة $(2,1)$

- 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2} \dfrac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1)} = 3!\left(\dfrac{2^2}{2!}\,\dfrac{1^1}{1!}\right) = 12$

```
  A          A          A          A
BC|        |BC        B|C        C|B

  B          B          B          B
AC|        |AC        A|C        C|A

  C          C          C          C
AB|        |AB        A|B        B|A
```

2- الجسيمات بوزونات $W_{B-E} = \prod_{i=1}^{2} \dfrac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!} \Rightarrow W_{(2,1)} = \dfrac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!}\,\dfrac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!} = 3$

```
  •          •          •
••|        |••        •|•
```

9

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(2,1)$ تحقق الشرط $g_i \ge N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{2} \dfrac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \Rightarrow W_{(2,1)} = \dfrac{2!}{2!\,(2-2)!}\,\dfrac{1!}{1!\,(1-1)!} = 1$

```
  •
•|•
```

جواب السؤال الثاني: 20

1- لدينا عدد الحالات الإجمالي التي يمكن أن يشغلها N جزيء هو $N!$ حالة. فيكون احتمال وقوع الجزيء في إحدى الحالات $\omega = 1/N!$. ويكون عدد الجسيمات المتوضعة في المجال الطاقي $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ هو $dN(\varepsilon)$.

فتكون صيغة عبارة الوزن الإحصائي للجملة W بالشكل التالي:

$$dW = \omega\, dN(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N!} = \frac{C\, d\Gamma(\varepsilon)}{N!} = \frac{dq_V\, dP_V}{h^{3N}\, N!} \qquad ; C = \frac{1}{h^{3N}}$$

بمكاملة الطرفين على أبعاد الفراغ الطوري المكون من $6N$ بُعد. منها $3N$ للحجم q_V و $3N$ للإندفاع P_V.

$$W = \int dW = \frac{\int\limits_{3N} dq_V \int\limits_{3N} dP_V}{h^{3N}\, N!} \qquad \text{(a)}$$

101

وبملاحظة أن التكامل الخاص بالحجم لجزيء واحد بثلاثة أبعاد هو $\int\limits_{3} dq_V = \int\limits_{3} dx\,dy\,dz = V$.

فيكون من أجل N جزيء

$$\int\limits_{3N} dq_V = \left(\int\limits_{3} dx\,dy\,dz \right)^N = V^N \qquad \text{(b)}$$

أما التكامل الخاص باندفاع جزيء واحد (بثلاثة أبعاد)، وكما نعلم، فهو يساوي حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع ذاته. أي: $\int\limits_{3} dP_V = \frac{4}{3}\pi P^3$.

أما بالنسبة لـ N جزيء (ذي الـ $3N$ بُعد خاص بالاندفاع)، فإننا نجد (اعتماداً على المعطيات) أن حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع في هذا الفراغ يعطى بالصيغة

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!} r^n \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_{3N} dP_V \equiv V_{3N}(P) = \frac{\pi^{3N/2}}{(\frac{3N}{2})!} P^{3N} \qquad \text{(c)}$$

وبدلالة الطاقة الحركية المرتبطة بالاندفاع $P = m\vartheta$ بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \vartheta^2 = \frac{m^2 \vartheta^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} \ \Rightarrow\ P = \sqrt{2m\varepsilon}$$

نعوض $P = \sqrt{2m\varepsilon}$ في (c)، ثم نعوض (b) و (c) في (a) نجد:

$$W = \frac{V^N}{h^{3N}\, N!} \frac{\pi^{3N/2}}{(\frac{3N}{2})!} \left(\sqrt{2m\varepsilon}\right)^{3N} = \frac{V^N}{h^{3N}\, N!} \frac{\left(\sqrt{2\pi m\varepsilon}\right)^{3N}}{(\frac{3N}{2})!} \qquad \text{(d)}$$

7

2- نوجد عبارة الأنتروبية من علاقة بولتزمان $S = K\, LnW$. نجد من (d):

$$S = K\, LnW = K\left[Ln \frac{V^N}{h^{3N}\, N!} + Ln \frac{\left(\sqrt{2\pi m}\right)^{3N} \varepsilon^{3N/2}}{(\frac{3N}{2})!} \right]$$

$$S = K\, LnW = K\left[N\, LnV - N\, Ln\, h^3 - Ln N! + N\, Ln\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3 + \frac{3N}{2} Ln\varepsilon - Ln(\frac{3N}{2})! \right]$$

وباستخدام تقريب ستيرلنغ $Ln X! \approx X\, Ln X - X$ نجد:

$$S \approx K\left[N\, LnV - N\, Ln\, h^3 - N\, Ln N + N + N\, Ln\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3 + \frac{3N}{2} Ln\varepsilon - \frac{3N}{2} Ln(\frac{3N}{2}) + \frac{3N}{2} \right]$$

$$S \approx NK\left[\underline{LnV} - \underline{\underline{Ln\, h^3}} - \underline{Ln N} + 1 + \underline{\underline{Ln\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3}} + \underline{\frac{3}{2} Ln\varepsilon} - \underline{\frac{3}{2} Ln(\frac{3N}{2})} + \frac{3}{2} \right]$$

$$S \approx NK\left[Ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2} Ln\frac{2\varepsilon}{3N} + Ln\frac{\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3}{h^3} + Ln\, e^{5/2} \right] \qquad ;\ \frac{5}{2} = Ln\, e^{5/2}$$

$$\cancel{S \approx NK\left[Ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2} Ln\frac{2\varepsilon}{3N} + Ln\frac{\left(\sqrt{2\pi m}\right)^3 e^{5/2}}{h^3} \right]}$$

2

يعبر الحدين الأول والثاني الواقعين داخل القوس عن متحولات الجملة (N, ε, V)، أما الحد الثالث فيعبر عن المقادير الثابتة.

3- نوجد قيمة المقدار $T(\frac{\partial S}{\partial V})_{\varepsilon, N}$.

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{\varepsilon,N}=NKT\left(\frac{1/N}{V/N}\right)=\frac{NKT}{V}=P$$

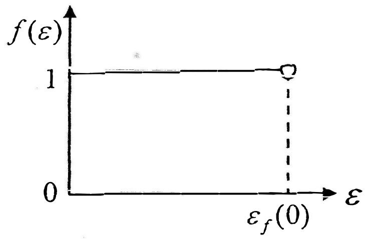
أي أنها تعبر عن الضغط.

جواب السؤال الثالث: 20

يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزع (فيرمي – ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon \to \varepsilon+d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \to g+dg)$ بالشكل :

$$dN=\frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{KT}}+1}=\frac{g(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{KT}}+1}=f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad ; f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{KT}}+1}$$

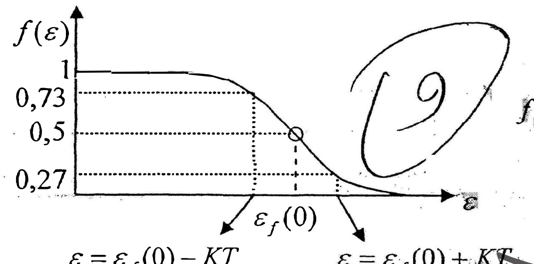
حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T=0k^o$ ، ونمثله بالشكل :



$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{KT}}+1}=\begin{cases}\frac{1}{e^{-\infty}+1}=1 & ;\ \varepsilon<\varepsilon_f\\ \frac{1}{e^{+\infty}+1}=0 & ;\ \varepsilon>\varepsilon_f\\ \frac{1}{e^{0/0}+1}=XX & ;\ \varepsilon=\varepsilon_f\end{cases}$$

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال [1 - 0].

وفي جوار سوية فيرمي، من أجل $T\neq 0$، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon=\varepsilon_f(0)\pm KT$.



$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f(0)}{KT}}+1}=\begin{cases}\frac{1}{e^{-1}+1}\approx 0,73 & ;\ \varepsilon=\varepsilon_f(0)-KT\\ \frac{1}{e^{0}+1}=0,5 & ;\ \varepsilon=\varepsilon_f(0)\\ \frac{1}{e^{+1}+1}\approx 0,27 & ;\ \varepsilon_f(0)+KT\end{cases}$$

- تعاريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(o)}$:

1- هي الطاقة الموافقة لتوزع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T=0k^o$

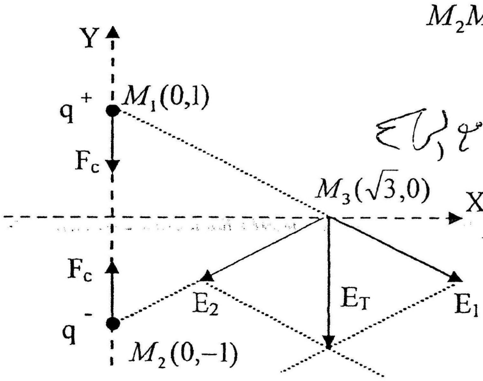
2- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T=0k^o$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i<\varepsilon_f^{(o)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i>\varepsilon_f^{(o)}$.

3- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon)=0,5$.

جواب السؤال الرابع: 20

قبل كل شيء نحسب المسافات غير المعلومة القيمة، فنجد من الشكل أن

$$M_2M_3\equiv r_2=2\ m \quad و \quad M_1M_3\equiv r_1=2\ m \quad و \quad M_1M_2\equiv r=2\ m$$



شكل (11)

1- تتجه قوة كولون نحو الداخل (حالة تجاذب) كما هو موضح بالشكل نحسب شدتها بتطبيق قانون كولون

$$F_c=k\frac{q_1q_2}{r^2}=9\times10^9\,\frac{10^{-12}}{2^2}=\frac{9}{4}\times10^{-3}\ N$$

2- تتجه الحقول الناتجة والحقل المحصل في M_3 كما هو موضح بالشكل. نحسب شداتها كما يلي

$$E_1(M_3)=k\frac{q_1}{r_1^2}=9\times10^9\,\frac{10^{-6}}{2^2}=\frac{9}{4}\times10^{+3}\ \frac{V}{m}$$

$$E_2(M_3) = k\frac{q_2}{r_2^2} = 9\times10^9\frac{10^{-6}}{2^2} = \frac{9}{4}\times10^{+3}\ \frac{V}{m}$$

نلاحظ أن شدتي الحقلين متساويتين في M_3. أي $E_1(M_3) = E_2(M_3)$

لحساب E_T المحصل، نلاحظ من الشكل أن المثلث $M_1M_2M_3$ متساوي الأضلاع فتكون زاويته الخارجية أي بين $(\hat{\vec{E}_1,\vec{E}_2}) = 120^o$. والمحصلة الشعاعية هي $\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. نوجد القيمة المطلقة بتربيع الطرفين

$$E_T^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2Cos120 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\,Cos(\pi-60)$$

$$= E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\,Cos60 = E_1^2 + E_1^2 - 2E_1E_1\frac{1}{2} = E_1^2 \qquad ;\ E_1(M_3) = E_2(M_3)$$

$$E_T = E_1 = \frac{9}{4}\times10^{+3}\ \frac{V}{m}$$

10

3- نحسب الكمون المحصل في M_3 بتطبيق العلاقة $V(M_3) = k\sum_i \frac{q_i}{r_i}$

$$V(M_3) = k\left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2}\right) = 0\ V$$

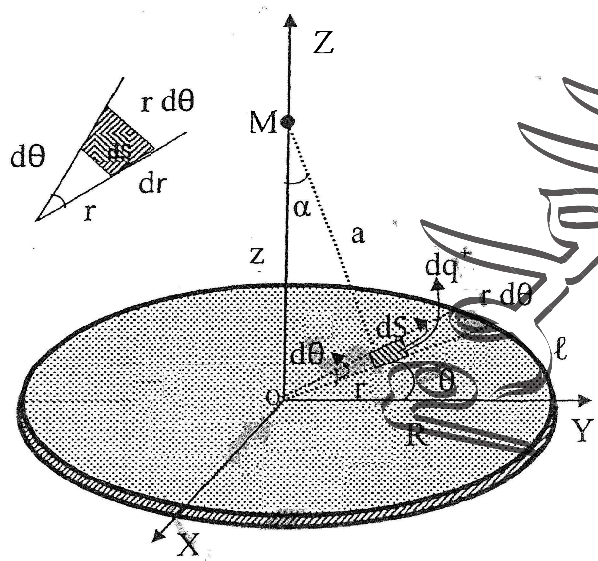
2

أما الطاقة الكامنة لهاتين الشحنتين $U = q^+V_{q^-} = q(-k\frac{q}{2}) = -k\frac{q^2}{2} = -\frac{9}{2}\times10^{-3}J$

جواب السؤال الخامس: 20

نحسب الكمون الناتج عن عنصر الشحنة dq^+ المتوضع على عنصر المساحة dS (الشريحة) من القرص في النقطة M ، كما هو موضح في الشكل ، وفق العلاقة التالية :

$$dV = k\frac{dq}{a}$$



وبما أن $dS = r\,dr\,d\theta$. وبالأخذ بعين الاعتبار كثافة التوزع السطحي $dq = \sigma\,dS = \sigma\,r\,dr\,d\theta$

وبُعد النقطة M عن الشريحة $a = \sqrt{z^2 + r^2}$

بالتعويض نجد :

$$dV = k\frac{\sigma\,r\,dr\,d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

وبالمكاملة على r في المجال $[0,R]$

وعلى θ في المجال $[0,2\pi]$ نجد :

$$V = \int dV = k\sigma\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

نحل التكامل على r بتغيير المتحول ، حيث نفرض $u = z^2 + r^2 \Rightarrow du = 2r\,dr$ وبملاحظة التغير في حدود التكامل ، ونعوض عن k بقيمتها $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ فنجد :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int_{z^2}^{z^2+R^2} d\sqrt{u} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[\sqrt{Z^2 + R^2} - z\right]$$

16

نحسب شدة الحقل من عبارة التدرج

$$\left|\vec{E}\right| = -\left|\overline{grad}\,V\right| = -\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right]$$

عندما $z=0$ نجد $V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}R$ و $\left|\vec{E}\right|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$

و عندما $R << z$ نُجري التقريب التالي

$$\sqrt{z^2+R^2} = z\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx z\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+......\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+....\right)$$

فنجد الكمون V

$$V \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}z\left[1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}-1\right] = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_o z}\frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{z} = k\frac{q}{z}$$

حيث قمنا بالضرب والقسمة على π ، مع العلم أن $q=\sigma S=\sigma\pi R^2$ فنحصل بهذه الحالة على كمون شحنة نقطية q .

