ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

اسئلة دورات محلولة

معادلات تفاضلية جزئية

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية
للعام الدراسي 2024-2025

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. مسألة القيم الحدية الابتدائية
2. معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الثانية زائدية
3. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_t = 2u_{xx} \quad ; \quad u(0,t) = u(5,t) = 0, \quad u(x,0) = 10\sin 4\pi x$$

ثانياً: بفرض لدينا خيط مرن مشدود (كثافته ثابتة ρ) وموضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايتيه اليسارية L و اليمينية R . نهز الخيط في نهايته L عندها نلاحظ موجة تعبر هذا الخيط. استنتج (مع الشرح) النموذج الرياضي الذي يصف الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x واللحظة t .

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً: أوجد حل المعادلة التفاضلية $xu_x + yu_y = xe^{-u}$

المحقق للشرط $u(x,x^2) = 0$

ثانياً: باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$$
$$u(0,y) = f(y)$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

السؤال الأول : أولاً : ١- مسألة القيم الحدية الابتدائية تتألف من معادلة تفاضلية مزودة بشروط حدية (قيمة التابع أو مشتقاته عند الحدود) ويكون عدد الشروط الحدية حسب أعلى رتبة لمشتق التابع بالنسبة للمتغير x ومزودة بشروط ابتدائية يكون عددها حسب رتبة مشتق التابع بالنسبة للزمن.

2 - معادلة من الشكل

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

وتحقق

$$B^2 - 4AC > 0$$

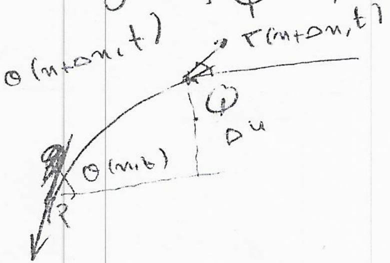
3 - نموذج رياضي لوصف التوزع الحراري في سلك رفيع متجانس طوله $S = l$ معزول الجوانب حرارة بدايته ونهايته 0 ودرجة حرارته الابتدائية على طول السلك تعطى بـ $10 \sin 4\pi x$

ثانياً: نفرض أن مقدار الانزياح في جزء معين صغير من الخيط بين P ، Q باتجاه

$\theta(x,t)$ الزاوية بين المماس والخط الأفقي في النقطة x واللحظة t

$T(x,t)$ توتر الخيط في x واللحظة t

ρ كثافة الخيط



نفرض ١) كثافة الخيط ثابت ρ وكتلة الخيط

2) مقدار الانزياح بين P ، Q هو u وكتلة الخيط بين P ، Q هي $\rho\Delta s$ حيث $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2}$

$\Delta x = \Delta s$ وكتلة الخيط $\rho\Delta x$

3) القوة المطبقة هي $T(x,t)$ في P ، $T(x+\Delta x,t)$ في Q

قوى الشد وذلك معدومة

4 - المقطع الأفقي يتحرك بشكل عمودي وبالتالي محصلة القوى الأفقية معدومة

$$-T(x,t)\cos\theta(x,t) + T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t) = 0$$

$$\Rightarrow T(x,t)\cos\theta(x,t) = T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t) = T = \text{ثابت}$$

محصلة القوى العمودية = الكتلة × التسارع

$$T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t) = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

نقسم على T

$\tan\theta(x+\Delta x,t) = u_x(x+\Delta x,t)$ حيث

$$\frac{\rho}{T}\Delta x\, u_{tt}(x,t) = u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)$$

نقسم على Δx ونجعلها تسعى للصفر

$c^2 = \frac{T}{\rho}$ حيث $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

السؤال الثاني : أولاً

$$x u_x + y u_y = x e^{-u}$$

$$u(x, x^2) = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{xe^{-u}} \Rightarrow \frac{y}{x} = c_1$$

$$e^{u} - x = c_2$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{y}{x} = c_1 \\ e^u - x = c_2 \end{matrix}\right\} \quad e^u - x = f(y/x)$$

$$u = \ln(x + f(y/x))$$

$$u(x, x^2) = \ln(x + f(x)) = 0 \Rightarrow x + f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - x$$

$$u = \ln\left(x + 1 - \frac{y}{x}\right)$$

ثانياً :

$$u = X(x)\, Y(y)$$

$$u_{xx} = X''Y \quad , \quad u_{yy} = XY'' \Leftarrow$$

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \& \quad Y'' + \lambda Y = 0$$

$$u(0, y) = f(y) = X(0)\, Y(y)$$

$$u(x, 0) = X(x)\, Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0}$$

$$u(x, b) = X(x)\, Y(b) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(b) = 0}$$

$$u(a, y) = X(a)\, Y(y) = 0 \quad , \quad Y(y) \neq 0 \Rightarrow \boxed{X(a) = 0}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

$\lambda = 0$ ، $\lambda < 0$ الحل الصفري (مرفوض) مرفوض

$$\lambda > 0 \Rightarrow m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}\, y + B\sin\sqrt{\lambda}\, y$$

$$Y(0) = A = 0 \qquad Y(b) = B\sin\sqrt{\lambda}\, b = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\, b = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\, b = n\pi \Rightarrow$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

$$Y_n(y) = B\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$X'' - \lambda X = 0 \Rightarrow m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \mp\sqrt{\lambda} \Rightarrow$$

$$X_n = A_n\cosh\frac{n\pi x}{b} + B_n\sinh\frac{n\pi x}{b}$$

$$X_n(x) = A_n\cosh\frac{n\pi}{b}(x - a) + B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x - a)\right) \quad ; n \in \mathbb{N}$$

$$X(a) = 0 \Rightarrow X_n(a) = A_n = 0 \Rightarrow$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\frac{n\pi}{b}(x - a)\,\sin\frac{n\pi y}{b} \quad ; \quad u(0, y) = f(y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n \sinh\frac{n\pi}{b}(-a)}_{c_n}\,\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$c_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\,\sin\frac{n\pi y}{b}\, dy \Rightarrow B_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\,\sin\frac{n\pi y}{b}\, dy \left(\sinh\frac{-n\pi a}{b}\right)^{-1}$$

انتهى

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2024-2025

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. مسألة القيم الحدية
2. معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الثانية ناقصية
3. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_{tt}(x,t)=c^2u_{xx}(x,t),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=u(2,t)=0$$

ثانياً:

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة **منتظمة** c عبر أنبوب **رفيع** G ذو مقطع **منتظم** A . استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايتيه، طوله l ، يزاح عن وضع التوازن ليأخذ الشكل $f(x)=\cos x$ ثم يترك

1. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t.
2. اكتب العلاقة التي تعطي الطاقة الكلية للخيط.**(استنتاج هذه العلاقة غير مطلوب).**
3. بين فيما اذا كانت حركة الخيط متخامدة أم لا**(مع التفسير).**

ثانياً: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ،درجة حرارة كل نقطة من نقاطه u_0 . نسحب هذا السلك ونضعه بدرجة حرارة u_1 . اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند زمن t <0 . **(ايجاد حل النموذج غير مطلوب).**

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال نادر حسين

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية
لطلاب سنة ثالثة رياضيات الدورة الفصلية الأولى 2024 - 2025

45

السؤال الأول:

أولاً:

1. مسألة القيم الحدية معادلة تفاضلية مزودة بشروط حدية (قيمة التابع أو مشتقه عند الحدود) ويكون عدد الشروط الحدية حسب أعلى رتبة لمشتق التابع بالنسبة للمتحول

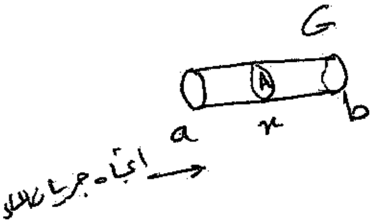
2. معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية ناقصية هي معادلة من الشكل

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$$

وتحقق $B^2 - 4AC < 0$

3. النموذج الرياضي الذي يصف حركة خيط مرن طوله $l=2$ ومثبت في طرفيه حيث أن الوضع الابتدائي للخيط يعطى بالتابع $\varphi(x)$ والسرعة الابتدائية لكل نقطة من نقاط الخيط تعطى بالتابع $\psi(x)$

ثانياً: لنفرض G المجال المفتوح (a,b)



لتكن A سرعة ثابتة $c>0$ بالاتجاه الموجب للحركة على المحور x ومستوى تركيز المادة الكيميائية ثابتة عبر المقطع A في كل نقطة x وبدون فإن التركيز يتغير فقط بتغير x، ولتكن $u(x,t)$ دالة المشتقات مستمرة وتقيس تركيز المادة في النقطة واللحظة t وبالتالي كمية المادة الكيميائية الموجودة في مقطع الأنبوب بين a و x هي $\int_a^x A u(s,t)\,ds$ بما أن الماء يجري بسرعة c فإنه في اللحظة $t+h$ سيكون لدينا نفس كمية المادة ولكن بين النقطتين $a+ch$ و $x+ch$ أي

$$\int_a^x A u(s,t)\,ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A u(s,t+h)\,ds$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نجد

$$u(x,t) = u(x+ch,t+h) \Leftarrow A u(x,t) = A u(x+ch,t+h)$$

نشتق بالنسبة لـ h نجد

$$0 = u_t(x+ch,t+h) + c\,u_x(x+ch,t+h)$$

نجعل $h \to 0$ نجد

$$0 = u_t(x,t) + c\,u_x(x,t)$$

السؤال الثاني:

$u(x,t)$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad u(x,0) = \cos x,\; u_t(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

بأخذ f, g دوال اختيارية

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \cos x$$

$$u_t(x,t) = c f' - c g'$$

$$u_t(x,0) = c f'(x) - c g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = \dots$$

$$f'(x) + g'(x) = -\sin x \Rightarrow \cancel{\dots}$$

$$g(x) = f(x) = \tfrac{1}{2}\cos x \Leftarrow f'(x) = -\tfrac{1}{2}\sin x \Leftarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left(\cos(x+ct) + \cos(x-ct)\right)$$

2- $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2 + c\,u_x^2)\,dx$ 5

ب- $\frac{dE}{dt} = c^2\left(u_t(L,t)\,u_x(L,t) - u_t(0,t)\,u_x(0,t)\right)$

النهايات مثبتة $\Leftarrow$ $0 = u_t(0,t) = u_t(L,t) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow$ 5

$E(t) = \text{constant} \Rightarrow$ حركة الخيط تبقى صفرا.