ونجد الحقل $\left|\vec{E}\right|$ بنفس الطريقة فنحصل على حقل شحنة نقطية كما يلي :

$$\left|\vec{E}\right| \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right] = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_o z^2}\frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{z^2} = k\frac{q}{z^2}$$

ـة طرطوس
ـية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الأول للعام الدراسي 2016 - 2017

س1- أجب عن البنود التالية: (60 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)\,\max}$ لتوزع فيرمي - ديراك $(F\text{-}D)$، في الحالة الأكثر احتمال.

- جملة مكونة من N جسيم موزعة على سويتين للطاقة ε_1 و ε_2، متحللتين بالشكل: $g_1 = N$ و $g_2 = 2$

والمطلوب: أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2})$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

2- تُعبر الصيغة $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\vartheta)\, d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$، وفقاً لتوزع (M-B). والمطلوب:

- استنتج قيمة تابع التحاص التالية $Z = CV\,(2\pi m KT)^{3/2}$ في الحالة المستمرة بدلالة متحولات الجملة.

علماً أن $\int_0^\infty x^{1/2} e^{-x}\, dx = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

3- نثبت في رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $\ell\,(m)$، ثلاث شحنات متساوية القيمة، $q\,(co\ell)$ لكل منها، ومهملة الوزن.

1- إذا كانت الشحنات مختلفة الإشارة بحيث تكون واحدة موجبة واثنتين سالبتين. المطلوب:

- ارسم الشكل، ومثّل عليه اتجاه قوة كولون $\vec{F}_C$ المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ).
- مثّل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ)، وحدد اتجاه حركة كلٍ منها بعد إزالة التثبيت.

2- إذا كانت الشحنات الثلاث متساوية القيمة ومتفقة الإشارة (سالبة). والمطلوب:

- ارسم الشكل الجديد، ومثّل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها.
- أوجد قيمة الشحنة الموجبة الرابعة الواجب وضعها في مركز المثلث بحيث تبقى الشحنات في أماكنها بعد إزالة التثبيت.

س2- أجب عن واحد فقط مما يلي: (20 درجة).

1- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي لشحنة نقطية q معدوم ($div\,\vec{E} = 0$).

ثم برهن أنه يمكن كتابة الحقل الكهربائي بالصيغة $\vec{E} = -k\, q\, \overrightarrow{grad}\, \frac{1}{r}$

2- اشرح (مع الرسم) آلية تشكل القوة المحركة (الدافعة) الكهربائية التأثيرية في موصل يتحرك بسرعة $\vec{\vartheta}$ عمودياً على حقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$:

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 2017 / 2 / 4

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات

لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الأول للعام الدراسي 2016 - 2017

(الدرجة العظمى ثمانون)

60 درجة

جواب السؤال الأول:

20

1- ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (F-D) المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D}=\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i. أي $\boxed{g_i >> N_i}$.

نوجد بدايةً $Ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{F-D})\approx Ln\prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!}=\sum_i\left[Ln\,g_i!-Ln\,N_i!-Ln(g_i-N_i)!\right]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنغ $Ln\,x!\approx x\,Ln\,x$ نجد:

$$Ln(W_{F-D})\approx\sum_i\left[g_i Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_i Ln(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]$$

بما أن W_{F-D} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d\,Ln(W_{F-D})=\frac{\partial\,Ln(W_{F-D})}{\partial N_i}dN_i\approx\frac{\partial}{\partial N_i}\sum_i\left[g_i Ln\,g_i-N_i\,Ln\,N_i-g_i Ln(g_i-N_i)+N_i\,Ln(g_i-N_i)\right]dN_i$$

$$\approx\sum_i\left[-Ln\,N_i-1+\frac{g_i}{g_i-N_i}+Ln(g_i-N_i)-\frac{N_i}{g_i-N_i}\right]dN_i=\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}-1+\frac{g_i-N_i}{g_i-N_i}\right)dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})\approx\sum_i Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}\,dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U=\sum_i\varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU=\sum_i\varepsilon_i\,dN_i \quad و \quad N=\sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN=\sum_i dN_i$$

$$d\,Ln(W_{F-D})+\alpha\,dN+\beta\,dU=0$$

$$\sum_i\left(Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0\;\Rightarrow\;Ln\frac{g_i-N_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\;\Rightarrow\;\frac{g_i-N_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow\;\frac{g_i}{N_i}=e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1\;\Rightarrow\;\boxed{N_{\underset{max}{(F-D)}}=\frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1}}$$

وفي الحالة المستمرة يصبح عدد الفيرميونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ وفقاً لتوزع (F-D) بالشكل:

$$\boxed{N_{\underset{max}{(F-D)}}=\frac{g(\varepsilon)}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon)}+1}}$$

- 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(N-1,1)}=N!\left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\frac{2^1}{1!}\right)=2N^N$$

3

2- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E}=\prod_{i=1}^{2}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\;\Rightarrow W_{(N-1,1)}=\frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)!\,(N-1)!}\cdot\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}=2\,\frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$

3

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ تحقق الشرط $g_i\ge N_i$ فهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D}=\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i\,!}{N_i\,!\,(g_i-N_i)!}\Rightarrow W_{(N-1,1)}=\frac{N\,!}{(N-1)\,!\,(N-N+1)\,!}\,\frac{2!}{1!\,(2-1)!}=2N$$ 8

-2

- إيجاد قيمة Z في الحالة المستمرة بدلالة متحولات الجملة:

من عبارة تابع التحاص في الحالة المستمرة $Z=\int_0^\infty e^{\beta\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon$

بالاستفادة من العلاقة التي تربط درجة التحلل $g(\varepsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon=C\,d\Gamma(\varepsilon)=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}(\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon$$

وبالتعويض وإخراج المقدار الثابت $CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}$ خارج عبارة التكامل، نجد:

$$Z=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\,e^{\beta\varepsilon}\,d\varepsilon$$

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن قيمة $\beta<0$ حيث $\beta=-1/KT$ نجد:

$$Z=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\,e^{-\varepsilon/KT}\,d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x=\varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon=KT\,x\;\Rightarrow\;d\varepsilon=KT\,dx\qquad \&\qquad \varepsilon^{1/2}=(KT)^{1/2}x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$Z=CV\;2\pi\;(2m)^{3/2}(KT)^{1/2}\,KT\underbrace{\int_0^\infty x^{1/2}\,e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$Z=CV\,2\pi\,(2m)^{3/2}(KT)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow\boxed{Z=CV\,(2\pi\,m\,KT)^{3/2}}$$

- لدينا صيغة $dN(\vartheta)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$ بالشكل التالي:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}g(\vartheta)\,d\vartheta\qquad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التحاص

$$Z=CV\,(2\pi\,m\,kT)^{3/2}\qquad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p=m\vartheta\;\Rightarrow\;dp=m\,d\vartheta$$

$$g(\vartheta)\,d\vartheta=C\,d\Gamma(\vartheta)=C\,dq_V\,dp_V=CV\,4\pi\,p^2dp=CV\,4\pi\,m^3\vartheta^2d\vartheta\qquad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon=m\,\vartheta^2/2\qquad (c)$$

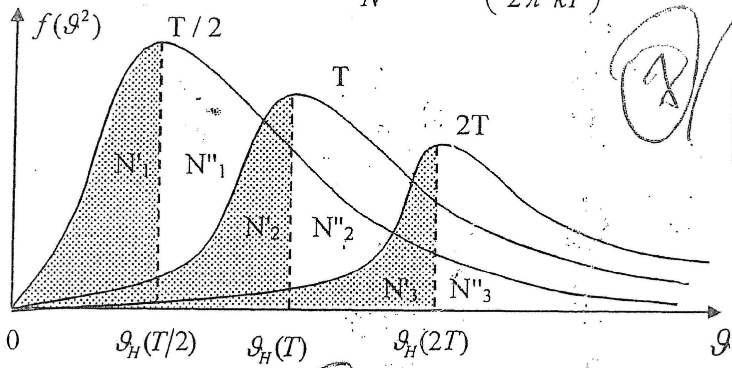
بتعويض العبارات (a) و(b) و(c) في (*)،

مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta=-1/kT$ نجد:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{CV\,(2\pi\,m\,kT)^{3/2}}\,e^{-m\vartheta^2/2kT}\,CV\,4\pi\,m^3\vartheta^2d\vartheta$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزع السرعة المطلقة لجسيم واحد ، بالشكل التالي :

$$dF(\vartheta) = \frac{dN(\vartheta)}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi\, kT}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-m\vartheta^2/2kT}\, d\vartheta = f(\vartheta^2)\, d\vartheta$$



و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

$$\boxed{dF(\vartheta) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}\, d\vartheta = f(\vartheta^2)\, d\vartheta}$$

- نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي :

<u>المناقشة والتفسير :</u>

<u>تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات</u>

$N = cte$ عند كل درجة حرارة .

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث $N = N' + N''$

حيث N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H .

و N'' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من ϑ_H .

حيث ϑ_H السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) ، (السرعة الأكثر احتمالاً).

<u>النتائج :</u>

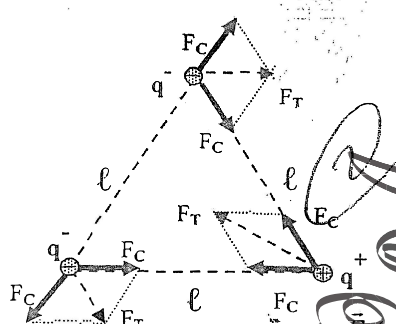
1- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات

2- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N'' على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$) .

3- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$.

-3

-1



- التمثيل موضح بالشكل، وهي تنافر بين الشحنتين السالبتين، وتجاذب بين الموجبة والسالبة. نحسب شداتها بتطبيق كولون

$F_C = k\dfrac{q^2}{\ell^2}$ وهي متساوية لجميع الشحنات .

- نمثل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة ، كما بالشكل :

نحسب شدة المحصلة المؤثرة في كل من الشحنتين السالبتين

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F^2{}_{C1} + F^2{}_{C1} + 2F^2{}_{C1}\, Cos(\pi - 60)}$$

$$\vec{F}_T(q^-) = F_{C1}\sqrt{2[1 - Cos(60)]} = F_{C1}\sqrt{2[1 - 0{,}5]} = F_{C1} = k\frac{q^2}{\ell^2}$$

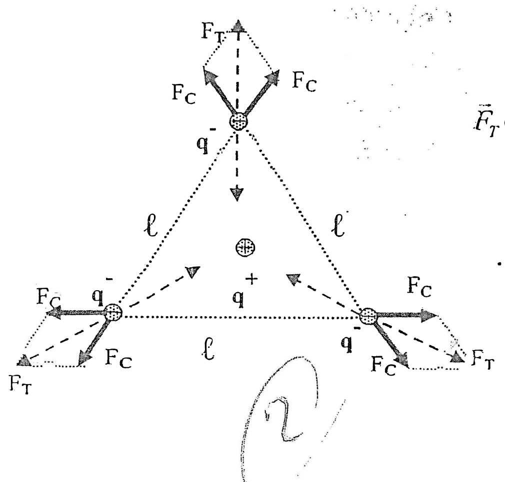
وهي تساوي الشدة المؤثرة في كلٍ منهما على حدة .

نحسب شدة المحصلة المؤثرة في الشحنة الموجبة بنفس الأسلوب

$$\vec{F}_T(q^+) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^+) = \sqrt{F^2{}_{C1} + F^2{}_{C1} + 2F^2{}_{C1}\, Cos(60)}$$

$$\vec{F}_T(q^+) = F_{C1}\sqrt{2[1 + Cos(60)]} = \sqrt{3}\, F_{C1} = \sqrt{3}\, k\frac{q^2}{\ell^2}$$

وهذا يعني أن كل شحنة ستتحرك وفق المحصلة $\vec{F}_T$ عند إزالة تثبيتها .



-2

- بدايةً نحسب محصلة قوى التدافع المؤثرة في كل من الشحنات السالبة، كما هو موضح بالشكل.

علماً أن قوة كولون المتبادلة بين كل شحنتين سالبتين هي $F_{C1}=k\frac{q^{-2}}{\ell^2}$

$$\vec F_T(q^-)=\vec F_{C1}+\vec F_{C2} \Rightarrow F_T(q^-)=\sqrt{F^2{}_{C1}+F^2{}_{C1}+2F^2{}_{C1}\,Cos(60)}$$

$$F_T(q^-)=\sqrt3\,F_{C1}=\sqrt3\,k\frac{(q^-)^2}{\ell^2}$$

2

تتوازن كل من الشحنات السالبة الثلاث مع الشحنة الموجبة المركزية بقوة تجاذب

$$F_{q^+q^-}=k\frac{q^-\,q^+}{x^2}=F_T(q^-)$$

أي أن $F_{q^+q^-}$ مساوية بالقيمة المطلقة ومعاكسة بالاتجاه للمحصلة $F_T(q^-)$. حيث x المسافة بين مركز المثلث وأحد رؤوسه وهي هندسياً تساوي ثلثي طول العامد (الارتفاع في المثلث) والمساوي بدوره لـ $\ell\,Cos\,30=\frac{\sqrt3}{2}\ell$. إذن $x=\frac23\ell\,Cos\,30=\frac{\sqrt3}{3}\ell$

بالتعويض والاختزال نحصل على قيمة q^+ بدلالة q^- كما يلي:

6

$$3k\frac{q^-\,q^+}{\ell^2}=\sqrt3\,k\frac{(q^-)^2}{\ell^2} \quad\Rightarrow\quad q^+=\frac{\sqrt3}{3}q^- \quad\Leftrightarrow\quad q^+<q^-$$

جواب السؤال الثاني: 20

1- (اختياري) 20

- نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية q يعطى على بعد منها $\vec r$ بالعلاقة:

$$\vec E=k\frac{q}{r^3}\vec r \quad;\quad \vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k \quad\text{و}\quad r=|\vec r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

2

$$\vec E=kq\frac{x}{r^3}\vec i+kq\frac{y}{r^3}\vec j+kq\frac{z}{r^3}\vec k$$

3

نوجد حدود عبارة التفرق

$$div\ \vec E=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

3

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=kq\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)=kq\frac{r^3-3r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6}=\frac{kq}{r^3}-\frac{3kq\,r^2\frac{x}{r}x}{r^6}=\frac{kq}{r^3}-\frac{3kq\,x^2}{r^5}$$

3

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد :

$$div\ \vec E=\frac{3kq}{r^3}-\frac{3kq\,(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=\frac{3kq}{r^3}-\frac{3kq}{r^3}=0$$

3

- نكتب العبارة الشعاعية للحقل بالشكل: $\vec E=k\frac{q}{r^3}\vec r=kq\frac{\vec r}{r^r}$

ثم نبرهن أن $\frac{\vec r}{r^3}=-\overrightarrow{grad}\frac1r$ بالشكل التالي:

$$\overrightarrow{grad}\frac1r=\vec\nabla\frac1r=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec i+\frac{\partial}{\partial y}\vec j+\frac{\partial}{\partial z}\vec k\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{0-\frac{x}{r}}{r^2}\vec i+\frac{0-\frac{y}{r}}{r^2}\vec j+\frac{0-\frac{z}{r}}{r^2}\vec k=-\frac{\vec r}{r^3}$$

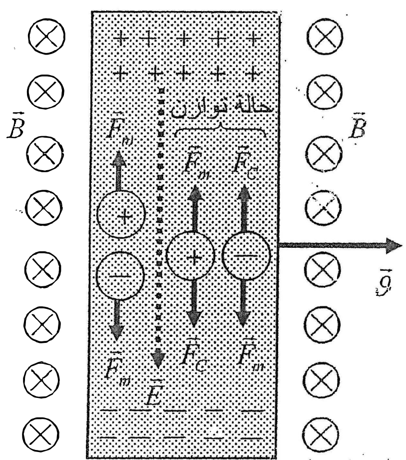
فنجد المطلوب $\vec E=-kq\,\overrightarrow{grad}\frac1r$

6

ختياري)

رض ناقل طوله ℓ يتحرك بسرعة $\vec{\vartheta}$ في حقل تحريض مغناطيسي ثابت $\vec{B} = cte$ يتجه نحو الداخل . كما هو موضح في الشكل . تكتسب الإلكترونات الحرة (الشحنات السالبة) سرعة الناقل $\vec{\vartheta}$ ، فتخضع لقوة مغناطيسية $\vec{F}_m = q(\vec{\vartheta} \wedge \vec{B})$ ، تتحدد جهتها حسب قاعدة اليد اليمنى . تتحرك الإلكترونات الحرة تحت تأثير $\vec{F}_m$ نحو الأسفل لتتراكم عند النهاية السفلى للناقل (مشكلةً القطب السالب) ، وبالتزامن تتحرك الثقوب (الأماكن التي هجرتها الإلكترونات الحرة) باعتبارها شحنات موجبة (مساوية بالقيمة العددية لشحنة الإلكترون ومعاكسة لها بالإشارة) نحو الأعلى لتتراكم عند النهاية العليا للناقل (مشكلةً القطب الموجب) .

يرافق تراكم الشحنات عند القطبين نشوء حقل كهربائي متنامي $\vec{E}$ يتجه من الشحنات الموجبة نحو السالبة ، الأمر الذي يؤدي لنشوء قوة كهربائية $\vec{F}_C = q\vec{E}$ متنامية ، تعاكس القوة المغناطيسية $\vec{F}_m$ بالاتجاه .



تستمر هجرة الشحنات باتجاه القطبين إلى الحد الذي تبلغ فيه شدة $\vec{E}$ قيمة كبيرة ، توافقها قوة كهربائية $\vec{F}_C$ مساوية ومعاكسة للقوة المغناطيسية $\vec{F}_m$ أي

$$\vec{F}_C = -\vec{F}_m \Rightarrow q\vec{E} = -q(\vec{\vartheta} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\vartheta} \wedge \vec{B}$$

عندئذٍ تتوقف هجرة الشحنات باتجاه القطبين (حالة توازن قوى) ، ونحصل على مدخرة مشحونة ، أو قوة محركة (دافعة) كهربائية تأثيرية . تبقى المدخرة مشحونة بالتأثير طالما بقيت متحركة بنفس السرعة $\vec{\vartheta}$ فإذا وصلنا قطبيها إلى مقاومة R نلاحظ سريان تيار كهربائي من القطب الموجب إلى السالب عبر R .

<u>ملاحظة :</u> عند حركة الناقل بسرعة $\vec{\vartheta}$ في حقول مغناطيسية $\vec{B}$ متناوبة (نحو الداخل والخارج) ، يحصل تناوب في نوع الشحنات المتجمعة عند الأقطاب ، وهو الأساس المستخدم في توليد التيار المتناوب .

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات

لطلاب السنة الثانية رياضيات - الدورة الإضافية للعام الدراسي 2015 - 2016

أجب عن السؤالين التاليين: (50 درجة).

س1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان (بدلالة مضروبي لاغرانج).

- جملة مكونة من N جسيم $(N >> 1)$ موزعة على سويتين للطاقة ε_1 و ε_2، متحللتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$

والمطلوب: أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2})$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

س2- تُعبر الصيغة $dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon} g(\vartheta_{x,y,z})\, d\vartheta_{x,y,z}$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر مركبات سرعها المطلقة وفق توزع M-B في المجالات $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$ ، $[\vartheta_y, \vartheta_y + d\vartheta_y]$ ، $[\vartheta_z, \vartheta_z + d\vartheta_z]$.

فإذا علمت أن الطاقة الإجمالية للجسيمات هي طاقة حركية، وأن قيمة تابع التحاص $Z = CV\,(2\pi mKT)^{3/2}$

وقيمة التكامل $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$، حيث $\alpha = m/2kT$. والمطلوب:

- أوجد عبارة عدد الجسيمات $dN(\vartheta_x)$ المتحركة وفق المحور ox، واستنتج عبارة تابع الكثافة $g(\vartheta_x)$.
- برهن أن تابع الكثافة $g(\vartheta_x)$ هو تابع كثافة احتمال.
- استفد من العبارة الحاصلة $dN(\vartheta_x)$ ومن تابع الخطأ $E_r(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2} dx$ في حساب عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور ox، التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N(0 \to \vartheta_0)$.

أجب عن واحد فقط من السؤالين التاليين: (30 درجة).

س3- تُثبت في رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $\ell\,(m)$، ثلاث شحنات متساوية القيمة، $q\,(col)$ لكل منها، ومهملة الوزن.

1- إذا كانت الشحنات مختلفة الإشارة بحيث تكون واحدة موجبة واثنتين سالبتين. المطلوب:

- ارسم الشكل، ومثّل عليه اتجاه قوة كولون $\vec{F}_C$ المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ).
- [illegible] قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة [illegible] (بدلالة q و k و ℓ) [illegible] اتجاه [illegible] بعد إزالة التثبيت.

2- إذا كانت الشحنات الثلاث متساوية القيمة ومتفقة الإشارة (سالبة). والمطلوب:

- ارسم الشكل الجديد، ومثّل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها.
- أوجد قيمة الشحنة الموجبة الرابعة الواجب وضعها في مركز المثلث بحيث تبقى الشحنات في أماكنها بعد إزالة التثبيت.

س4- احسب شدة واتجاه حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ الناتج عن سلك مستقيم لانهائي الطول عندما يمر فيه تيار شدته I وذلك في نقطة تبعد عنه مسافة x. وضح بالرسم اتجاه $\vec{B}$ الموافق للاتجاه الافتراضي للتيار.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 4 / 9 / 2016

6

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات

لطلاب السنة الثانية رياضيات - الدورة الإضافية للعام الدراسي 2015 - 2016

(الدرجة العظمى: ثمانون)

أجوبة الأسئلة الالزامية:

جواب السؤال الأول: (إلزامي) 25

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B) المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بداية $Ln(W_{M-B})$، ثم نوجد تفاضله $d\,Ln(W_{M-B})$، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \qquad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln\,N! + \sum_i \left[N_i\, Ln\, g_i - Ln\, N_i!\right]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln\,x! \approx x\,Ln\,x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكلٍ من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i}\left[N\,Ln\,N - N + \sum_i (N_i\, Ln\, g_i - N_i\, Ln\, N_i + N_i)\right] dN_i \qquad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln\, g_i - Ln\, N_i - 1 + 1)\, dN_i = \sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i$$

15

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \;\Rightarrow\; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i \qquad\qquad N = \sum_i N_i \;\Rightarrow\; dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln\frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i \left(Ln\frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \;\Rightarrow\; Ln\frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\varepsilon_i) \;\Rightarrow\; \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

$$\boxed{N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{N_{i(M-B)} = e^{\alpha}\, g_i\, e^{\beta\varepsilon_i}}$$

10

1- الجسيمات مميزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N!\prod_{i=1}^{2} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N!\left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{2^1}{1!}\right) = 2N$$

2

2- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^{M} \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(N-1+1-1)!}{(N-1)!\,(1-1)!}\,\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!} = 2$$

2

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة 1

7

25

جواب السؤال الثاني: (الزامي)

- تعيد كتابة العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعها المطلقة وفق توزع M-B في المجالات $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$ ، $[\vartheta_y, \vartheta_y + d\vartheta_y]$ ، $[\vartheta_z, \vartheta_z + d\vartheta_z]$ كما يلي:

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{Z}\ e^{\beta\varepsilon}\ g(\vartheta_{x,y,z})\ d\vartheta_{x,y,z} \qquad (1)$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (ox مثلاً). (أي لمعرفة $dN(\vartheta_x)$ التي تنحصر سرعها في المجال $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$)، نُعيد صياغة مفهوم عنصر فراغ الاندفاع الطوري بالشكل التالي:

$$d\Gamma(P_{x,y,z}) = dq_V . dP_V = V\, dP_x\, dP_y\, dP_z \qquad (2)$$

وبما أن $dP_x = m\, d\vartheta_x$ و $dP_y = m\, d\vartheta_y$ و $dP_z = m\, d\vartheta_z$

بالتعويض في (2) بعد استبدال مركبات الاندفاع بمركبات السرع

$$d\Gamma(\vartheta_{x,y,z}) = dq_V . dP_V = V\, m^3\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z$$

وبالعودة إلى العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري التي تصبح بالشكل التالي:

$$g(\vartheta_{x,y,z})\, d\vartheta_{x,y,z} = C\, d\Gamma(\vartheta_{x,y,z}) = CV\, m^3\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z \qquad (3)$$

5

وإذا اعتبرنا الطاقة الإجمالية طاقة حركية

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m\, \vartheta^2 = \frac{1}{2} m\, (\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2) \qquad (4)$$

وإذا أخذنا تابع التحاص لجسيم واحد

$$Z = CV\, (2\pi\, m KT)^{3/2} \qquad (5)$$

كما نأخذ مضروب لاغرانج بعين الاعتبار

$$\beta = -1/KT \qquad (6)$$

نعوض (3) و (4) و (5) و (6) في (1) نحصل على عدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعها المطلقة بالشكل التالي:

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{CV\, (2\pi m KT)^{3/2}}\, e^{-\frac{m}{2KT}(\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2)}\, CV\, m^3\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z$$

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x\ e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y\ e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (وليكن ox مثلاً) ندع مركبة سرعته دون تكامل.
ونكامل مركبات السرعة على المحورين الآخرين oy و oz في المجال $]-\infty, +\infty[$ كما يلي:

$$dN(\vartheta_x) = N\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z$$

6

نحل التكاملات باستخدام تكاملات بواسون وذلك بفرض $\alpha = m/2KT$ على النحو التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_y^0\, e^{-\alpha\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y = 2\int_{0}^{+\infty} \vartheta_y^0\, e^{-\alpha\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_z^0\, e^{-\alpha\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z = 2\int_{0}^{+\infty} \vartheta_z^0\, e^{-\alpha\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بالتعويض عن $\alpha = m/2KT$ وعن التكاملات بقيمها نجد:

$$\boxed{dN(\vartheta_x) = N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\pi}{\alpha}\, e^{-\alpha\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x = N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\ e^{-\alpha\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x}$$

4

للحصول على تابع توزع مركبة السرعة المطلقة ، نقسم الطرفين على N

$$dF(\vartheta_x)=\frac{dN(\vartheta_x)}{N}=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;e^{-\alpha\vartheta_x^2}\,d\vartheta_x=g(\vartheta_x)\,d\vartheta_x$$ 5

يمثل المقدار $g(\vartheta_x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;e^{-\alpha\vartheta_x^2}$ تابع كثافة غوص الطبيعي.