ثالثاً:

ثابت الانتشار α^2 ،

$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$ 5

$u(x,0) = u_0$ 5 $\qquad 0 < x < \ell$

$u(0,t) = u(\ell,t) = u_1$ 5 $\qquad 0 < t$

انتهى بسلام

ملاحظة : يمكن الحل بأي طريقة واردة في المقرر ويأخذ الطالب كامل العلامة.

د. منال ناصر

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة التكميلية
للعام الدراسي 2023-2024

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية
2. شروط ديريخليه الحدية
3. معادلة بواسون
4. التوابع التوافقية

ثانياً: بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس نصف لانهائي معزول الجوانب و درجة حرارته الابتدائية U_0 . نضع احدى نهايتيه في وسط درجة حرارته $0^\circ c$. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t . **(إيجاد حل النموذج غير مطلوب)**

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط لانهائي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور OX . نجعل بدايته $x=0$ تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t.

ثانياً: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية $u_x + u_t = x + t$

حيث $u(x,0) = u(0,t) = 1$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية > لطلاب السنة الثالثة الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2023-2024	الدرجة: 90 المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. شروط روبن الحدية
2. معادلة الحرارة
3. تحويل لابلاس للدالة $\dfrac{\sin at}{t}$
4. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_{tt}(x,t)=c^2u_{xx}(x,t),\quad u_t(x,0)=4x,\quad u(x,0)=\sin x,\quad u(0,t)=2t\quad x\in[0,\infty)$$

ثانياً:

استنتج الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً:
بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس، طوله 20 متر، معزول الجوانب، و احدى نهايتيه معزولة أيضاً، درجة حرارته الابتدائية 10°c . نضع النهاية غير المعزولة في ماء حرارته مثبتة 35°c . **اكتب (بدون حل) النموذج الرياضي** الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك في كل لحظة

ثانياً:
باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(a,y)=u(x,0)=u(x,b)=0$$

$$u(0,y)=f(y)$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2023-2024

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. شروط روبن الحدية
2. معادلة الموجة المتخامدة
3. تحويل لابلاس للدالة $e^{-x}x\cos(2x)$
4. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_{tt}(x,t)=c^2u_{xx}(x,t),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=\eta(t)\quad x\in[0,\infty)$$

ثانياً:

بفرض لدينا خيط مرن مشدود (كثافته ثابتة ρ) وموضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايتيه اليسارية L و اليمينية R . نزيح الخيط عن وضع التوازن ونتركه عندها نلاحظ موجة تعبر هذا الخيط. استنتج (مع الشرح) النموذج الرياضي الذي يصف الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x واللحظة t.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً:
بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس، طوله 20 متر، معزول الجوانب، و احدى نهايتيه معزولة أيضاً، درجة حرارته الابتدائية 10°c . نضع النهاية غير المعزولة في ماء حرارته مثبتة 35°c . **اكتب (بدون حل) النموذج الرياضي** الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك في كل لحظة.

ثانياً: بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة **منتظمة** $c=3$ عبر أنبوب رفيع ذو مقطع **منتظم** A ، والتركيز الابتدائي لهذه المادة يعطى بدلالة التابع $\sin(x)$. بفرض أن هذه المادة مضمحلة بثابت $\lambda=1$ ويوجد مصدر خارجي يعوض المادة المضمحلة يمثل بتابع t، **أحسب** تركيز المادة في كل نقطة من نقاط الأنبوب في كل لحظة t.

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية

عام 2023 - 2024 لطلاب سنة رياضيات

السؤال الأول

أولاً: 1- هي شروط تعطى بدلالة قيمة التابع ومشتقاته عند الحدود 5

2- معادلة بالشكل $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma u_t = 0 ; \gamma > 0$ ، γu_t يمثل حد التخامد 5

3-

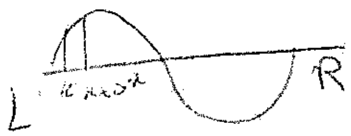
$$\mathcal{L}(e^{-x} \underbrace{x \cos 2x}_{f(x)}) = F(s+1)$$ 5

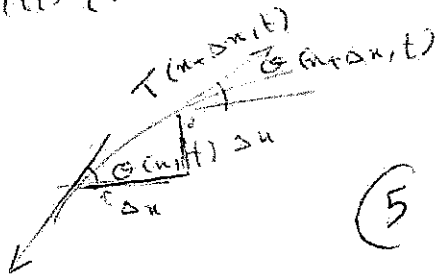
$$F(s) = (-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\cos 2x) = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

$$\Rightarrow F(s+1) = \frac{(s+1)^2-4}{((s+1)^2+4)^2}$$

4- النموذج الرياضي الذي يصف حركة خيط مرن مشدود منتهي الطول حيث أن 5
الموضع الابتدائي للخيط (لكل نقطة من نقاطه) تعطى بالتابع $\varphi(x)$
والسرعة الابتدائية لكل نقطة من نقاطه تعطى بالتابع $\psi(x)$ وذلك بفرض
أن النهاية $x=0$ تتحرك وفق التابع $\eta(t)$

ثانياً:





- شرح لكل جزء من الرموز 5
- الفرضيات المناسبة
- القوى المطبقة على القطع المرسوم $T(x+\Delta x,t)$ بزاوية $\theta(x+\Delta x,t)$ مع الأفق

$T(x,t)$ ، $\theta(x,t)$ مع الأفق

محصلة القوى الأفقية معدومة 5

$$-T(x,t)\cos(\theta(x,t)) + T(x+\Delta x,t)\cos(x+\Delta x,t) = 0$$

$$T(x,t)\cos\theta(x,t) = T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t) = T = \text{ثابت}$$

محصلة القوى العمودية = الكتلة × التسارع 5

$$T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

نقسم على T نجد

$$\frac{\rho}{T}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tan\theta(x+\Delta x,t) - \tan(\theta(x,t))$$ 5

$$= u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)$$

نقسم على Δx ونجعلها تسعى للصفر نحصل على

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$ 5 ، $c^2 = \frac{T}{\rho}$

السؤال الثاني :

أولاً :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 5$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad 5$$

$$u_x(20,t) = \frac{-h}{k}\left(u(20,t) - 35\right) \quad 5 \qquad 0 \le x \le 20$$

$$u(x,0) = 10 \quad 5$$

α^2 ثابت الانتشار الماسي

k معامل التوصيل الحراري

ثانياً :

$$u_t + 3u_x + u = t \quad 5$$

$$u(x,0) = \sin x \quad 5$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{3} = \frac{du}{t-u} \quad 5$$

$$x - 3t = k_1 \quad 5$$

$$\frac{dt - du}{1-t+u} = dt \Rightarrow (1-t+u)e^{t} = k_2 \Bigg\} \Rightarrow F_1\left(x-3t, (1-t+u)e^{t}\right) = 0 \quad 5$$

$$\Rightarrow u = e^{-t} F(x-3t) + t - 1$$

$$u(x,0) = F(x) - 1 \Rightarrow F(x) = \sin x + 1 \Rightarrow u(x,t) = e^{-t}\sin(x-3t) + t - 1 + e^{-t}$$

انتهى

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية > لطلاب السنة الثالثة الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2022-2023	الدرجة: 90 المدة: ساعتان

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. التابع المضمحل بشكل أسي
2. معادلة التوزيع الحراري لسلك
3. التابع التوافقي في كل مكان
4. تحويل لابلاس للدالة $\frac{\sin t}{t}$
5. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_t(x,t)=\alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad u(0,t)=0, \quad u(l,t)=20$$

ثانياً: **استنتج** الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ.

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايتيه، يزاح عن وضع التوازن ليأخذ الشكل $f(x)=\sin \pi x$ ثم يترك. إذا علمت أن $c=\frac{1}{\pi}$

1. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t.
2. عين أول لحظة يعيد فيها الخيط وضعه الابتدائي.