- للبرهان على أن تابع الكثافة $g(\vartheta_x)$ هو تابع كثافة احتمال. نتحقق من كونه يحقق الشرط الواحدي.

$$\int g(\vartheta_x)\,d\vartheta_x\overset{?}{=}1\;\Rightarrow\;\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x=2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x=2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}})=1$$ 5

- وجدنا أن عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي $dN_o(\vartheta_x)$ المتحركة وفق المحور ox، التي تقع سرعها المطلقة في المجال المحدد $[\vartheta_x,\vartheta_x+d\vartheta_x]$ يعطى بالعلاقة: $dN_o(\vartheta_x)=N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x$

لإيجاد العدد الواقع في المجال $N_o(0\rightarrow\vartheta_o)$ نكامل على المجال المذكور.

$$N_o(0\rightarrow\vartheta_o)=\int_0^{\vartheta_o}dN_o(\vartheta_x)=N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;\int_0^{\vartheta_o}e^{-\alpha\vartheta_x^2}d\vartheta_x$$

نفرض الوسيط x بالشكل التالي $x^2=\alpha\,\vartheta_x^2$، فيكون $\vartheta_x=x/\sqrt{\alpha}$ و $d\vartheta_x=dx/\sqrt{\alpha}$

أما حدود التكامل فتصبح: عندما $\vartheta_x=0$ فإن $x=0$، وعندما $\vartheta_x=\vartheta_o$ فإن $\boxed{x=\sqrt{\alpha}\;\vartheta_o}$

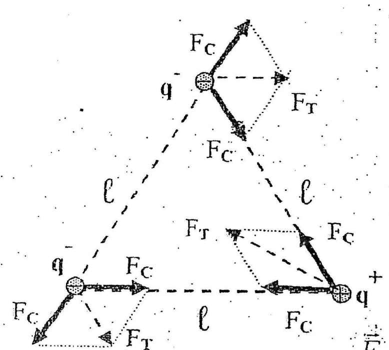
بالضرب والقسمة على 2 والتعويض نجد:

$$N_o(0\rightarrow\vartheta_o)=N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\;\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^x e^{-x^2}dx=\frac{N}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx\right]\Rightarrow\boxed{N_o(0\rightarrow\vartheta_o)=\frac{N}{2}E_r(x)}$$ 5

أجوبة الأسئلة الاختيارية:

جواب السؤال الثالث: (اختياري) 30

-1 15



- التمثيل موضح بالشكل، وهي تنافر بين الشحنتين السالبتين، وتجاذب بين الموجبة والسالبة. نحسب شداتها بتطبيق كولون وهي متساوية لجميع الشحنات $F_C=k\frac{q^2}{\ell^2}$. 5
- نمثل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، كما بالشكل. نحسب شدة المحصلة المؤثرة في كل من الشحنتين السالبتين

$$\vec F_T(q^-)=\vec F_{C1}+\vec F_{C2}\Rightarrow F_T(q^-)=\sqrt{F^2{}_{C1}+F^2{}_{C1}+2F^2{}_{C1}Cos(\pi-60)}$$

$$\vec F_T(q^-)=F_{C1}\sqrt{2[1-Cos(60)]}=F_{C1}\sqrt{2[1-0.5]}=F_{C1}=k\frac{q^2}{\ell^2}$$

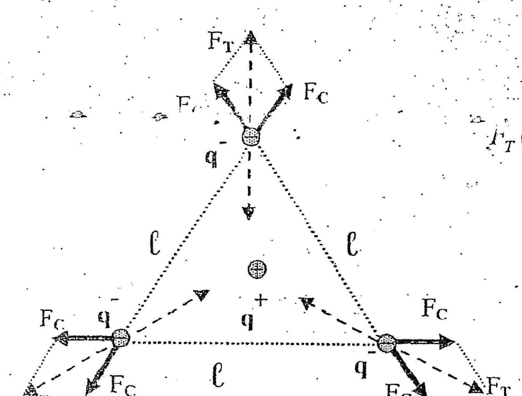
5 وهي تساوي الشدة المؤثرة في كلٍ منهما على حدة.

نحسب شدة المحصلة المؤثرة في الشحنة الموجبة بنفس الأسلوب

$$\vec F_T(q^+)=\vec F_{C1}+\vec F_{C2}\Rightarrow F_T(q^+)=\sqrt{F^2{}_{C1}+F^2{}_{C1}+2F^2{}_{C1}Cos(60)}$$

$$\vec F_T(q^+)=F_{C1}\sqrt{2[1+Cos(60)]}=\sqrt{3}\,F_{C1}=\sqrt{3}\,k\frac{q^2}{\ell^2}$$ 5

وهذا يعني أن كل شحنة ستتحرك وفق المحصلة $\vec F_T$ عند إزالة تثبيتها.



-2 15

- بدايةً نحسب محصلة قوى التدافع المؤثرة في كل من الشحنات السالبة، كما هو موضح بالشكل.

علماً أن قوة كولون المتبادلة بين كل شحنتين سالبتين هي $F_{C1}=k\frac{q^{-2}}{\ell^2}$ 5

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2015 - 2016

أجب عن مايلي: (20 درجة لكل سؤال).

س1- استنتج (بتطبيق قواعد العد) عبارة الوزن الإحصائي لتوزع مكسويل - بولتزمان W_{M-B}.

- جملة مكونة من 3 جسيمات موزعة على سويتين للطاقة ε_1 و ε_2، متحللتين بالشكل: $g_1=1$ و $g_2=2$

والمطلوب: أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overset{\varepsilon_1}{1}, \overset{\varepsilon_2}{2})$ في الحالات التالية:
1- الجسيمات متمايزة A و B و C.   2- الجسيمات بوزونات.   3- الجسيمات فيرميونات.

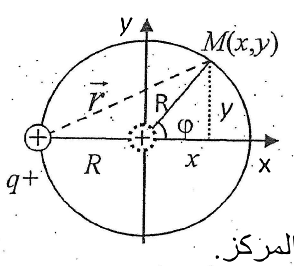
س2- تُعبر الصيغة $dN(\vartheta)=\dfrac{N}{Z}e^{\beta\varepsilon}g(\vartheta)\,d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$، وفقاً لتوزع (M-B). والمطلوب:

- استنتج قيمة تابع التحاص التالية $Z=CV\,(2\pi\, m\, KT)^{3/2}$ في الحالة المستمرة بدلالة متحولات الجملة.

علماً أن $\int_0^\infty x^{1/2}e^{-x}\,dx=\Gamma(\frac{3}{2})=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

- أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha=m/2kT$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

س3- أوجد ما يلي بدلالة k ثابتة كولون والشحنة q^+ ونصف قطر الدائرة R والزاوية φ الموضحة بالشكل



- شدة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ الناتج عن شحنة نقطية موجبة q^+ في نقطة ما $M(x,y)$ دارجة على محيط دائرة نصف قطرها R في الحالتين التاليتين.
(أولاً: q^+ على المحيط، ثانياً: q^+ في المركز).
- نفرض في الحالة أولاً (q^+ على المحيط) وجود شحنة مماثلة أخرى في M الدارجة على المحيط. والمطلوب:
احسب في هذه الحالة قوة كولون المتبادلة بين الشحنتين، واحسب الحقل المحصل في المركز.

س4- اشرح (مع الرسم) آلية تشكل القوة المحركة (الدافعة) الكهربائية التأثيرية في موصل يتحرك بسرعة $\vec{\vartheta}$ عمودياً على حقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$:

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 11 / 7 / 2016

مدرس المقرر   د. محمد ابراهيم

16

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2015 - 2016
(الدرجة العظمى: ثمانون)

جواب السؤال الأول: 20

نفرض جملة معزولة مكونة من N جسيم متمايز، موزعة على ε_i سوية طاقة متحللة، ودرجة تحلل كلٍ منها g_i .
تحوي السوية الواحدة على N_i جسيم (ندعوه رقم انشغال السوية). يجري التوزع بحيث يتحقق قانوني انحفاظ عدد الجسيمات $N=\sum_i N_i$ وطاقتها $U=\sum_i N_i\,\varepsilon_i$

بتطبيق قواعد العد:
يعطى عدد الحالات الميكروية الإجمالي w ، الناتج عن التوزع المسبق لـ N جسيم متمايز على M سوية (الموافق للحالة الماكروية) $(N_1,N_2,\ldots\ldots,N_i,\ldots\ldots,N_M)$ بالعلاقة:

$$w=\frac{N!}{\prod_{i=1}^{M}N_i!}$$

وبما أن السويات متحللة لطبقات (خلايا).
فمن أجل السوية i ، يعطى عدد حالات التوزع الميكروية w' ، الناتج عن توزع N_i جسيم متمايز على g_i خلية بالعلاقة:

$$w'=g_i^{N_i}.$$

ومن أجل كافة السويات $i\in[1,2,\ldots\ldots M]$ يصبح عدد حالات التوزع الميكروية w'' بالشكل:

$$w''=\prod_{i=1}^{M}g_i^{N_i}$$

فيكون العدد الإجمالي لحالات التوزع الميكروية (الوزن الإحصائي W) الموافق للحالة الماكروية - مسبقة التوزع - $(N_1,N_2,\ldots\ldots,N_i,\ldots\ldots,N_M)$ بالشكل التالي:

$$\boxed{W_{M-B}=w\,w''=N!\prod_{i=1}^{M}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}}$$

5

- 1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية) $W_{M-B}=N!\prod_{i=1}^{2}\frac{g_i^{N_i}}{N_i!}\Rightarrow W_{(1,2)}=3!\left(\frac{1^1}{1!}\frac{2^2}{2!}\right)=12$

B C |	| B C	B | C	C | B
A	A	A	A
A C |	| A C	A | C	C | A
B	B	B	B
A B |	| A B	A | B	B | A
C	C	C	C

10

2- الجسيمات بوزونات $W_{B-E}=\prod_{i=1}^{M}\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\quad\Rightarrow W_{(1,2)}=\frac{(1+1-1)!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!}=3$

●● |	| ●●	● | ●
●	●	●

3

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(1,2)$ تحقق الشرط $g_i\geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

12

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^{M} \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i - N_i)!} \quad \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{1!}{1!\,(1-1)!}\,\frac{2!}{2!\,(2-1)!} = 1$$

جواب السؤال الثاني: (٢٥)

- **إيجاد قيمة Z في الحالة المستمرة بدلالة متحولات الجملة:**

من عبارة تابع التحاص في الحالة المستمرة $Z = \int_0^{\infty} e^{\beta\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon$

بالاستفادة من العلاقة التي تربط درجة التحلل $g(\varepsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$

$$g(\varepsilon)\, d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon) = CV\, 2\pi\, (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

وبالتعويض وإخراج المقدار الثابت $CV\, 2\pi\, (2m)^{3/2}$ خارج عبارة التكامل، نجد:

$$Z = CV\, 2\pi\, (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2}\, e^{\beta\varepsilon}\, d\varepsilon$$

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن قيمة $\beta < 0$ حيث $\beta = -1/KT$ نجد:

$$Z = CV\, 2\pi\, (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2}\, e^{-\varepsilon/KT}\, d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT\, x \;\Rightarrow\; d\varepsilon = KT\, dx \qquad \wp \qquad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2}\, x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$Z = CV\; 2\pi\; (2m)^{3/2} (KT)^{1/2}\; KT \underbrace{\int_0^{\infty} x^{1/2}\, e^{-x}\, dx}_{\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$Z = CV\, 2\pi\, (2m)^{3/2} (KT)^{3/2}\, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{Z = CV\; (2\pi\, m\, KT)^{3/2}}$$

(١٥)

- لدينا صيغة $dN(\vartheta)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ بالشكل التالي:

$$dN(\vartheta) = \frac{N}{Z}\, e^{\beta\varepsilon}\, g(\vartheta)\, d\vartheta \qquad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التحاص

$$Z = CV\, (2\pi\, m\, kT)^{3/2} \qquad \text{(a)}$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p = m\vartheta \;\Rightarrow\; dp = m\, d\vartheta$$

$$g(\vartheta)\, d\vartheta = C\, d\Gamma(\vartheta) = C\, dq_V dp_V = CV\, 4\pi\, p^2 dp = CV\, 4\pi\, m^3 \vartheta^2 d\vartheta \qquad \text{(b)}$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon = m\,\vartheta^2/2 \qquad \text{(c)}$$

بتعويض العبارات (a) و(b) و(c) في (*)،

مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta = -1/kT$ نجد:

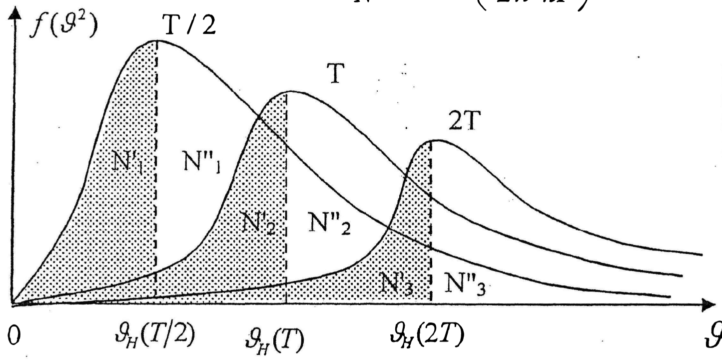
$$dN(\vartheta) = \frac{N}{CV\,(2\pi\, m\, kT)^{3/2}}\, e^{-m\vartheta^2/2kT}\; CV\, 4\pi\, m^3 \vartheta^2 d\vartheta$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزع السرعة المطلقة لجسيم واحد ، بالشكل التالي :

$$dF(\vartheta)=\frac{dN(\vartheta)}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi\ kT}\right)^{3/2}\vartheta^2\ e^{-m\vartheta^2/2kT}\ d\vartheta=f(\vartheta^2)\,d\vartheta$$

و بدلالة الثابت $\alpha=m/2kT$

$$\boxed{dF(\vartheta)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\ e^{-\alpha\vartheta^2}\ d\vartheta=f(\vartheta^2)\,d\vartheta}$$



- نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي :

المناقشة والتفسير :

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات N = cte عند كل درجة حرارة .

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث N = N' + N"

حيث N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H .

و N" عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من ϑ_H .

حيث ϑ_H السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) ، (السرعة الأكثر احتمالاً).

النتائج :

1- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات

2- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N" على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت (N = N' + N") .

3- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$.

جواب السؤال الثالث: 20

- حساب $\vec{E}$

أولاً: عندما q^+ على المحيط فتكون إحداثياتها $(-R,0)$ ، ومتجهة موضع النقطة $M(x,y)$

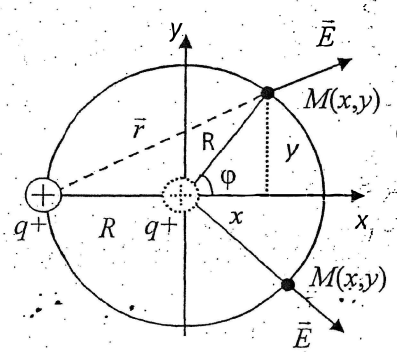
$$\vec{r}=[x-(-R)]\vec{i}+(y-0)\vec{j}$$

ومن الشكل نجد: $x=R\,Cos\varphi$ & $y=R\,Sin\varphi$

$$\vec{r}=(R\,Cos\varphi+R)\vec{i}+(R\,Sin\varphi-0)\vec{j}$$

$$r^2=(R\,Cos\varphi+R)^2+(R\,Sin\varphi)^2$$

$$r^2=2R^2(1+Cos\ \varphi)$$



شكل ( )

فتكون جهة الحقل كما هو موضح في الشكل ( ). وشدته:

$$E=k\frac{q}{r^2}=k\frac{q}{2R^2(1+Cos\ \varphi)}=\begin{cases}E_{\max}=\infty\ \ ;\ \varphi=\pi\\ E_{\min}=k\dfrac{q}{4R^2}\ \ ;\ \varphi=0\end{cases}$$

وهنا تكون الشدة متغيرة القيمة والاتجاه من نقطة لأخرى.

ثانياً: من أجل q^+ في المركز فإن $R=r$ ، ونحصل على شدة ثابتة القيمة متغيرة الاتجاه $E=k\dfrac{q}{R^2}$.

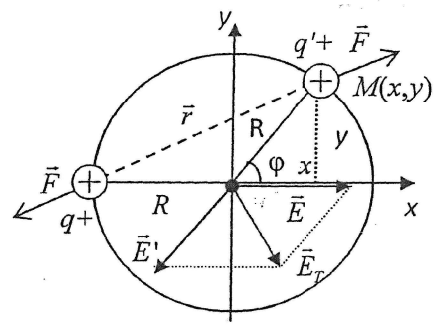
- لحساب قوة كولون المتبادلة، والحقل المحصل في المركز.

$$F=k\frac{q^2}{r^2}=k\frac{q^2}{2R^2(1+Cos\ \varphi)}=\begin{cases}F_{\max}=\infty\ \ ;\ \varphi=\pi\\ F_{\min}=k\dfrac{q^2}{4R^2}\ \ ;\ \varphi=0\end{cases}$$

15

نلاحظ من الشكل أن الزاوية بين الحقلين $(\widehat{\vec{E},\vec{E}'}) = \pi - \varphi$

وشدتا الحقلين في المركز متساويتين



شكل ( )

$$E = E' = k\frac{q}{R^2}$$

فتكون شدة الحقل المحصل $\vec{E}_T = \vec{E} + \vec{E}'$

$$E_T = \sqrt{E^2 + E'^2 + 2E\,E'\,Cos(\pi - \varphi)}$$

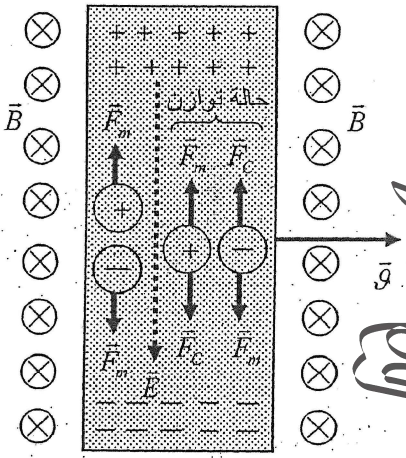
$$E_T = \sqrt{2E^2(1 - Cos\,\varphi)}$$

$$E_T = k\frac{q}{R^2}\sqrt{2(1-Cos\,\varphi)} = \begin{cases} 0 & ;\ \varphi = 0 \\ \sqrt{2}\,k\dfrac{q}{R^2} & ;\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ 2k\dfrac{q}{R^2} & ;\ \varphi = \pi \end{cases}$$

20

جواب السؤال الرابع:

نفرض ناقل طوله ℓ يتحرك بسرعة $\vec{\vartheta}$ في حقل تحريض مغناطيسي ثابت $\vec{B} = cte$ يتجه نحو الداخل . كما هو موضح في الشكل . تكتسب الإلكترونات الحرة (الشحنات السالبة) سرعة الناقل $\vec{\vartheta}$ ، فتخضع لقوة مغناطيسية $\vec{F}_m = q(\vec{\vartheta} \wedge \vec{B})$ ، تتحدد جهتها حسب قاعدة اليد اليمنى . تتحرك الإلكترونات الحرة تحت تأثير $\vec{F}_m$ نحو الأسفل لتتراكم عند النهاية السفلى للناقل (مشكلةً القطب السالب) ، وبالتزامن تتحرك الثقوب (الأماكن التي هجرتها الإلكترونات الحرة) باعتبارها شحنات موجبة (مساوية بالقيمة العددية لشحنة الإلكترون ومعاكسة لها بالإشارة) نحو الأعلى لتتراكم عند النهاية العليا للناقل (مشكلةً القطب الموجب) .



يرافق تراكم الشحنات عند القطبين نشوء حقل كهربائي متنامي $\vec{E}$ يتجه من الشحنات الموجبة نحو السالبة ، الأمر الذي يؤدي لنشوء قوة كهربائية متنامية ، تعاكس القوة المغناطيسية $\vec{F}_m$ بالاتجاه $\vec{F}_C = q\,\vec{E}$

تستمر هجرة الشحنات باتجاه القطبين إلى الحد الذي تبلغ فيه شدة $\vec{E}$ قيمة كبيرة ، توافقها قوة كهربائية $\vec{F}_C$ مساوية ومعاكسة للقوة المغناطيسية $\vec{F}_m$ أي

$$\vec{F}_C = -\vec{F}_m \Rightarrow q\,\vec{E} = -q(\vec{\vartheta} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\vartheta} \wedge \vec{B}$$

عندئذٍ تتوقف هجرة الشحنات باتجاه القطبين (حالة توازن قوى) ، ونحصل على مدخرة مشحونة ، أو قوة محركة (دافعة) كهربائية تأثيرية تبقى المدخرة مشحونة بالتأثير طالما بقيت متحركة بنفس السرعة $\vec{\vartheta}$

فإذا وصلنا قطبيها إلى مقاومة R نلاحظ سريان تيار كهربائي من القطب الموجب إلى السالب عبر R .

ملاحظة: عند حركة الناقل بسرعة $\vec{\vartheta}$ في حقول مغناطيسية $\vec{B}$ متناوبة (نحو الداخل والخارج) ، يحصل تناوب في نوع الشحنات المتجمعة عند الأقطاب ، وهو الأساس المستخدم في توليد التيار المتناوب .

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية بطرطوس
قسم الرياضيات

اسم الطالب :
الدرجة العظمى : ثمانون
مدة الامتحان : ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2013 - 2014

السؤال الأول استنتج باستخدام التقريبات المناسبة تابع كثافة توزع بواسون انطلاقاً من تابع كثافة برنولي (20 درجة)

السؤال الثاني استنتج عبارة توزع (M-B) في الحالة الأكثر احتمالاً (بدلالة مضاريب لاغرانج) (15 درجة)

السؤال الثالث أوجد عبارة الطاقة الوسطى لجسيم كلاسيكي بدلالة تابع التحاص ومشتقه بالنسبة لدرجة الحرارة (15 درجة)

السؤال الرابع يوزع جسيمان متمايزان A و B على مستويين للطاقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ و $\varepsilon_2 = 2\ \varepsilon_0$ متحللين ودرجة تحلل كل منهما $(g_1 = g_2 = 2)$ والمطلوب حساب عدد الحالات الماكروية الممكنة وطاقة كل منها وعدد الحالات الميكروية الموافقة لكل حالة توزع ماكروي ومثلها وأوجد الحالة الأكثر احتمالاً (15 درجة)

السؤال الخامس 1- استنتج معادلتا بواسون ولابلاس (15 درجة)
2- مثل قوة لابلاس المغناطيسية المؤثرة في وحدة الطول من سلكين لانهائيي الطول ومتوازيان عندما يمر بهما تياران كهربائيان متساويا الشدة في الحالتين
- التياران مختلفان في الجهة
- التياران متفقان في الجهة

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 20 / 1 / 2014

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام 2013 - 2014

ج1: لدينا تابع كثافة الاحتمال لبرنولي

120

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad (1) \; ; \; p+q=1$$

p احتمال ظهور حادثة فيزيائية ما n مرة من أصل N مرة.

q احتمال عدم الظهور والموافق $(N-n)$ مرة من أصل N مرة،

ونعتبر N مقدار حجم العينة المجهرية كبير جداً بالمقارنة مع n

أي أن $N \gg n$ وهذا يوافق $p \ll 1$ 5

• التقريب الموافق لـ $N \gg n$ مع علاقة التراجحية

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)\cancel{(N-n)!}}{n!\,\cancel{(N-n)!}}$$

$$\cong \frac{N \cdot N \cdot N \cdots N}{n!} = \frac{N^n}{n!} \quad (2)$$

5

• التقريب الموافق لـ $(p \ll 1 \Leftrightarrow N \gg n)$

$$\ln q^{N-n} = \ln(1-p)^{N-n} = (N-n)\ln(1-p) \simeq N\ln(1-p) \simeq -Np$$

إذاً $q^{N-n} \cong e^{-Np}$ (3) 5

بتعويض (2) و (3) في (1) نجد

$$\omega(n) \cong \frac{N^n}{n!} p^n e^{-Np}$$

$$\cong \frac{(Np)^n}{n!} e^{-Np} \quad ; \quad \text{نفرض} \begin{cases} a = Np \\ x = n \end{cases}$$

$$\omega(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$

5

وهو تابع كثافة بواسون

ويتميز بكون

$$\bar{X} = a$$

2 : من عبارة القانون الاحصائي للتوزيع (M-B)

$$W_{M\text{-}B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$$ 3 ثلاث درجات

$$\ln W = \ln N! + \sum_i (N_i \ln g_i - \ln N_i!)$$ 2 درجتان

وباستخدام تقريب ستيرلنج $\ln N! = N\ln N - N$ نجد

$$\ln W = N\ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i)$$ 2 درجتان

$$d\ln W = \sum \frac{\partial \ln W}{\partial N_i} dN_i$$

$$= \sum_i \left(\ln g_i - \ln N_i - \cancel{\frac{N_i}{N_i}} + \cancel{1}\right) dN_i$$

$$= \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i}\, dN_i$$ 2 درجتان

نضع شرطي الاتزان الحراري ف

درجتان 2 $$d\ln W + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0$$; $dN = \sum dN_i$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\varepsilon_i\right) dN_i = 0$$ 2 | $dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i$

$$\ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\varepsilon_i) \Rightarrow \boxed{N_i = g_i\, e^{\alpha + \beta\varepsilon_i}}$$ 2 درجتان

وهي عبارة التوزيع المطلوبة.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_i N_i \varepsilon_i}{\sum_i N_i} = \frac{\sum_i g_i \cancel{e^{\alpha}} e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}} \varepsilon_i}{\sum_i g_i \cancel{e^{\alpha}} e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}} = \frac{\sum g_i \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}}{Z}$$ 6

3 ع

15

مما أن $\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{KT^2} \sum_i g_i \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$; $Z = \sum g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$

$$\sum_i g_i \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}} = KT^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_V$$

6 ست درجات

بالتعويض نجد

$$\bar{\varepsilon} = \frac{KT^2}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_V \Rightarrow \bar{\varepsilon} = KT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial Z}\right)_V$$ 3 ثلاث

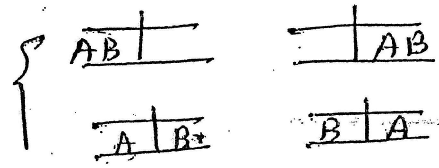
4) عدد الحالات الالكترونية : $N_p = \frac{(N+M(\epsilon)-1)!}{N!\,(N(\epsilon)-1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!} = 3$ (2) اثنان

$\boxed{15}$

نوجد عدد الحالات المكروية من W_{M-B} بالعلاقة $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$ (2) اثنان

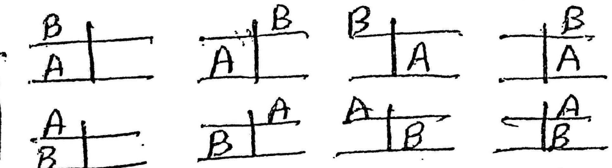
الماكروية

$(2,0) \Rightarrow W = 2!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^0}{0!}\right) = 4$



$U_{(2,0)} = 2\epsilon_0$ (3) ثلاث

$(1,1) \Rightarrow W = 2!\left(\frac{2^1}{1!}\,\frac{2^1}{1!}\right) = 8$



$U_{(1,1)} = 3\epsilon_0$ (3) ثلاث

$(0,2) \Rightarrow W = 2!\left(\frac{2^0}{0!}\,\frac{2^2}{2!}\right) = 4$

$U_{(0,2)} = 4\epsilon_0$ (3) ثلاث

الحالة الاكثر احتمالا هي (1,1) (2) اثنان

---

5) 1) نص نظرية اوستروغرادسكي - غوص : $\oiint \vec{E}\, d\vec{s} = \iiint_\tau div\, \vec{E}\, d\tau$ (2) اثنان

$\boxed{15}$

بالتعويض عن الطرف الايسر

$\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_\tau \rho\, d\tau = \iiint_\tau div\, \vec{E}\, d\tau$ الطرف الايمن

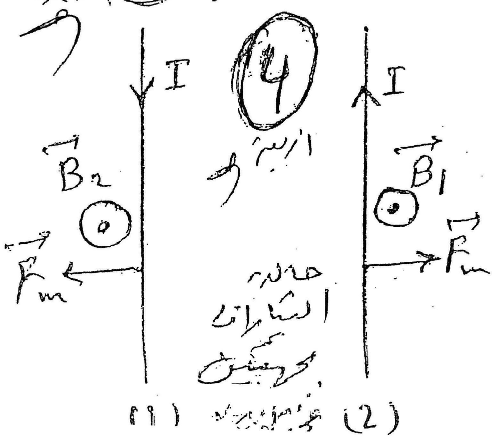
باختزال التكامل من الطرفين نجد

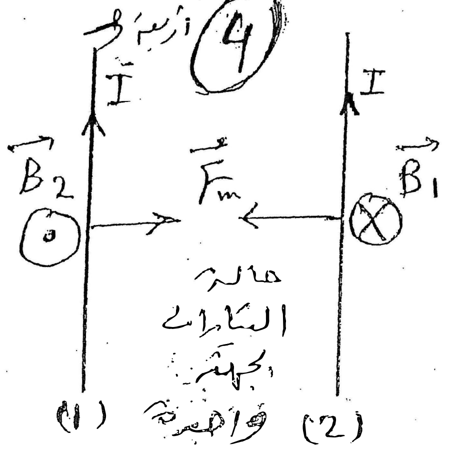
$div\, \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ وهي معادلة بواسون (2) اثنان

شكل آخر لبواسون $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ (1) واحدة حيث $\vec{E} = -grad\, V$ (1) واحدة باعتبار

معادلة لابلاس هي عندما $(\rho = 0) \Leftarrow \nabla^2 V = 0$ (1) واحدة

2) a





جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية بطرطوس
قسم الرياضيات

اسم الطالب :
الدرجة العظمى : ثمانون
مدة الامتحان : ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الدورة الصيفية للعام الدراسي 2012 - 2013

أجب عن مايلي

السؤال الأول : إذا علمت أن تابع كثافة توزع برنولي يعطى بالعلاقة

$\omega(n)=\binom{N}{n}P^n q^{N-n}$ والمطلوب : (20 درجة)

- برهن أن $\omega(n)$ تابع كثافة احتمال .
- أوجد قيمة المقادير الإحصائية التالية : $\overline{n}$ و $\overline{n^2}$ و $\overline{\Delta n^2}$

السؤال الثاني استنتج عبارة توزع (F-D) في الحالة الأكثر احتمالاً (بدلالة مضاريب لاغرانج) (15 درجة)

السؤال الثالث يوزع جسيمان متمايزان (A,B) على سويتين للطاقة $\varepsilon_1=\varepsilon_0$ و $\varepsilon_2=2\ \varepsilon_0$ متحللتين ودرجة تحلل كل منها ($g_1=2$, $g_2=1$) والمطلوب : (15 درجة)
أوجد الحالات الماكروية الممكنة , وطاقة كل منها , وعدد حالات التوزع الميكروية الموافقة لكل حالة توزع ماكروي , ومثلها , وأوجد الحالة الماكروية الأكثر احتمالاً .