ثانيا: بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس بطول $300cm$ معزول الجوانب و درجة حرارته الابتدائية $10^\circ c$. بفرض أن احدى نهايتيه معزولة والنهاية الأخرى غمرت في ماء درجة حرارته مثبتة على $25^\circ c$. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t.

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية
لطلاب سنة 3 رياضيات
2023 - 2022 ف 2

السؤال الأول :

أولاً :

1 - التابع المضمحل بشكل أسي هو تابع يحقق $\frac{du}{dt} = \lambda u \; ; \; \lambda < 0$ (4)

2 - معادلة التوزيع الحراري لسلك $u_t = \alpha^2 \Delta u$ (4) α^2 ثابت انتشار الحرارة

3 - التابع التوافقي في كل ساحة هو حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ (4)

4 - $\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \arctan \frac{1}{s}$ (4) مع التفسير بأي طريقة وردت به

5 - $u_t = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$ (4) $u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 20$

النموذج الرياضي الذي يصف التوزع الحراري في سلك ناحي متجانس طوله l معزول الجوانب حرارة احدى نهايتيه 0 وحرارة النهاية الأخرى 20

ثانياً :

$E = k + U$ (4)
حركية كامنة

طاقة حركة عنصر dx من الخيط بتوزع الكتلة ρ هي $v = u_t$ هي $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho \, dx (u_t)^2$

وبالتالي الطاقة الحركية لكامل الخيط $k = \frac{1}{2}\int_0^L \rho [u_t(x,t)]^2 dx$ (4)

الطاقة الكامنة هي كامل العمل الواجب بذله لكي ينتقل الخيط من وضع التوازن إلى الوضع $u(x,t)$ العنصر dx تحت وطأة قوى الشد

$$T u_{xx} dx = T u_x \Big|_{x+\Delta x} - T u_x \Big|_{x}$$ (4)

ليقطع خلال الزمن dt مسافة $u_t(x,t)\, dt$ وبالتالي العمل المبذول للخيط كله

$$\left\{\int_0^L T u_{xx} u_t \, dx\right\} dt = \left\{T u_x u_t \Big|_0^L - T\int_0^L u_x u_{xt} \, dx\right\} dt$$

$$= \left\{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L T (u_x)^2 dx + T u_x u_t \Big|_0^L\right\} dt$$ (4) $= 0$

لأن الطرفين مثبتان أو غير محصورة $u_t(0,t) = u_t(l,t) = 0$ (4)

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L T u_x^2(x,t)\, dx$$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho [u_t(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L T u_x^2(x,t)\, dx$$

السؤال الثاني

أولاً :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (5) \quad ; \quad c = \frac{1}{\pi}$$

$$u(x,0) = \sin \pi x \quad (5)$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad (5)$$

يمكن ايجاد الحل بأي طريقة من الطرق الواردة في المقرر نحصل على

$$u(x,t) = \frac{\sin(\pi(x - \frac{t}{\pi})) + \sin(\pi(x + \frac{t}{\pi}))}{2} \quad 1)$$

$$= \frac{\sin(\pi x - t) + \sin(\pi x + t)}{2} \quad (5)$$

2) لتعيين اللحظة التي تعيد فيها الخيط وضعه الابتدائي يجب أن يكون

$$\frac{\sin(\pi x - t) + \sin(\pi x + t)}{2} = \sin \pi x \quad (5)$$

تابع $\sin$ تابع دوري ودوره 2π لذا يجب أن يكون $t = 2\pi$ (5) حتى تتحقق المساواة السابقة.

ثانياً :

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx} \quad (5) \qquad u_x(0,t) = 0 \quad (5)$$

$$u_x(300,t) = -\frac{h}{k}(u(300,t) - 25) \quad (5)$$

$$u(x,0) = 10 \quad (5) \qquad 0 \le x \le 300$$

α^2 ثابت انتشار الحرارة

k معامل التوصيل الحراري

انتهى السلم

د. صالح حسين

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2023-2022

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. التابع المضمحل بشكل أسي
2. شروط نيومن الحدية
3. معادلة التوزيع الحراري لسلك في حال الاستقرار
4. التابع $e^x \cos y$ تابع توافقي في كل مكان
5. تحويل لابلاس للدالة $\frac{\sin at}{t}$
6. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_t(x,t)=\alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad u_x(0,t)=0, \quad u(l,t)=0$$

ثانياً:

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة **منتظمة** c عبر أنبوب **رفيع** G ذو مقطع **منتظم** A. استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولا:

بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايتيه، طوله l ، يزاح عن وضع التوازن مسافة قدرها h في نقطة تبعد مسافة c عن احدى نهايتيه ثم يترك.عين موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .

ثانيا:

بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس، طوله 10 متر، معزول الجوانب، و احدى نهايتيه معزولة أيضاً، درجة حرارته الابتدائية **صفر** . نضع النهاية غير المعزولة في ماء حرارته مثبتة $20°c$. **اكتب (بدون حل) النموذج الرياضي الذي يصف** حرارة كل نقطة من نقاط السلك في كل لحظة.

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية

لطلاب سنة ثالثة رياضيات ف1 2022-2023

(45)

السؤال الأول أولاً:

1- التابع المضمحل بشكل أسي هو تابع يحقق $\frac{du}{dt} = \lambda u \ ; \ \lambda < 0$

2- شروط نيومن الحدية هي شروط تعطى بدلالة مشتق التابع عند الحدود

3- معادلة التوزيع الحراري تصبح في حالة الاستقرار يكون فيها $u_t = 0 \Leftarrow \Delta u = 0$

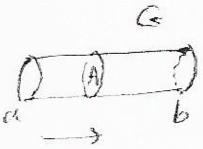
4- التابع $e^x \cos y$ تابع توافقي لأنه حل لمعادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ حيث

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^x \cos y) = e^x \cos y$ ، $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^x \cos y) = -e^x \cos y$

5- $\mathcal{L}\left(\sin \frac{at}{t}\right) = \arctan \frac{a}{s}$ التفسير بأي طريقة وردت في المقرر

6- $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$ ، $u_x(0,t) = 0$ ، $u(l,t) = 0$

النموذج الرياضي الذي يصف التوزيع الحراري في سلك نحاسي متجانس طوله l معزول الجوانب وأحد نهايتيه معزولة والنهاية الأخرى حرارتها 0 في زمن بعيد تعتبر كل الحرارة البدء



ثانياً: لنعبر عن G بالمجال المفتوح (a,b) ولتكن السرعة c بالاتجاه الموجب للحركة على المحور x ، ونفرض أن تركيز المادة الكيميائية ثابت عبر المقطع A في كل لحظة x وبذلك تركيز المادة الكيميائية يتغير بتغير x فقط ولكن $u(x,t)$ قابلة للاشتقاق ومستمرة ونعبر عن تركيز المادة الكيميائية في النقطة x واللحظة t وبالتالي كمية المادة الكيميائية الموجودة في مقطع الأنبوب بين a و x تعطى

$$\int_a^x A u(s,t)\,ds$$

وبما أن المادة تجري بسرعة c فإنه باللحظة $t+h$ سيكون لدينا نفس كمية المادة الكيميائية

$$\int_a^x A u(s,t)\,ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A u(s,t+h)\,ds$$

نشتق بالنسبة لـ x

$$Au(x,t) = Au(x+ch, t+h) \Rightarrow u(x,t) = u(x+ch, t+h)$$

نشتق بالنسبة لـ h

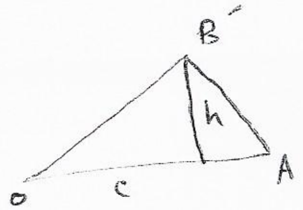
$$0 = u_t(x+ch, t+h) + c\,u_x(x+ch, t+h)$$

نجعل h تسعى للصفر

$$u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0 \quad \forall (x,t)$$

السؤال الأول

أولاً



$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{c}x & 0 \le x \le c \\ -\frac{h}{\ell - c}(x-\ell) & c \le x \le \ell \end{cases}$$ 10

$$u_t(x,t)\Big|_{t=0} = 0$$

نحلها بطريقة فصل المتغيرات $u(x,t) = X(x)T(t)$ نجد

$X'' - \lambda X = 0 \qquad T'' - \alpha^2 \lambda T = 0$ 5

$\lambda = 0 \,,\, \lambda > 0$ مرفوضة

$\Leftarrow \lambda < 0$

$X = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\,x$ 5

$X(0) = c_1 = 0$

$X(\ell) = c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\,\ell = 0 \qquad c_2 \ne 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\,\ell = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\,\ell = n\pi$

$T = c_3 \cos\alpha\sqrt{-\lambda}\,t + c_4 \sin\sqrt{-\lambda}\,t \qquad \sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{\ell}$

$\Rightarrow c_4\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}(0) = 0$

$T'(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{n\pi\alpha}{\ell}t$$ 3

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u(x,0)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{\ell}\left(\int_0^{c}\frac{h}{c}x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + \int_c^{\ell} -\frac{h}{\ell-c}(x-\ell)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$ 2

$$= \frac{2h\ell^2}{n^2\pi^2 c(\ell-c)}\sin\frac{n\pi c}{\ell}$$

ثانياً:

$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx} \qquad u_x(0,t) = 0$ 5

$u_x(100,t) = -\frac{h}{k}\left(u(100,t) - 20\right)$ 10

$0 \le x \le 100$

$u(x,0) = 0$

α^2 ثابت الانتشار ، k معامل التوصيل الحراري

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية
للعام الدراسي 2022-2021

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية **من النوع الزائدي**
2. شروط ديريخليه الحدية
3. معادلة الموجة المتخامدة
4. معادلة بواسون

ثانياً: بفرض لدينا خيط لانهائي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور OX . نجعل بدايته $x=0$ تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. اكتب النموذج الرياضي الذي يعبر عن موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t **حل النموذج غير مطلوب**

ثالثاً: استنتج الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولا:

باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية $u_x + u_t = x + t$

حيث $$u(x,0) = u(0,t) = 1$$

ثانيا:

بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس طويل جداً، معزول الجوانب، موضوع في درجة حرارة **صفر** . نرفع حرارة احدى نهايتيه **درجة واحدة** ونحافظ عليها في هذه الدرجة . **أوجد** حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t وذلك إذا علمت أن ثابت الانتشار هو 1 .