السؤال الرابع نثبت شحنتين نقطيتين موجبتين و متساويتين بالقيمة المطلقة $q_1=q_2=10^{-6}\ c$ في رأسين متقابلين من مربع طول ضلعه متر واحد , والمطلوب : (15 درجة)
- ارسم الشكل ومثل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كلا الشحنتين واحسب شدتها .
- مثل اتجاهات الحقول والحقل المحصل واحسب شدتها في أحد الرأسين الآخرين .

لسؤال الخامس
(15 درجة)
- اكتب العبارتين الرياضيتين (مع الشرح المناسب) لكل من دعوى ستوكس ودعوى أوستراغرادسكي – غوص
- مثل قوة لابلاس المغناطيسية المؤثرة في وحدة الطول من سلكين لانهائيي الطول ومتوازيان عندما يمر بهما تياران كهربائيان متساويا الشدة في الحالتين
  - التياران مختلفان في الجهة
  - التياران متفقان في الجهة

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 27 / 8 / 2013

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

اجوبة امتحان مقرر الفيزياء الاحصائية

سنة ثانية رياضيات -1- الدورة الصيفية للعام 2013-2

ج1: ليكون $\omega(n)$ تابع كثافة احتمال يجب ان يحقق شرط الواحدية **20**

3 $\sum_{n=0}^{N} \omega(n) = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1^N = 1$

لأن p احتمال وقوع الحدث و q احتمال عدم وقوعه $p+q=1$

حساب $\bar{n}$: بالتعريف نجد $\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$

$(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ p: $N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n}$

نضرب الطرفين بـ p: $Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \bar{n}$ (1)

اذن $\bar{n} = Np$ ، $p+q=1$ 7

حساب $\bar{n^2}$: نشتق مرة ثانية بالنسبة لـ p فنجد (1)

$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^{N} n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n}$

وبضرب الطرفين بـ p نجد

$Np(p+q)^{N-1} + N(N-1)p^2(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^{N} n^2 \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \bar{n^2}$

$\bar{n^2} = Np + N(N-1)p^2$ ، $p+q=1$

$\bar{n^2} = Np + N^2p^2 - Np^2$ 7

حساب $\overline{\Delta n^2}$: بالتعريف

$\overline{\Delta n^2} = \bar{n^2} - \bar{n}^2$

$= Np + \cancel{N^2p^2} - Np^2 - \cancel{N^2p^2} = Np(1-p)$

$= Npq = \bar{n}\, q$ 3

1

1: عبارة الوزن الاحصائي لفيرمي - ديراك

$$W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i!\,(g_i-N_i)!} \quad (2)$$

$$\ln W_{F-D} = \sum_i \left[\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i-N_i)! \right]$$

وباستخدام تقريب ستيرلنج $\ln X! \approx X \ln X$ (2)

$$\ln W_{F-D} = \sum_i \left[g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i) \right]$$

$$d \ln W_{F-D} = \frac{\partial \ln W_{F-D}}{\partial N_i} dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i}\, dN_i \quad (3)$$

بالتعويض في شرط التوزيع الأكثر احتمالا (2)

$$d\ln W_{F-D} + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0$$

علما ان $dN = \sum_i dN_i$ ، $dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i$ (2)

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0$$

$$\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\varepsilon_i)$$

$$\frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} + 1 \Rightarrow N_i = \frac{g_i}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)} + 1} \quad (4)$$

3: عدد حالات التوزيع الالكتروني $\boxed{15}$

$$N_s = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!\,(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!} = \frac{3!}{2!} \Rightarrow 3$$

مرتبطة (2)

$$W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \quad (2)$$

وزن كل حالة و $U = \sum_i \varepsilon_i N_i$ نحسب طاقة كل الحالات (2)

$$W_{(2,0)} = 2!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{1^0}{0!}\right) = 4 \quad (3)$$

$\{$ AB| , |AB , A|B , B|A

$$U_{(2,0)} = 2\varepsilon_0$$

$$W_{(0,2)} = 2!\left(\frac{2^0}{0!}\,\frac{1^2}{2!}\right) = 1 \quad (3)$$

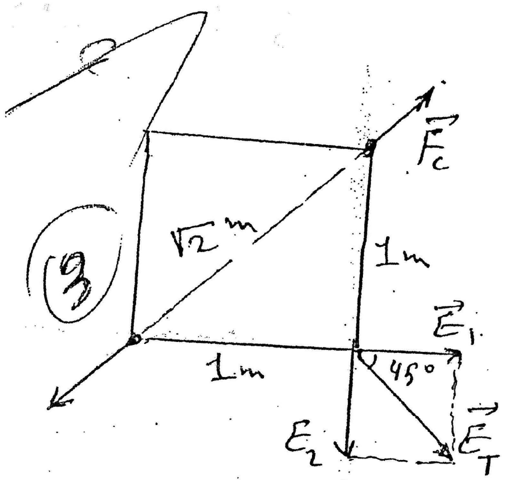
$\{$ AB / |

$$U_{(0,2)} = 4\varepsilon_0$$

$$W_{(1,1)} = 2!\left(\frac{2^1}{1!}\,\frac{1^1}{1!}\right) = 4$$

$\{$ B / A| , B / |A , A / B| , A / |B

2



3

$\boxed{15}$

$$F_c = K\frac{q_1 q_2}{r^2} \; ; \; r = \sqrt{2}\ m$$

$$= 9.10^9 \frac{10^{-6}.10^{-6}}{2} = \frac{9}{2}.10^{-3}\ N$$

وهي قوة تنافر كما بالشكل (4)

$$E_{q_1} = E_{q_2} = K\frac{q_1}{r^2} \; ; \; r = 1\ m$$

$$= 9.10^9 \frac{10^{-6}}{1} = 9.10^3\ V/m \quad (4)$$

الحقل المحصل

$$\vec{E_T} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

$$E_T^2 = E_1^2 + E_2^2 + \overbrace{2E_1E_2.\cos\frac{\pi}{2}}^{=0} = 2E_1^2$$

$$E_T = \sqrt{2}E_1 = 9\sqrt{2}.10^3\ V/m \quad (4)$$

---

5 ج

$\boxed{15}$

• دعوى استوكس :

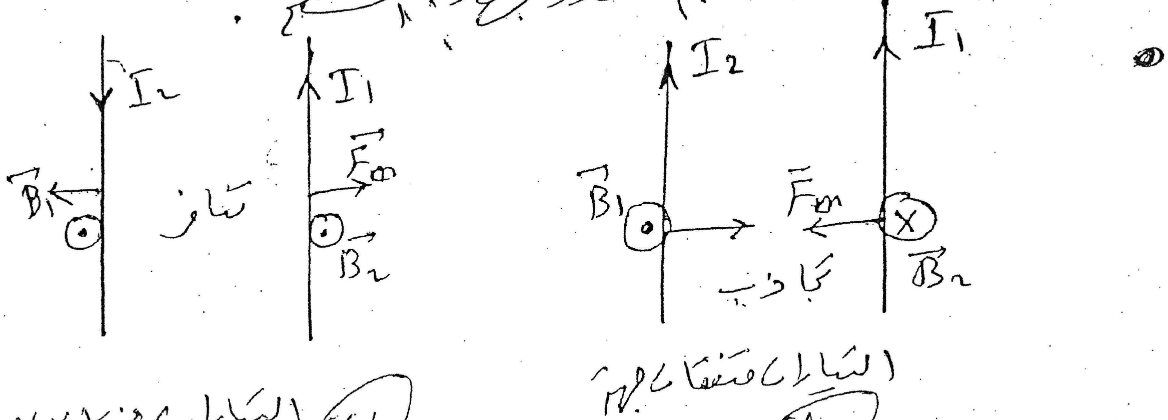
$$\oint_C \vec{E}\,d\vec{l} = \iint_S (rot\vec{E})_n\, d\vec{S}$$

جولان الحقل $\vec{E}$ على محيط مغلق C يساوي تدفق المركبة الناظمية لدوار هذا الحقل من خلال أي سطح مفتوح S يستند على المحيط المغلق C . (4)

• دعوى اوستراغرادسكي - غاوس

$$\oiint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \iiint_\tau (div\vec{E})_n\, d\tau$$

تدفق الحقل $\vec{E}$ من خلال سطح مغلق S يساوي التكامل الحجمي للمركبة الناظمية لتفرق الحقل خلال الحجم المحدود بهذا السطح . (3)



التيارات مختلفة الجهة (4)

التيارات متفقة الجهة (4)

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية بطرطوس
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2013 - 2012

أجب عن مايلي

السؤال الأول (20 درجة)
استنتج السرعات المميزة التالية ($\overline{\nu^2}, \overline{\nu}, \nu_H$) لتوزع (M-B) ومثلها بيانيا على تابع كثافة السرعة المطلقة بدلالة ν_H علما أن

$$\int_0^\infty \nu^3 e^{-\alpha\nu^2} d\nu = \frac{1}{2\alpha^2} \qquad \text{وان} \qquad \int_0^\infty \nu^4 e^{-\alpha\nu^2} d\nu = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

السؤال الثاني (20 درجة)
استنتج عبارة توزع (F-D) في الحالة الأكثر احتمالاً (بدلالة مضاريب لاغرانج)
- اكتب عبارة التوزع السابقة بدلالة سوية فيرمي واكتب الخطوات والشروط التي يتحول فيها توزع (F-D) إلى توزع (B-E)

السؤال الثالث (20 درجة)
يوزع ثلاث فيرميونات على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ و $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ متحللة ودرجة تحلل كل منها ($g_1 = g_2 = 2$) والمطلوب
إيجاد الحالات الماكروية الممكنة وطاقة كل منها وعدد الحالات الميكروية الموافقة لكل حالة توزع ماكروي ومثلها وأوجد الحالة الأكثر احتمالاً

السؤال الرابع (10 درجات)
نثبت شحنتين نقطيتين موجبتين و متساويتين بالقيمة المطلقة $q_1 = q_2 = 10^{-6}\ c$ في النقطتين $M_1(1,1)$ و $M_2(-1,1)$ من المستوي الديكارتي ذي المحاور المقدرة بالمتر والمطلوب :
- ارسم الشكل ومثل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كلا الشحنتين واحسب شدتها
- مثل اتجاهات الحقول والحقل المحصل واحسب شداتها في المبدأ

السؤال الخامس (10 درجات)
1- استنتج معادلتا بواسون ولابلاس
2- مثل قوة لابلاس المغناطيسية المؤثرة في وحدة الطول من سلكين لانهائيي الطول ومتوازيان عندما يمر بهما تياران كهربائيان متساويا الشدة في الحالتين
- التياران مختلفان في الجهة
- التياران متفقان في الجهة

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 10/ 1 /2013

مدرس المقرر
د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - سنة ثانية رياضيات

دورة الفصل الأول للعام 2012 - 2013 الدرجة العظمى

$\boxed{80}$

ج1 : $\boxed{20}$

• حساب v_H : (السرعة الأكثر احتمالاً) وهي السرعة الموافقة للنهاية العظمى لتابع الكثافة $f(v^2)$ ونجدها بجعل $\frac{\partial f(v^2)}{\partial v}=0$

حيث $f(v^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2}$

$$\frac{\partial f(v^2)}{\partial v}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left[2v e^{-\alpha v^2}-2\alpha v\, v^2 e^{-\alpha v^2}\right]=0$$

$$2v e^{-\alpha v^2}(1-\alpha v^2)=0 \Rightarrow$$ إما $v=0,\pm\infty$ غير مقبول

أو $1-\alpha v^2=0 \Rightarrow v_H=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\frac{2KT}{m}}$ ، $\alpha=\frac{m}{2KT}$ (6)

• حساب $\bar{v}$: (القيمة الوسطى للسرعة المطلقة) : نجد من تعريف القيمة الوسطى

$$\bar{v}=\int_0^\infty v f(v^2)\,dv=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2}dv}_{=\frac{1}{2\alpha^2}}$$

من تكاملات بواسون

$$\bar{v}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2\alpha^2}\right)$$

$$\bar{v}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}v_H=1{,}13\,v_H$$ (6)

• حساب $\overline{v^2}$: (القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة) : من تعريف القيمة الوسطى

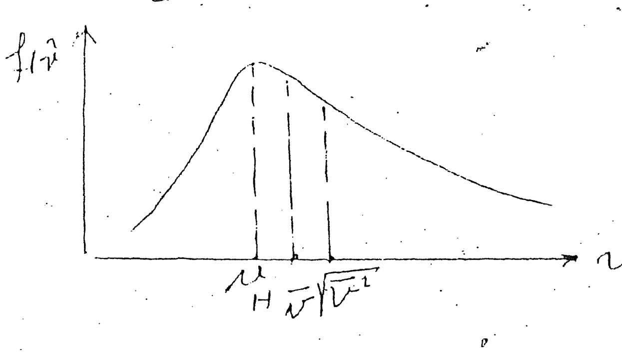
$$\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2 f(v^2)\,dv=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2}dv}_{=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}}$$

من تكاملات بواسون

$$\overline{v^2}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}\right)$$

$$\overline{v^2}=\frac{3}{2}v_H^2 \Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,v_H=1{,}22\,v_H$$ (6)

التمثيل البياني : بدلالة v_H



(2)

2 : ما عبارة الوزن الإحصائي لفيرمي - ديراك

20

$$W_{F-D}=\prod_i \frac{g_i!}{N_i!(g_i-N_i)!} \quad (2)$$

نجد باستخدام عبارة تقريب التقريب ستيرلنغ

$$\ln x! \simeq x\ln x \quad (1)$$

$$\ln W_{F-D}=\sum_i{}' [g_i\ln g_i - N_i\ln N_i - g_i \ln(g_i-N_i) + N_i\ln(g_i-N_i)]$$

وبالتفاضل

$$d\ln W_{F-D}=\sum_i \frac{\partial \ln W}{\partial N_i}dN_i=\sum_i \ln\frac{g_i-N_i}{N_i}dN_i \quad (5)$$

وبالتعويض في شرط التوزيع الأكثر احتمالاً

$$d\ln W+\alpha dN+\beta dU=0 \quad , \quad \begin{cases} dN=\sum dN_i \\ dU=\sum \varepsilon_i dN_i \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_i\left(\ln\frac{g_i-N_i}{N_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i\right)dN_i=0$$

$$\ln\frac{g_i-N_i}{N_i}=-(\alpha+\beta\varepsilon_i)\Rightarrow N_i=\frac{g_i}{e^{(\alpha+\beta\varepsilon_i)}+1} \quad (5)$$

وهي عبارة توزيع (F-D) في الحالة الأكثر احتمالاً.