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

2022 - 2021

سلم تصحيح معادلات تفاضلية جزئية
لطلاب س3 رياضيات ف2

السؤال الأول:

أولاً: 1- اذا كانت من الشكل (5)

$B^2-4AC>0$ حيث $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$

2- هي شروط تعطى بدلالة مشتقة التابع عند الحدود. (5)

3- من الشكل $u_{tt}-c^2u_{xx}+\gamma u_t=0;\ \gamma>0$ ، γu_t يمثل حد التخامد (5)

4- هي معادلة لابلاس مع طرف ثاني ؛ $\Delta u=f$ (5)

ثانياً:

(5)
$$u_{tt}=\alpha^2u_{xx}\qquad 0<x\ ,\ 0<t$$
(5)
$$u(x,0)=0$$
$$u_t(x,0)=0\quad \&\quad u(x,t)<M$$
$$u(0,t)=A_0\sin\omega t$$
(5)

ثالثاً:

$E=K+U$ (2)

K: حركية ، U: كامنة

طاقة حركة عنصر dx من الخيط يتحرك بسرعة $v=u_t$ هي $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\rho dx(u_t)^2$

وبالتالي الطاقة الحركية لكامل الخيط $K=\frac{1}{2}\int_0^L\rho[u_t(x,t)]^2dx$ (2)

الطاقة الكامنة هي عكس العمل الواجب بذله لكي ينتقل الخيط من وضع التوازن الى الوضع (x,t)

والعنصر dx تحت محصلة قوى الشد $Tu_{xx}dx=Tu_x\Big|_{x+\Delta x}-Tu_x\Big|_x$ (2)

يقطع خلال الزمن dt المسافة $u_t(x,t)\,dt$ وبالتالي العمل المبذول للخيط كله

$$\left\{\int_0^L Tu_{xx}u_t\,dx\right\}dt=\left\{Tu_xu_t\Big|_0^L-T\int_0^L u_xu_{xt}\,dx\right\}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^L T(u_x)^2dx\Big|^t+\int^t Tu_xu_t\Big|_0^L dt$$ (2)

$=0$ ، لان الطرفان مثبتان والسرعة معدومة $u_t(0,t)=u_t(L,t)=0$

بالمكاملة بالنسبة لـ t نجد

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L Tu_x^2(x,t)\,dx$$ (2)

$$\Rightarrow E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L\rho[u_t(x,t)]^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L Tu_x^2(x,t)\,dx$$

السؤال الثاني :

أولاً :

$$u_x + u_t = x + t$$

$$\hat{u}_x + s\hat{u}(x,s) - u(x,0) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} \Rightarrow \hat{u}_x + s\hat{u}(x,s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + 1$$ 5

$$\mu = e^{sx} \Rightarrow \hat{u}(x,s) = e^{-sx}\left(c + \int \left(\frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + 1\right) e^{sx}\, dx\right) =$$

$$c e^{-sx} + \frac{1}{s} + \frac{x}{s^2}$$ 5

$$\hat{u}(0,s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s} = c + \frac{1}{s} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \hat{u}(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{x}{s^2}$$ 5

$$\Rightarrow u(x,t) = 1 + xt$$ 5

ثانياً :

$$u_t = u_{xx} \quad x>0,\ t>0$$ 5

$$u(0,t) = 1$$ 5

$$u(x,0) = 0$$

$$s\hat{u}(x,s) - u(x,0) = \hat{u}_{xx}(x,s)$$ 5

$$\hat{u}_{xx} - s\hat{u} = 0 \qquad m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \mp\sqrt{s}$$

$$\hat{u}(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$$ 5

بما أن $u(x,t)$ تبقى محدودة من أجل $x \to \infty$ $\Leftarrow$

$\hat{u}(x,s)$ تبقى محدودة من أجل $x \to \infty$

لذلك يجب أن يكون $c_1 = 0$ $\Leftarrow$ $\hat{u}(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s}x}$ 5

نطبق الشرط الحدي $\Leftarrow \hat{u}(0,s) = c_2 = \frac{1}{s}$

$$\hat{u}(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x} \Rightarrow u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

انتهى السلم

د. جمال حسين

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2022-2021

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية
2. شروط روبن الحدية
3. معادلة الموجة المتخامدة
4. التوابع التوافقية

ثانياً: بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة **منتظمة** c عبر أنبوب **رفيع** G ذو مقطع **منتظم** A .

1. **استنتج** المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.
2. بفرض أن $c = 2$ ، وأن هذه المادة مضمحلة بثابت $\lambda = 3$ ، والتركيز الابتدائي لهذه المادة يعطى بدلالة التابع e^x ، **احسب** تركيز المادة في كل نقطة من نقاط الأنبوب في كل لحظة t ، **ماذا تلاحظ** بعد مرور فترة زمنية طويلة جداً.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولا:

بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايتيه، طوله l ، يزاح عن وضع التوازن مسافة قدرها h في نقطة تبعد مسافة c عن احدى نهايتيه ثم يترك. اكتب النموذج الرياضي الذي يعبر عن موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .**حل النموذج غير مطلوب**

ثانيا:

بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس طويل جداً، معزول الجوانب، موضوع في درجة حرارة **صفر** . نرفع حرارة احدى نهايتيه **درجة واحدة** ونحافظ عليها في هذه الدرجة . **أوجد** حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t وذلك إذا علمت أن ثابت الانتشار هو 1 .

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية
لطلاب السنة الثالثة رياضيات 2021 - 2022

السؤال الأول

أولاً:

1- المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تحوي على تابع وعدة متحولات مستقلة (اثنان على الأقل) والمشتقات الجزئية للتابع بالنسبة للمتحولات المستقلة. 5

2- شروط روبن الحدية هي شروط تعطى بدلالة قيمة التابع ومشتقاته عند الحدود. 5

3- معادلة الموجة المتخامدة $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma u_t = 0 ; \gamma > 0$ ، γu_t يمثل عامل التخامد. 5

4- التوابع التوافقية هي حلول معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ 5

ثانياً:

1- نعرف G بالمجال المفتوح (a,b) ، لتكن السرعة $c > 0$ بالاتجاه الموجب للحركة على المحور x ونفرض أن تركيز المادة الكيميائية ثابت عبر المقطع A في كل نقطة x وبذلك يكون تركيز المادة الكيميائية يتغير فقط بتغير x ولتكن $u(x,t)$ قابلة للاشتقاق ومستمرة وتعبر عن تركيز المادة الكيميائية في x واللحظة t وبالتالي كمية المادة الموجودة بين x, a تعطى

$$\int_a^x A u(s,t)\, ds$$

بما أن الماء يجري بسرعة منتظمة c فإنه في اللحظة $t+h$ سيكون لدينا نفس كمية المادة الكيميائية أي

$$\int_a^x A u(s,t)\, ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A u(s,t+h)\, ds$$ 10

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x نجد

$$A u(s,t) = A u(x+ch, t+h)$$

$$u(x,t) = u(x+ch, t+h)$$

نشتق بالنسبة لـ h نجد

$$0 = u_t(x+ch, t+h) + c\, u_x(x+ch, t+h)$$

نجعل h تتقارب نحو 0 فنحصل على

$$u_t(x,t) + c\, u_x(x,t) = 0 \quad \forall (x,t)$$

تسمى هذه المعادلة معادلة النقل

2-

$$u_t + 2u_x + 3u = 0$$ 5

$$u(x,0) = e^x$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2} = \frac{du}{-3u} \Rightarrow x - 2t = c_1 , \quad u e^{3t} = c_2 \Rightarrow$$

$$u = e^{-3t} f(x-2t)$$ 5

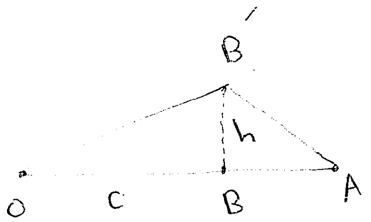
$$u(x,0) = f(x) = e^x \Rightarrow u(x,t) = e^{-3t} e^{x-2t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{x-5t}$$

نلاحظ أن $u \xrightarrow{5} 0$ عندما $t \to \infty$ أي أن تركيز المادة يقل مع الزمن

السؤال الثاني : أولاً

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 5$$



• نعين الشروط الابتدائية والحدية

• الذي يثبت طرفين $\Leftarrow$ $u(0,t) = u(l,t) = 0$ 5

نعين الشروط الابتدائية

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{c}x & 0 \le x \le c \\ -\frac{h}{l-c}(x-l) & c \le x \le l \end{cases} \quad 5$$

$\Leftarrow$ معادلة OB'

$\Leftarrow$ معادلة $B'A$

فيصبح النموذج الرياضي المطلوب هو

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} h/c \; x & 0 \le x \le c \\ \frac{-h}{l-c}(x-l) & c \le x \le l \end{cases}$$

ثانياً :

$$u_t = u_{xx} \quad 5 \qquad x > 0 \;,\; t > 0$$

$$u(0,t) = 1 \quad 5$$

$$u(x,0) = 0 \quad 5$$

$$s\hat{u}(x,s) - u(x,0) = \hat{u}_{xx}(x,s) \Rightarrow \quad 5$$

$$\hat{u}_{xx} - s\hat{u} = 0 \qquad m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \mp s \quad 5$$

$$\hat{u}(x,s) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

وبما أن $u(x,t)$ تبقى محدودة لما $x \to \infty$

لذلك يجب أن يكون $C_1 = 0 \Leftarrow$ $\hat{u}(x,s)$ تبقى محدودة لما $x \to \infty$

$$\hat{u}(x,s) = C_2 e^{-\sqrt{s}x} \quad 5$$

نطبق الشرط الحدي

$$\Leftarrow \hat{u}(0,s) = C_2 = \frac{1}{s}$$

$$\hat{u}(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x} \Rightarrow u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية
للعام الدراسي 2020-2021

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية **نصف الخطية**
2. شروط ديريخليه الحدية
3. معادلة بواسون
4. **الحل الضعيف** لمعادلة تفاضلية جزئية

ثانياً: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ،موضوع في درجة حرارة u_0 . نضع إحدى النهايتين بدرجة حرارة u_1 ، أما النهاية الثانية للسلك فهي معزولة. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t . (**ايجاد حل النموذج غير مطلوب)**

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولا: بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايتيه، طوله l ، يزاح عن وضع التوازن ليأخذ الشكل $f(x) = \cos x$ ثم يترك

1. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t.
2. اكتب العلاقة التي تعطي الطاقة الكلية للخيط.**(استنتاج هذه العلاقة غير مطلوب)**.
3. بين فيما اذا كانت حركة الخيط متخامدة أم لا(**مع التفسير)**.

ثانيا:

باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية (حيث $u(x,t)$ تبقى محدودة عندما $x \to \infty$)

$$u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 1$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال ناصرحسين

سلم تصحيح معادلات تفاضلية جزئية

سنة 3 رياضيات ف 2

2020 - 2021

السؤال الأول

أ: - المعادلة التفاضلية الجزئية نصف الخطية: هي معادلة يكون معامل درجة أعلى مشتق هو دالة أو ثابت تابعة فقط للمتحولات المستقلة في المعادلة. (5)

- شروط ديريخليه الحدية: هي شروط حدية تعطى بدلالة قيمة التابع عند الحدود (5)

- معادلة بواسون: هي معادلة لابلاس مع طرف ثاني $\Delta u = f$ (5)

- الحل الضعيف لمعادلة تفاضلية جزئية: هو حل للمعادلة التفاضلية ليس بالضرورة أن يكون نظامي. (5)

ثانياً: ثابت الانتشار α^2 ؛

(10) $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$ $\quad 0 < x < \ell$

(5) $u(x,0) = u_0$ $\quad 0 < t$

(5) $u_x(0,t) = 0 , u(\ell,t) = u_1$

السؤال الثاني:

أولاً: 1-

(5) $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $\quad u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ (5)

$u(x,0) = \cos x \; , \; u_t(x,0) = 0$ ؛ f, g دوال اختيارية

$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

$u_t(x,t) = cf' - cg'$ بالتعويض بالشروط نجد

$u(x,0) = f(x) + g(x) = \cos x$

$u_t(x,0) = cf'(x) - cg'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = g'(x)$ $\Big\} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}\sin x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\cos x$

$f'(x) + g'(x) = -\sin x$

(5) $\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+ct) + \cos(x-ct)\right)$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\cos x$

2-

(5) $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} (u_t^2 + c^2 u_x^2)\, dx$

3-

$\frac{dE}{dt} = c^2\left(u_t(\ell,t)\, u_x(\ell,t) - u_t(0,t)\, u_x(0,t)\right)$ (5) $\Leftarrow$ النهايات مثبتة

$\Leftarrow u_t(0,t) = u_t(\ell,t) = 0$

$\Leftarrow \frac{dE}{dt} = 0$ (5) $\Leftarrow E(t) = \text{constant}$

حركة الخيط غير متخامدة.

$u_t = u_{xx}$; $x > 0$, $t > 0$ $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = 1$: حل

$sU - u(x,0) = U_{xx}$ (5)

$U(0,s) = \frac{1}{s}$

$\Rightarrow U_{xx} - sU = 0 \Rightarrow m^2 - s = 0 \Rightarrow U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$ (5)

$x \to \infty \Rightarrow c_1 = 0$; $\sqrt{s} > 0 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} U(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s}x} \\ U(0,s) = c_2 = \frac{1}{s} \end{array}\right\} \Rightarrow$ (5)

$U(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x} \Rightarrow u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv$ (5)

انتهى الحل

لم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2020-2021

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية
2. شروط ديريخليه الحدية
3. معادلة بواسون
4. التوابع التوافقية

ثانياً: بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس نصف لانهائي معزول الجوانب و درجة حرارته الابتدائية U_0 . نضع احدى نهايتيه في وسط درجة حرارته $0^\circ c$.اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t . **(إيجاد حل النموذج غير مطلوب)**

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايتيه، طوله l ، يزاح عن وضع التوازن ليأخذ الشكل $f(x) = \cos x$ ثم يترك

1. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t.
2. اكتب العلاقة التي تعطي الطاقة الكلية للخيط.**(استنتاج هذه العلاقة غير مطلوب).**
3. بين فيما اذا كانت حركة الخيط متخامدة أم لا(**مع التفسير).**

ثانياً: بفرض لدينا المسألة التالية

$$u_t = u_{xx}\,, \quad 1 > x > 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 3\sin 2\pi x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

باستخدام **تحويل لابلاس** أوجد حل المسألة المفروضة

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح معادلات تفاضلية جزئية
لطلاب س 3 رياضيات ف 1
2020 - 2021

السؤال الأول:

أولاً:

1 - معادلة تفاضلية تحوي على تابع مجهول (بمتحولين مستقلين أو أكثر) ومشتقات التابع الجزئية بالنسبة للمتحولات المستقلة. (5)

2 - شروط ديريكليه الحدية هي شروط حدية تعطي دلالة قيمة التابع عند الحدود (5)

3 - معادلة بواسون هي معادلة لابلاس مع طرف ثاني $\Delta u = f$ (5)

4 - التوابع التوافقية هي حلول معادلة لابلاس (5)

ثانياً:

(10) $u_t = k\, u_{xx} \qquad x>0 \,,\ t>0$

$u(x,0) = U_0$

(10) $u_x(0,t) = \alpha\,(u(0,t)) \qquad |u(x,t)| < M$

(هناك تبادل حراري مع الوسط الخارجي)

السؤال الثاني:

أولاً: 1 -

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (5)

$u(x,0) = \cos x \,,\ u_t(x,0) = 0$ (5)

$u(0,t) = u(l,t) = 0$

$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ ؛ f, g دوال اختيارية نعوض بالشروط

$u_t(x,t) = c f' - c g' \Rightarrow$

$u(x,0) = f(x) + g(x) = \cos x$ (5)

$u_t(x,0) = c f'(x) - c g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = g'(x)$

$f'(x) + g'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}\sin x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\cos x$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\cos x$ (2)

$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+ct) + \cos(x-ct)\right)$

يمكن أن يحل التمرين بأي طريقة أخرى من مذكرة مدرس المقرر ويأخذ الطالب العلامة كاملة ولو.