• وبدلالة مستوى فيرمي نكتب مضاريب لاغرانج الثابتة

$$\alpha=\frac{\varepsilon_f}{KT} \quad \& \quad \beta=\frac{1}{KT}$$

بالتعويض $\Rightarrow N=\frac{g}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f}{KT}}+1}$ (2)

نلاحظ أن الجسيمات غاز فيرمي تخضع لتوزيع بوزه في حالة الطاقات العالية ($\varepsilon-\varepsilon_f=\varepsilon_0>>KT$) وبالتالي $e^{\frac{\varepsilon_0}{KT}}>>1$ (2) لذلك نهمل الواحد في مقام العبارة ونجد

$$N_{B-E}=\frac{g}{e^{\frac{\varepsilon_0}{KT}}}=g\,e^{-\frac{\varepsilon_0}{KT}} \quad (1)$$

توزيع بوزه - آينشتاين

ج 3 / 20

حالات التوزيع الماكروية الممكنة هي التي تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ (2)

ونحسب عدد الحالات المايكروية الموافقة لكل حالة توزيع ماكروي ممكنة باستخدام (عبارة الوزن الاحصائي لفيرمي ديراك)

$$W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i!(g_i-N_i)!} \quad \& \quad U = \sum_i N_i \varepsilon_i \quad (3)$$

الحالتان $(3,0)$ و $(0,3)$ غير ممكنتان لأن الشرط غير محقق (3)

الحالة الماكروية الأولى

$$(2,1)\begin{cases} g_1 \geq N_1 & \text{محققة} \\ g_2 \geq N_2 & \text{محققة} \end{cases} \Rightarrow W = \frac{2!}{2!(2-2)!}\cdot\frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$$

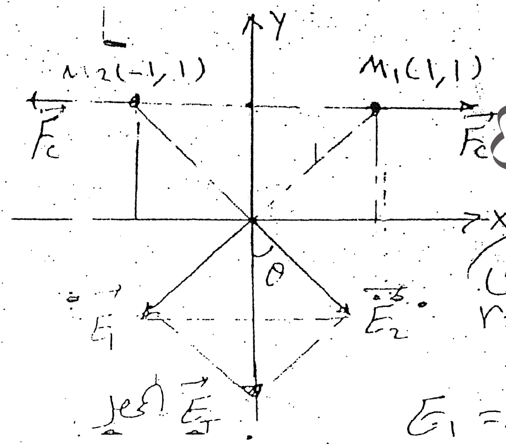
$$\Rightarrow U_{(2,1)} = 2\varepsilon_0 + 1(2\varepsilon_0) = 4\varepsilon_0 \quad (5)$$

$$(1,2)\begin{cases} g_1 \geq N_1 & \text{محققة} \\ g_2 \geq N_2 & \text{محققة} \end{cases} \Rightarrow W = \frac{2!}{1!(2-1)!}\cdot\frac{2!}{2!(2-2)!} = 2$$

$$\Rightarrow U_{(1,2)} = \varepsilon_0 + 2(2\varepsilon_0) = 5\varepsilon_0 \quad (5)$$

الحالة الأكثر احتمالية هي الحالة $(2,1)$ لأن طاقتها أقل من طاقة $(1,2)$ (2)

ج 4 / 10



قوة كولوم هي قوة تنافر لأن الشحنتين متشابهتين محمولة على المستقيم الواصل بينهما (4)

$$F_c = K\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9\cdot10^9\,\frac{10^{-6}\cdot10^{-6}}{(2)^2} = \frac{9}{4}\cdot10^{-3}\,N \quad (2)$$

بعد الشحنتان عن المبدأ O يساوي: $r=\sqrt{2}$

$$E_1 = E_2 = K\frac{q}{r^2} = 9\cdot10^9\,\frac{10^{-6}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{9}{2}\cdot10^3\,V/m \quad (2)$$

ومن الشكل نجد أن $\hat{\theta} = 45^\circ$ وبالتالي تكون شدة الحقل المحصل

$$E_T = 2E_1\cos\theta = 2\cdot\frac{9}{2}\cdot10^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{\sqrt{2}}\cdot10^3\,V/m \quad (2)$$

ج 5 : 1 - نظرية أوستروغرادسكي - غوص

$\boxed{10}$

$$\oiint \vec{E}\, d\vec{S} = \iiint_{\tau} div \vec{E}\, d\tau$$ 2

وحسب غوص

الطرف الأيمن $\iiint_{\tau} div \vec{E}\, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_{\tau} \rho\, d\tau = \frac{q}{\epsilon_0}$ الطرف الأيسر 2

باختزال التكامل من الطرفين نجد

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

وهي معادلة بواسون 1

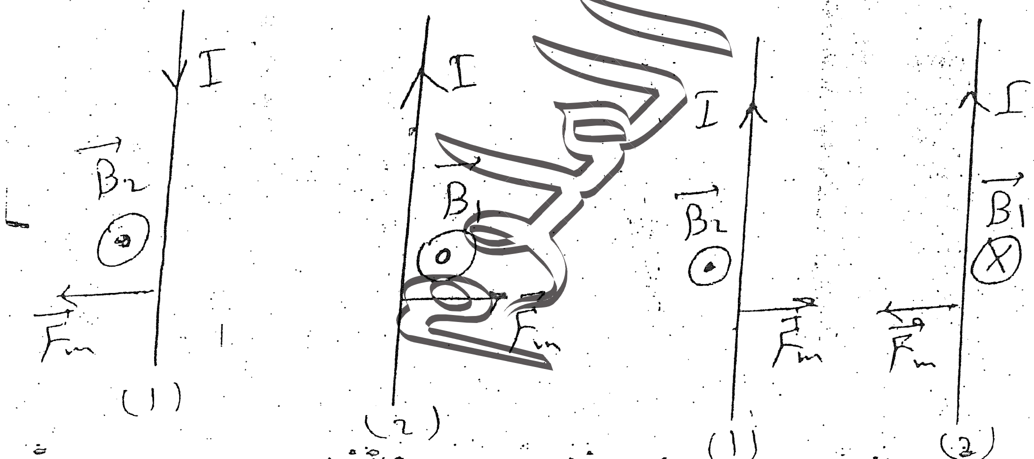
وبما أن $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$ نجد

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$$

وهي شكل آخر لبواسون

ومعادلة لابلاس عندما $\rho = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$ 1

2 -



التياران بجهتين مختلفتين 2

التياران بجهة واحدة 2

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني لعام 2011 - 2012

ج 1: لنبين أن تابع كثافة الاحتمال لبرنولي

$\boxed{20}$

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad (1) \;;\; p+q=1$$

p احتمال ظهور حادثة تجريبية ما n مرة من أصل N مرة

q احتمال عدم الظهور الموافق $(N-n)$ مرة من أصل N مرة

وبفرض N تعداد ذرات العينة كبير جداً بالمقارنة مع n

أي أن $N \gg n$ وهذا يوافق $p \ll 1$

5

(1) • التقريب الموافق لـ $N \gg n$ نجد من العلاقة التوافقية:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)(N-n)!}{n!(N-n)!}$$

$$\cong \frac{N\cdot N\cdot N\cdots N}{n!} = \frac{N^n}{n!} \quad (2)$$

5

• التقريب الموافق لـ $(N \gg n \Leftrightarrow p \ll 1)$

$$\ln q^{N-n} = \ln(1-p)^{N-n} = (N-n)\ln(1-p) \simeq N\ln(1-p) \simeq -Np$$

إذن $q^{N-n} \cong e^{-Np} \quad (3)$

5

(2) بتعويض (2) و (3) في (1) نجد

$$\omega(n) \cong \frac{N^n}{n!} p^n e^{-Np}$$

$$\cong \frac{(Np)^n}{n!} e^{-Np}$$; نفرض $\begin{cases} a = Np \\ x = n \end{cases}$

5

$$\omega(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$ وهو تابع كثافة بواسون

ويتميز بكون $\bar{x} = a$

2 : مع عبارة لقانون الاحصائي للتوزيع (M-B)

$\boxed{15}$

$$W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \quad (3)$$

$$\ln W = \ln N! + \sum_i (N_i \ln g_i - \ln N_i!) \quad (2)$$

وباستخدام تقريب ستيرلنج $\ln N! = N\ln N - N$ نجد

$$\ln W = N\ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \quad (2)$$

$$d\ln W = \sum \frac{\partial \ln W}{\partial N_i} dN_i$$

$$= \sum_i \left(\ln g_i - \ln N_i - \frac{N_i}{N_i} + 1\right) dN_i$$

$$= \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i}\, dN_i \quad (2)$$

نعوض بطريقة لاجرانج للمضاعفات نجد

$$(2)\quad d\ln W + \alpha\, dN + \beta\, dU = 0 \quad ; \quad dN = \sum_i dN_i$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta\varepsilon_i\right) dN_i = 0 \quad (2) \quad \Big| \; dU = \sum_i \varepsilon_i\, dN_i$$

$$\ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta\varepsilon_i) \Rightarrow \boxed{N_i = g_i e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}} \quad (2)$$

وهي عبارة التوزيع المطلوب.

---

3 ج

$\boxed{15}$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_i N_i\varepsilon_i}{\sum_i N_i} = \frac{\sum_i g_i e^{\alpha - \frac{\varepsilon_i}{kT}} \varepsilon_i}{\sum_i g_i e^{\alpha - \frac{\varepsilon_i}{kT}}} = \frac{\sum_i g_i \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}{Z} \quad (6)$$

نعلم أن $\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{kT^2} \sum_i g_i \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} \; ; \; Z = \sum_i g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}$

$$\sum_i g_i \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} = kT^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_V \quad (6)$$

بالتعويض نجد

$$\bar{\varepsilon} = \frac{kT^2}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_V \Rightarrow \bar{\varepsilon} = kT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial Z}\right)_V \quad (3)$$

$\frac{3}{20}$

(1) عدد حالات التوزيع المكروي

$$= \frac{(n+g-1)!}{n!\,(g-1)!}$$

$$\text{العدد} = \frac{(3+2-1)!}{3!\,(2-1)!} = 4$$

والحالات الماكروية هي (4) وطاقة كل حالة تحسب بالعلاقة

$$U = \sum n_i \varepsilon_i$$

$n_1 \quad n_2$

$(3,0) \Rightarrow U_{(3,0)} = 3(٤٠) + 0(٢٤٠) = ٣٤٠$

$(2,1) \Rightarrow U_{(2,1)} = 2(٤٠) + 1(٢٤٠) = ٤٤٠$

$(1,2) \Rightarrow U_{(1,2)} = 1(٤٠) + 2(٢٤٠) = ٥٤٠$

$(0,3) \Rightarrow U_{(0,3)} = 0(٤٠) + 3(٢٤٠) = ٦٤٠$

(2) لحساب عدد الحالات المكروية الموافقة لكل حالة ماكروية العدد

$$\text{العدد} = N! \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

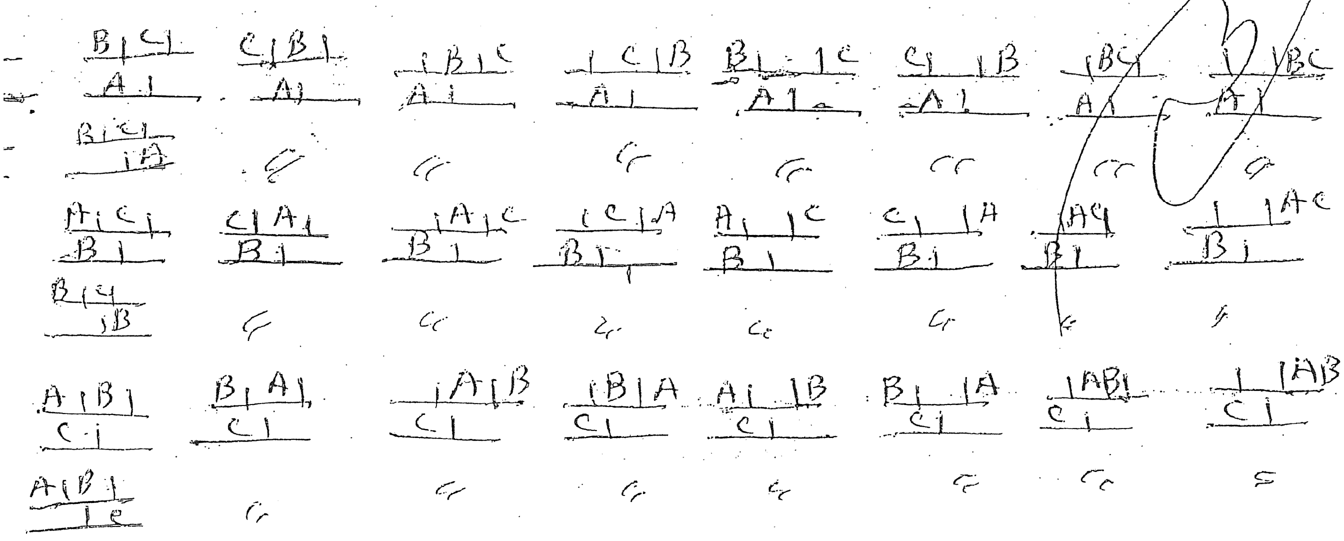
$(3,0) \Rightarrow \text{العدد} = 3!\left(\frac{2^3}{3!}\,\frac{3^0}{0!}\right) = 8$