2 - $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) dx$ (5)

3 - $\frac{dE}{dt} = c^2\left(u_t(L,t)\,u_x(L,t) - u_t(0,t)\,u_x(0,t)\right)$ ⇐ النهايات مثبتة (2)

$\frac{dE}{dt} = 0 \Leftarrow u_t(0,t) = u_t(L,t) = 0$

$E(t) = \text{constant}$ (2) ⇐ حركة الجسم غير متخامدة. (2)

ثانياً :

$$u_t = u_{xx} \qquad 1 > x > 0 \ , \ t > 0$$

$$u(x,0) = 3\sin 2\pi x \ , \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$s\hat{u} - u(x,0) = \hat{u}_{xx} \Rightarrow \hat{u}_{xx} - s\hat{u} = -3\sin 2\pi x$$ 5

$$m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \mp\sqrt{s} \Rightarrow \hat{u}_h = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x}$$ 5

$$\hat{u}_p = \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x$$

يتم ايجاد الحل الخاص بأي طريقة معروفة

$$\hat{u}(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} + \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x$$

$$\hat{u}(0,s) = 0 \ , \quad \hat{u}(1,s) = 0$$ 5

بتطبيق الشروط الحدية لايجاد c_1 , c_2 نجد

$$\left.\begin{array}{l} \hat{u}(0,s) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ \hat{u}(1,s) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \hat{u}(x,s) = \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x$$ 5

أخذ تحويل لابلاس العكسي

$$u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$$ 2

انتهت الأسئلة

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية
للعام الدراسي 2019-2020

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. **الحل القوي** لمعادلة تفاضلية جزئية
2. المعادلة التفاضلية الجزئية **شبه الخطية**
3. معادلة بواسون

ثانياً: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ،موضوع في درجة حرارة ابتدائية $g(x)$. نبرد النهايتين لدرجة **الصفر**

1. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t .
2. أوجد التوزيع الحراري في كل نقطة من نقاط السلك.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولا:

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة **منتظمة** c عبر أنبوب **رفيع** G ذو مقطع **منتظم** A . استنتج (مع الشرح) المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

ثانيا:

بفرض لدينا خيط لانهائي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور ox . نجعل بدايته $x=0$ تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .(حل النموذج غير مطلوب)

مع تمنياتي لكم بالنجاح **مدرسة المقرر : د. منال حسين**

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية

لطلاب السنة الثالثة رياضيات ف 2   2019 - 2020

السؤال الأول $\boxed{4\text{ن}}$

أولاً

5

1 - الحل القوي لمعادلة تفاضلية جزئية هو حل مستمر وقابل للاشتقاق ومشتقاته جميعها مستمرة

5

2 - المعادلة التفاضلية الجزئية شبه الخطية : خطية بالنسبة لأعلى مشتق تحويه المعادلة

5

3 - معادلة بواسون هي معادلة لابلاس مع طرف ثاني (غير متجانسة)

$\Delta u = f(x,y)$

ثانياً - 1

$$u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t) \qquad 0 < x \le l, \quad 0 < t$$

5

$$u(x,0) = g(x)$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

2 - نفرض $u(x,t) = X(x)T(t) \Leftarrow$ $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{T'}{kT} = \lambda \Leftarrow$

5

$$X'' - \lambda X = 0 \;,\quad T' - k\lambda T = 0$$

$$u(0,t) = 0 = X(0)T(t) = 0 \;,\; T(t) \neq 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(l,t) = 0 = X(l)\,T(t) = 0 \;,\; T(t) \neq 0 \Rightarrow X(l) = 0$$

$$X'' - \lambda X = 0 \Rightarrow m^2 - \lambda = 0$$

نناقش الحالات

a - $\lambda > 0$

5

$m^2 - \lambda = 0 \Leftarrow$ $m = \mp\sqrt{\lambda} \Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} X &= Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ X(0) &= 0 = A + B \\ X(l) &= 0 = Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{aligned}\right\} \quad A = -B \Rightarrow B\left(e^{-\sqrt{\lambda}L} - e^{\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \Rightarrow$$

$A = B = 0$ الحل الصفري مرفوض

b - $\lambda = 0$ $\Rightarrow X'' = 0 \Leftarrow$ $X(x) = ax + b$

5

$$\left.\begin{aligned} X(0) &= b = 0 \\ X(L) &= al = 0 \Rightarrow a = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ الحل الصفري مرفوض

c - $\lambda < 0$ $\Leftarrow$ $m = \mp i\sqrt{-\lambda}$ $\Leftarrow$

5

$$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x \qquad X(L) = B\sin\sqrt{-\lambda}\,L = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\,L = 0$$

$$X(0) = A = 0 \;,\; B \neq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{-\lambda}\,L = n\pi \;;\; n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{L}x \;;\; n \in \mathbb{Z}$$

5

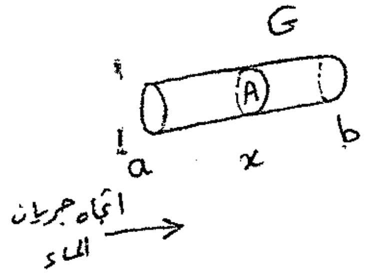
$$T' - \lambda k T = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \lambda k \Rightarrow T = e^{\lambda k t} = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$$

$$u_n(x,t) = X(x)\,T(t) = C_n \sin\frac{n\pi}{L}x\; e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$$

لتحديد الثوابت نطبق الشرط $u(x,0) = g(x) \Leftarrow$ $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x$ سلسلة جيب

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

السؤال الثاني $\boxed{45}$



نفرض عن G بالمجال المفتوح (a,b) (5)

ولتكن السرعة $c>0$ بالاتجاه الموجب للحركة على المحور x

سنفرض تركيز المادة الكيميائية ثابت عبر المقطع A في كل نقطة x وبذلك يكون تركيز المادة يتغير بتغير x فقط. ولتكن $u(x,t)$ قابلة للاشتقاقات ومستمرة ونفرض تركيز المادة الكيميائية بالنقطة x واللحظة t ، وبالتالي كمية المادة الكيميائية الموجودة في مقطع الأنبوب بين الموضعين a و x تعطى بالتكامل

$$\int_a^x A\,u(s,t)\,ds \quad (5)$$

بما أن الماء يجري بسرعة c خزنة باللحظة $h+t$ سيكون لدينا نفس كمية المادة الكيميائية

$$(5)\quad \int_a^x A\,u(s,t)\,ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A\,u(s,t+h)\,ds$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x نجد

$$A u(x,t) = A u(x+ch, t+h) \quad (5)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = u(x+ch, t+h)$$

نشتق بالنسبة لـ h نجد (5)

$$0 = u_t(x+ch, t+h) + c\,u_x(x+ch, t+h)$$

نجعل $h \to 0$ نجد

$$u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0 \quad \forall (x,t)$$

ت:

$$(10)\quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0<x \quad , 0<t$$

$$u(x,0) = 0$$

$$(10)\quad u_t(x,0) = 0 \quad \& \quad u(x,t) < M$$

$$u(0,t) = A_0 \sin \omega t$$

انتهى السؤال

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2019-2020

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. النمذجة الرياضية
2. المعادلة التفاضلية الجزئية نصف الخطية
3. معادلة بواسون

ثانياً: بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس بطول $200cm$ معزول الجوانب و درجة حرارته الابتدائية $0^{\circ}c$. بفرض أن احدى نهايتيه معزولة والنهاية الأخرى غمرت في ماء درجة حرارته مثبتة على $20^{\circ}c$.

اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t .

(إيجاد حل النموذج غير مطلوب)

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولا: استنتج الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .

ثانيا:
باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0$$

$$u(x,b) = \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية

لطلاب السنة الثالثة رياضيات فصل 1   2019 - 2020

40

السؤال الأول:

أولاً

- النمذجة الرياضية هي عملية استنتاج المعادلة الرياضية التي تصف الحالة الفيزيائية
- المعادلة التفاضلية الجزئية تصف الخطية. هي معادلة يكون فيها درجة أعلى مشتق هو واحد وأمثاله تابع فقط للمتحولات المستقلة في المعادلة
- معادلة بواسون هي معادلة لابلاس مع طرف ثاني (غير متجانسة): $\Delta u = f(x,y)$

ثانياً

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

$$u_x(0,t) = 0$$

$$u_x(200,t) = -\frac{h}{k}\left[u(200,t) - 20\right]$$

$$u(x,0) = 0^\circ C$$

السؤال الثاني:

أولاً

$$E = K + U$$

K: طاقة حركية، U: طاقة كامنة

طاقة حركة العنصر dx من الخيط الذي يتحرك بسرعة $v = u_t$ هي $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\rho\, dx (u_t)^2$

وبالتالي الطاقة الحركية لكامل الخيط

$$K = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\,(u_t(x,t))^2\, dx$$

الطاقة الكامنة هي كمية العمل الواجب بذله لكي ينتقل الخيط من وضع التوازن إلى الوضع $u(x,t)$ والعنصر dx تحت محصلة قوى الشد

$$T u_{xx}\, dx = T u_x\Big|_{x+\Delta x} - T u_x\Big|_{x}$$

يقطع خلال زمن dt المسافة $u_t(x,t)\,dt$ وبالتالي العمل المبذول للخيط كله هو

$$\left\{\int_0^L T u_{xx} u_t\, dx\right\} dt = \left\{T u_x u_t\Big|_0^L - T\int_0^L u_x u_{xt}\, dx\right\} dt$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L T(u_x)^2\, dx\right\} dt + T u_x u_t\Big|_0^L$$

بإجراء التكامل بالنسبة لـ t من 0 حتى t نجد

$$\frac{1}{2}\int_0^L T(u_x)^2\, dx\Big|_0^t + \int_0^t T u_x u_t\Big|_0^L dt \Rightarrow U = \frac{1}{2}\int_0^L T u_x^2(x,t)\, dx$$

$= 0$ لأن الطرفين مثبتين بالشروط الحدية

$u(0,t) = u(l, t$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\,[u_t(x,t)]^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L T u_x^2(x,t)\,dx$$

ثانياً : نفرض أن الحل يعطى بالشكل $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$u_{xx} = X''Y \;,\; u_{yy} = XY'' \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \lambda \quad (2)$$

$$u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0)\,Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$$

$$u(a,y) = 0 \Rightarrow X(a)\,Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(a) = 0}$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(x)\,Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0}$$

$$\boxed{u(x,b) = X(x)\,Y(b) = \sin\frac{n\pi x}{L}}$$

$$X'' - \lambda X = 0$$

نناقش الحالات :

1- $\lambda = 0$ (3) $\Leftarrow$ $X(x) = Ax + B$, $X(0) = B = 0$, $X(b) = Ab = 0 \Rightarrow A = 0$

مرفوض

2- $\lambda > 0$ (3) $\Leftarrow$ $m^2 - \lambda = 0$ $\Leftarrow$ $m = \mp\sqrt{\lambda}$ $\Leftarrow$ $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$X(0) = A + B \Rightarrow A = -B \qquad X(b) = A\left(e^{\sqrt{\lambda}b} - e^{-\sqrt{\lambda}b}\right) = 0 \Rightarrow A = 0$$

مرفوض

3- $\lambda < 0$ $\Leftarrow$ $m^2 = -(-\lambda)$ $\Leftarrow$ $m = \mp i\sqrt{-\lambda}$

$$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x \quad (2)$$

$$X(0) = A = 0 \;,\; X(a) = B\sin\sqrt{-\lambda}\,a = 0 \;,\; B \neq 0$$

$$\sin\sqrt{-\lambda}\,a = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\,a = n\pi \;\; n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{a^2}$$

$$X_n = B_n \sin\frac{n\pi x}{a} \quad (2)$$

$$Y'' + \lambda_n Y = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda_n = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda_n > 0$$

$$Y_n = a_n e^{\sqrt{-\lambda_n}\,y} + b_n e^{-\sqrt{-\lambda_n}\,y} \quad (2)$$

$$Y_n(y) = A_n \cosh\sqrt{-\lambda_n}\,y + B_n \sinh\sqrt{-\lambda_n}\,y$$

باستخدام $Y(0) = 0$ $\Leftarrow$ $Y_n(0) = A_n = 0$ $\Leftarrow$ $Y_n(y) = B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$ (2)

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a}\,\sinh\frac{n\pi y}{a} \quad (2)$$

نعين الثوابت B_n بتطبيق الشرط الحدي

$$u(x,b) = \frac{\sin n\pi x}{L}$$

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n\left(\sinh\frac{n\pi b}{a}\right)}_{c_n} \sin\frac{n\pi x}{a} \;,\; c_n = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$B_n = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\left(\sinh\frac{n\pi b}{a}\right)^{-1}$$

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الثالثة للعام الدراسي 2018-2019

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (36 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. مسألة القيم الابتدائية **معرفة جيداً**
2. المعادلة التفاضلية الجزئية **شبه الخطية**
3. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية **من النوع الزائدي**

ثانياً: بفرض لدينا سلك متجانس بطول L نهايتيه معزولتين، وليكن لدينا مصدر حراري ثابت $q_0 \neq 0$، ولتكن درجة الحرارة الابتدائية $u(x,0) = x$

1. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t.
2. احسب الطاقة الحرارية الكلية لكامل السلك.

السؤال الثاني: (54 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط لانهائي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور OX. نجعل بدايته $x = 0$ تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t.

ثانياً: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية (حيث $u(x,t)$ تبقى محدودة عندما $x \to \infty$)

$$u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 1$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح معادلات تفاضلية جزئية

لطلاب سنة 3 رياضيات الدورة الثالثة 2018 - 2019

السؤال الأول : $\boxed{36}$

أولاً:

1- نقول عن مسألة القيم الابتدائية أنها معرفة جيداً اذا كانت تملك حل وحيد متعلق بشكل مستمر بالقيم الابتدائية 7

2 - اذا كانت خطية بالنسبة لأعلى مشتق تحويه المعادلة 7

3 - اذا كانت $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$ $\Leftarrow B^2-4AC>0$ 7

ثانياً:

1-

$$u_t = ku_{xx}+q_0 \quad 7$$
$$u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$$
$$u(x,0)=x$$

2-

$$E(t)=\int_0^L u(x,t)\,dx \quad 4$$

$$\int_0^L u_t(x,t)\,dx=\int_0^L ku_{xx}\,dx+\int_0^L q_0\,dx = k\,u_x\Big|_0^L+q_0\Big|_0^L$$

ولكن $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$

$$\int_0^L u_t(x,t)\,dx=q_0L \quad 2$$

بالمكاملة بالنسبة لـ t

$$E(t)=\int_0^L u(x,t)\,dx=q_0Lt+c \quad 2$$

$$E(0)=\int_0^L u(x,0)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^L=\frac{L^2}{2} \Rightarrow E(t)=q_0Lt+\frac{L^2}{2}$$

السؤال الثاني : $\boxed{54}$

أولاً:

$$u_{tt}=\alpha^2u_{xx} \quad 5 \qquad 0<x\quad,0<t$$

$$u(x,0)=0 \qquad \& \quad u(x,t)<M$$
$$5 \quad u_t(x,0)=0$$
$$u(0,t)=A_0\sin\omega t$$

بتطبيق تحويل لابلاس 5

$$s^2\hat{u}(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)=\alpha^2\hat{u}_{xx}$$

$$5 \quad \hat{u}_{xx}-\frac{s^2}{\alpha^2}\hat{u}(x,s)=0 \Rightarrow m^2-\frac{s^2}{\alpha^2}=0 \Rightarrow m=\mp\frac{s}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\hat{u}(x,s)=c_1e^{\frac{s}{\alpha}x}+c_2e^{-\frac{s}{\alpha}x} \quad 5$$

لتطبيق الشرط الحدي نجد $\hat{u}(0,s)=\dfrac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}$

$$2 \quad \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}=c_1+c_2 \quad 1$$

$$\hat{u}(x,s)<M \Rightarrow c_1=0 \Rightarrow c_2=\frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2} \quad 1$$

$$\hat{u}(x,s) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2} e^{-s/\alpha \, x} \Rightarrow u(x,t) = G(t) = \begin{cases} A_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) & ; t > \frac{x}{\alpha} \\ 0 & ; t < \frac{x}{\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

ثانياً:

$$u_t = u_{xx} \quad ; x > 0 \, , \; t > 0$$

$$(7) \quad s\hat{u}(x,s) - u(x,0) = \hat{u}_{xx} \quad , \hat{u}(0,s) = \frac{1}{s} \quad (3)$$

$$\hat{u}_{xx} - s\hat{u}(x,s) = 0 \Rightarrow m^2 - s = 0 \Rightarrow \hat{u}(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} \quad (5)$$

$$x \to \infty \Rightarrow c_1 = 0 \; (1) \; ; \sqrt{s} > 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} \hat{u}(x,s) &= c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} \\ \hat{u}(0,s) &= c_2 = \frac{1}{s} \; (1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{U}(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}\,x} \quad (5)$$

$$(2) \quad \Rightarrow u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{v^2} \, dv$$

انتهى الأسئلة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الفصل الثاني للعام الدراسي 2018-2017

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. رتبة معادلة تفاضلية جزئية
2. النمذجة الرياضية
3. المعادلة التفاضلية الجزئية **شبه الخطية**
4. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية **من النوع الزائدي**

ثانياً:

1. **اكتب بدون** استنتاج الشكل العام لمعادلة الموجة في البعد الواحد
2. **استنتج** الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .
3. احسب قيمة تغير هذه الطاقة بالنسبة للزمن في حالة النهايات المثبتة.

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولا: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ،موضوع في درجة حرارة ابتدائية $g(x)$. نبرد النهايتين لدرجة **الصفر**

1. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t .
2. أوجد التوزيع الحراري في كل نقطة من نقاط السلك.