$(2,1) \Rightarrow \text{العدد} = 3!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{3^1}{1!}\right) = 36$

$(1,2) \Rightarrow \text{العدد} = 3!\left(\frac{2^1}{1!}\,\frac{3^2}{2!}\right) = 54$

$(0,3) \Rightarrow \text{العدد} = 3!\left(\frac{2^0}{0!}\,\frac{3^3}{3!}\right) = 27$

(3) الحالة الماكروية الأكثر احتمالاً هي (1,2) وطاقتها ٥٤٠ وعدد حالاتها 54 حالة مكروية توزع بالشكل



ج4 : عدد الحالات الاكروية ② $\Omega = \frac{(N+N(\epsilon)-1)!}{N!\,(N(\epsilon)-1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!} = 3$

$\boxed{15}$

نوجد عدد الحالات المجهرية في W_{M-B} بالعلاقة ② $W_{M-B} = N!\prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

الحالة

$(2,0) \Rightarrow W = 2!\left(\frac{2^2}{2!}\,\frac{2^0}{0!}\right) = 4$ ③ $\left\{ \begin{array}{ll} AB| & |AB \\ A|B & B|A \end{array}\right.$

$U_{(2,0)} = 2\epsilon_0$

$(1,1) \Rightarrow W = 2!\left(\frac{2^1}{1!}\,\frac{2^1}{1!}\right) = 8$ ③ $\left\{ \begin{array}{llll} \frac{B}{A}| & \frac{A}{}|\frac{B}{} & \frac{B}{}|\frac{}{A} & |\frac{B}{A} \\ \frac{A}{B}| & \frac{B}{}|\frac{A}{} & \frac{A}{}|\frac{}{B} & |\frac{A}{B} \end{array}\right.$

$U_{(1,1)} = 3\epsilon_0$

$(0,2) \Rightarrow W = 2!\left(\frac{2^0}{0!}\,\frac{2^2}{2!}\right) = 4$ ③ $\left\{ AB| \quad A|B \quad B|A \quad |AB \right.$

$U_{(0,2)} = 4\epsilon_0$

(1) الحالة الأكثر احتمالاً هي $(1,1)$ ②

ج5 (1) من نظرية غاوس نعلم أن ② $\oint \vec{E}\,d\vec{s} = \iiint_\tau \mathrm{div}\,\vec{E}\,d\tau$

$\boxed{15}$

وبالمقارنة

(1) $\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_\tau \rho\, d\tau = \iiint \mathrm{div}\,\vec{E}\,d\tau$ بالطرف الأيمن

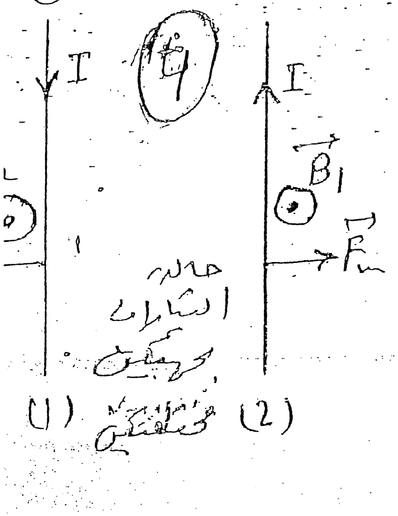
باختزال التكامل من الطرفين نجد

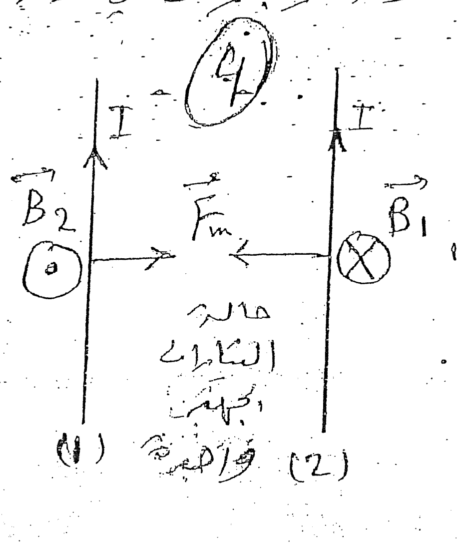
نجد معادلة بواسون $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ ②

وبما أن $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V$ ① نجد $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ ①

معادلة لابلاس في غياب الشحن $(\rho = 0) \Leftarrow$ ① $\nabla^2 V = 0$

(2) هـ





جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية بطرطوس
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات لطلاب السنة الثانية رياضيات
من مقررات الفصل الثاني للعام الدراسي 2010 - 2011 (الدورة الصيفية)

السؤال الأول إذا علمت أن تابع كثافة توزع مكسويل للسرعة المطلقة في الإحداثيات الكروية يعطى بالعلاقة (20 درجه)

$$f(v^2) = 4\pi\left(\frac{\propto}{\pi}\right)^{3/2} v^2\, e^{-\propto v^2} \quad , \quad \propto = \frac{m}{2kT}$$
والمطلوب

1- أوجد تابع كثافة التوزع السابق بدلالة الاندفاع المطلق $f(p^2)$ حيث $\vec{p} = m\vec{v}$

2- أوجد تابع كثافة التوزع السابق بدلالة الطاقة $f(\varepsilon)$ علماً أن $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$

3- أوجد القيمة الوسطى لطاقة جزيء واحد $\bar{\varepsilon}$ اعتماداً على $f(\varepsilon)$

4- بفرض $\bar{E} = N\bar{\varepsilon}$ الطاقة الوسطى ل N جسيم ،استنتج من المعادلة العامة للغازات المثالية معادلة برنولي (استفد من بواسون $\int_0^\infty x^4 e^{-\propto x^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\propto^5}}$)

السؤال الثاني استفد من شرط توحيد تابع كثافة جيبس في إيجاد تابع التحاص Z وبالتالي ψ بدلالة Z . ثم أوجد تابع تحاص N جزيء من الغاز المثالي Z_{id} بدلالة متحولات الجملة وعبر عن الضغط P بدلالة Z_{id} ومن ثم بدلالة متحولات الجملة (استفد من تكامل بواسون $\int_0^\infty x^2 e^{-\propto x^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\propto^3}}$) (20 درجه)

السؤال الثالث توزع 3 جسيمات A,B,C على مستويين للطاقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ و $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ متحللين ودرجة تحللهما $g_1 = 2$ و $g_2 = 3$ والمطلوب (20 درجه)

1- أوجد عدد حالات التوزع الماكروي وطاقة كل حالة

2- أوجد عدد حالات التوزع الميكروي الموافقة لكل حالة توزع ماكروي

3- أوجد الحالة الماكروية الأكثر احتمالاً ومثل حالاتها الميكروية الموافقة

السؤال الرابع 1- عرف الكمون الكهربائي لشحنة نقطية q في نقطة M تبعد عنها مسافة r ثم استنتج الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في هذا الموضع (20 درجه)

2- اكتب الصيغتين النظرية والرياضية لكل من دعوتي استوكس واوستراغرادسكي- غوص

انتهت الأسئلة

طرطوس في 20/ 8/ 2011
مع أمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر
د محمد ابراهيم

(1)

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات سنة 2 رياضيات

الدورة الصيفية لعام 2010 / 2011

ج 1 : 20 — (1) لنكتب تابع التوزع الاحتمالي للسرعة المطلقة بدلالة تابع الكثافة $f(v^2)$ عندئذ نحصل على الشكل

$$dw(v) = f(v^2)\,dv$$

$$dw(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}}\,dv \quad (*)$$

حيث $\vec{P} = m\vec{v} \Rightarrow d\vec{v} = \frac{dp}{m}$

$$dw(p) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \frac{p^2}{m^2} e^{-\frac{p^2}{2mKT}}\,\frac{dp}{m}$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2\pi mKT}\right)^{3/2} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mKT}}\,dp$$

5

وعليه فإن تابع الكثافة المطلوب

$$f(p) = 4\pi\left(\frac{1}{2\pi mKT}\right)^{3/2} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mKT}}$$

(2) بالعودة لتوزع ماكسويل الاحتمالي (العلاقة *)

$$dw(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}}\,dv$$

حيث $\varepsilon = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \Rightarrow dv = \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$

$$dw(\varepsilon) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \frac{2\varepsilon}{m} e^{-\frac{\varepsilon}{KT}}\,\frac{d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

$$= \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} e^{-\frac{\varepsilon}{KT}}\,d\varepsilon$$

5

وعليه فإن $f(\varepsilon) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\dots} e^{-\frac{\varepsilon}{KT}}$

ت- القيمة المتوسطة لطاقة جزيء الغاز /

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \Rightarrow$$ بالتعويض عن $f(\varepsilon)$ قيمته

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon\sqrt{\varepsilon}\, e^{-\frac{\varepsilon}{KT}}\, d\varepsilon$$

بالتعويض نجد

$$\left|\begin{array}{l} \sqrt{\varepsilon} = x \\ \varepsilon = x^2 \\ \varepsilon\sqrt{\varepsilon} = x^3 \\ d\varepsilon = 2x\, dx \end{array}\right.$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{x^2}{KT}}\, 2x\, dx \qquad \alpha = \frac{1}{KT}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}\, dx \qquad \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

وباستخدام التكامل من جدول التكاملات بالتعويض نجد

$$= \frac{3}{8}\sqrt{\pi (KT)^5}$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\,(\sqrt{KT})^5$$

$$= \frac{4}{\cancel{\sqrt{\pi}}\,\cancel{(\sqrt{KT})^3}} \cdot \frac{3}{\cancel{8}_{2}}\, \cancel{\sqrt{\pi}}\, (\sqrt{KT})^{\cancel{5}\,2}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} KT$$ وهي متوسط الطاقة الحركية لجزيء الغاز

4- بما أن $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} KT$ فإن الطاقة الكلية لـ N جزيء

$$\bar{E} = N\bar{\varepsilon}$$

$$= \frac{3}{2} N KT$$

واستخدام المعادلة العامة للغازات المثالية حيث $PV = NKT$ نجد

$$\bar{E} = \frac{3}{2} PV$$

$$\Rightarrow \boxed{PV = NKT = \frac{2}{3}\bar{E}}$$ وهي معادلة برنولي

التي تقول إن طاقة الغاز المثالي تساوي ثلثي طاقة الحركة

(3)

$\boxed{2c}$ $\boxed{2d}$

لدينا تابع كثافة الاحتمال لجيبس

$$\omega(x) = e^{\frac{\Psi - H}{\theta}}$$

حيث ان $H(X,a)$ و $\Psi(\theta,a)$

وباستخدام شرط النظامية

$$\int_\Gamma \omega(x)\,dx = 1$$

نخرج $\Psi(\theta,a)$ خارج التكامل كونه غير تابع للمتحول X فنجد

$$e^{\frac{\Psi}{\theta}}\int_\Gamma e^{-\frac{H}{\theta}}\,dx = 1 \Rightarrow \frac{\Psi}{\theta} + \ln\int_\Gamma e^{-\frac{H}{\theta}}\,dx = 0$$

نفرض تابع التكامل

$$\boxed{Z = \int_\Gamma e^{-\frac{H}{\theta}}\,dx}$$

فنجد

$$\boxed{\Psi = -\theta \ln Z}$$

حيث Z [illegible]

من اجل [illegible] جزيء [illegible] تابع التكامل

$$Z = \frac{1}{N!}\left[\int_\Gamma e^{-\frac{H}{\theta}}\,dx\right]^N$$

من اجل الغاز المثالي [illegible] الطاقة الكلية هي حركية فقط

$$H = \frac{p^2}{2m} + V, \quad V = 0$$

$$Z_{id} = \frac{1}{N!}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2m\theta}}\,dp \int e^{-\frac{V(r)}{\theta}}\,dr\right]^N$$

$V(r)$ [illegible]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{0}\,dv = \int dr = V$$

الحجم

$$Z_{id} = \frac{1}{N!}\left[4\pi\int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{2m\theta}}\,p^2\,dp \cdot V\right]^N$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}, \quad \alpha = \frac{1}{2m\theta}$$

$$\boxed{Z_{id} = \frac{1}{N!}\left[4\pi\left(\frac{1}{4}\sqrt{\pi(2m\theta)^3}\right)\cdot V\right]^N = \frac{1}{N!}(2\pi m\theta)^{\frac{3N}{2}}\cdot V^N}$$

وهو تابع تكامل [illegible] جزيء غاز مثالي [illegible] حيث $\theta = KT$

[illegible] $\Psi(\theta, a)$ وبما ان الحجم $V = a \cdot a^2$

$$\Psi(\theta, V) \equiv \Psi(\theta, a, a^2) \Rightarrow \Psi = -\theta \ln Z$$

(4)

20

س ① الجهد الكهربائي للشحنة q هو العمل اللازم لنقل وحدة الشحنة الموجبة q_0 تحت تأثير حقل q من اللانهاية إلى النقطة المعتبرة M التي تبعد عن q مسافة r والتي [illegible] نقطة الشحنة q

$$V = \frac{\varepsilon}{q_0} = \frac{K\frac{q q_0}{r}}{q_0} = K\frac{q}{r}$$

5

ما الحقل هو مشتق ما الجهد

5

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{\partial}{\partial r}\left(K\frac{q}{r}\right) = Kq\frac{1}{r^2} = K\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

② دعوى استوكس

$$\oint \vec{A}\,d\vec{l} = \iint_S (rot\,\vec{A})_n\,d\vec{s}$$

جولان $\vec{A}$ على منحني مغلق c يساوي تدفق دوار الشعاع $\vec{A}$ من خلال السطح المحدود بـ c

5

دعوى استروغرادسكي - غاوس

$$\oiint_S \vec{A}\,d\vec{s} = \iiint_V div\,\vec{A}\,dv$$

5

تدفق $\vec{A}$ من خلال سطح S مغلق يساوي تكامل تباعد $\vec{A}$ من خلال الحجم V المحدود بالسطح

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

مع التمنيات

بالتوفيق والنجاح

مكتبة

A to Z

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