ثانيا: باستخدام **تحويل لابلاس** أوجد حل المسألة التالية

$$u_t = 2u_{xx}$$

حيث

$$u(0,t) = u(5,t) = 0, \quad u(x,0) = 10\sin 4\pi x$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح معادلات تفاضلية جزئية
لطلاب م 3 رياضيات 2017 - 2018

د. منال حسين

س1 الأول

أولاً: 1. هي رتبة أعلى مشتقة جزئية في المعادلة 5

2. النمذجة الرياضية هي عملية استنتاج المعادلة التفاضلية التي توصف الحالة الفيزيائية 5

3. اذا كانت خطية بالنسبة لأعلى مشتقة تحويه المعادلة 5

4. اذا كانت $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G \Leftarrow B^2-4AC>0$ 5

ثانياً: 1. $u_{tt}=c^2u_{xx}$ 5

2. نعين طاقة الذبذبات المستعرضة بالعلاقة $E=K+U$ 1
طاقة حركية ، طاقة كامنة

طاقة حركة العنصر dx من الخيط الذي يتحرك بسرعة هي $v=u_t$ 1

$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\rho\, dx\,(u_t)^2$ 1

وبالتالي الطاقة الحركية لكامل الخيط هي $K=\frac{1}{2}\int_0^L \rho\,[u_t(x,t)]^2dx$ 2

الطاقة الكامنة هي عكس العمل الذي يبذله لكي ينتقل الخيط من وضع التوازن إلى الوضع $u(x,t)$ والعنصر dx تحت محصلة قوى الشد 1

$Tu_{xx}dx=Tu_x\Big|_{x+dx}-Tu_x\Big|_x$

يقطع خلال زمن dt المسافة $u_t(x,t)\,dt$ وبالتالي العمل المبذول الخيط كله هو 1

$\left\{\int_0^L Tu_{xx}u_t\,dx\right\}dt=\left\{Tu_xu_t\Big|_0^L-T\int_0^L u_xu_{xt}\,dx\right\}dt$

$=\left\{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L T(u_x)^2dx\right\}dt+Tu_xu_t\Big|_0^L$

بإجراء التكامل بالنسبة لـ t من 0 إلى t نجد

$-\frac{1}{2}\int_0^L T(u_x)^2dx\Big|_0^t+\underbrace{\int_0^t Tu_xu_t\Big|_0^L dt}_{=0}$ 1

لأن الطرفين مثبتين $\Leftarrow$ السرعة معدومة $u_t(0,t)=u_t(L,t)=0$

$\Rightarrow U=\frac{1}{2}\int_0^L Tu_x^2(x,t)\,dx$ 2

$\Rightarrow E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L \rho\,[u_t(x,t)]^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L Tu_x^2(x,t)\,dx$ 1

3.

$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}\int_0^L[2\rho u_tu_{tt}+2Tu_xu_{xt}]\,dx=\int_0^L \rho u_tu_{tt}+T\left(u_xu_t\Big|_0^L-\int_0^L u_tu_{xx}dx\right)$ 1 1

$=Tu_x(L,t)\,u_t(L,t)-Tu_x(0,t)\,u_t(0,t)+\int_0^L u_t\underbrace{(\rho u_{tt}-Tu_{xx})}_{=0}dx$ ، $\frac{T}{\rho}=c^2$ 1

فإذا كانت النهايات مثبتة يكون $u(0,t)=u(L,t)=0$ وكذلك $u_t(0,t)=u_t(L,t)=0 \Leftarrow$

1

السؤال الثاني أولاً

1. $u_t(x,t) = K u_{xx}(x,t)$ 5 $\quad 0 \le x \le l$

$u(x,0) = g(x)$ 2 $\quad 0 < t$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$ 2

2. نفرض $u(x,t) = X(x)T(t)$ 2 $\Leftarrow$ $\lambda = \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T'}{kT}$ $\Leftarrow$

يتعلق بـ x فقط ، يتعلق بـ t فقط 2

$X'' - \lambda X = 0 \ , \quad T' - k\lambda T = 0$

$u(0,t) = 0 = X(0)\,T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$ 2

$u(l,t) = 0 = X(l)\,T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$

نناقش الحالات $X'' - \lambda X = 0 \Rightarrow m^2 - \lambda = 0$

1- $\lambda = 0$ $\Rightarrow$ $X'' = 0$ $\Rightarrow$ $X(x) = ax + b$ 1

$\left.\begin{array}{l} 0 = X(0) = b \\ 0 = X(l) = al \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = 0$ الحل الصفري مرفوض

2- $\lambda > 0$ $\quad m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \mp\sqrt{\lambda} \Rightarrow X = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ 1

$\left.\begin{array}{l} X(0) = 0 = A + B \\ X(l) = 0 = Ae^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -B \Rightarrow B(e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l}) = 0 \Big\} \Rightarrow A = B = 0$ 1

الحل الصفري مرفوض 1

3- $\lambda < 0$ $\quad m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \mp i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$ 1 1

$X(0) = 0 \Rightarrow A\cos\sqrt{-\lambda}L + B\sin\sqrt{-\lambda}L = 0$ 1 1 $,\ B \ne 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow$

$\sqrt{-\lambda} = n\pi \ ; n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{l^2} \Rightarrow X_n = B_n \sin\dfrac{n\pi x}{l} \ ; n\in\mathbb{Z}$ 1

$T' - \lambda k T = 0 \Rightarrow \dfrac{T'}{T} = \lambda k \Rightarrow T = e^{\lambda k t} = e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}$ 1

$u_n(x,t) = X(x)\,T(t) = C_n \sin\dfrac{n\pi}{l}x \; e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}$ 2

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}$ لتعيين الثوابت نطبق الشرط

$u(x,0) = g(x)$

$\Rightarrow$ 1

$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$ سلسلة جيب توابعية

$C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^L g(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,dx$ 1

ثانياً: 6 2 2

$sU(x,s) - u(x,0) - 2U_{xx}(x,s) = 0 \Rightarrow U_{xx} - \frac{1}{2}sU(x,s) = -5\sin 4\pi x \ ; U(0,s) = U(5,s) = 0$

$U_h = c_1 e^{\sqrt{s/2}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}\,x} \ , U_p = A\cos 4\pi x + B\sin 4\pi x \ ; A = 0 \ , B = 5/_{16\pi^2 + \frac{1}{2}s} \Rightarrow$ 2 2 2

$U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s/2}} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}\,x} + \dfrac{10}{32\pi^2 + s}\sin 4\pi x \Big\} \Rightarrow u(x,t) = 10\, e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x$ 2

ونلاحظ ...

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٧-٢٠١٨

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية.

١. مسألة القيم الابتدائية **معرفة جيداً**

٢. **الحل القوي** لمعادلة تفاضلية جزئية

٣. المعادلة التفاضلية الجزئية **نصف الخطية**

٤. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية من **النوع المكافئ**

ثانياً: اكتب **بدون استنتاج** الشكل العام لمعادلة الموجة في البعد الواحد ، ومن ثم **استنتج** الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .

ثالثاً: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ،موضوع في درجة حرارة u_0 . نضع إحدى النهايتين بدرجة حرارة u_1 ، أما النهاية الثانية للسلك فهي معزولة. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t . (**ايجاد حل النموذج غير مطلوب**)

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط لانهائي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور OX نجعل بدايته $x=0$ تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .

ثانياً: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية $u_x + u_t = x + t$

حيث $$u(x,0) = u(0,t) = 1$$

ثالثاً: بفرض أن تحويل لابلاس يرمز ب L

برهن أن $$L\left(\frac{\sin at}{t}\right) = \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

- نقول عن مسألة قيم ابتدائية أنها معرفة جيداً إذا كانت تملك حل وحيد متعلق بشكل مستمر بالقيم الابتدائية

2 - الحل القوي لمعادلة تفاضلية جزئية هو حل مستمر وقابل للاشتقاق ومشتقاته مستمرة.

3 - المعادلة التفاضلية الجزئية نصف الخطية هي معادلة يكون فيها درجة أعلى هي واحد وأمثاله تابع فقط للمتحولات المستقلة في المعادلة.

4 - المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية من النوع المكافئ هي معادلة من الشكل

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$$

حيث

$$B^2-4AC=0$$

ثانياً: الشكل العام لمعادلة الموجة في البعد الواحد هو $u_{tt}=c^2u_{xx}$

نعين الصيغة التي تعطي طاقة الاهتزازات المستعرضة اللازمة U + ...

طاقة كامنة ...

- طاقة حركة العنصر dx من الخيط الذي يتحرك بسرعة $v=u_t$ هي $v^2=\frac{1}{2}\rho\, dx(u_t)^2$

وبالتالي الطاقة الحركية لكامل الخيط

$$k=\frac{1}{2}\int_0^L \rho[u_t(x,t)]^2dx$$

- الطاقة الكامنة للاهتزازات المستعرضة للخيط:

نحسب العمل الواجب بذله لكي ينتقل الخيط من وضع التوازن إلى الوضع (x,t)

$u(x,0)=0$ $\qquad u(x,t)$

القوى المطبقة على dx هي قوى الشد

$$Tu_x\Big|_{x+\Delta x}-Tu_x\Big|_x=Tu_{xx}dx$$

تقطع خلال الزمن dt المسافة

$u_t(x,t)\,dt \Leftarrow$ العمل المبذول

$$\ldots_{xx}u_t\,dx)\,dt=\left(Tu_xu_t\Big|_0^L-T\int_0^L u_xu_{xt}\,dx\right)dt$$

بإجراء التكامل نجد

$$\ldots t\int_0^L Tu_x^2\,dx)\,dt+Tu_xu_t\Big|_0^L$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^L Tu_x^2 \ldots \Big|_0^t \ldots \int_0^t Tu_xu_t\Big|_0^L dt)=0$$

بالتالي

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L T\, u_x^2(x,t)\, dx$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L T\, u_x^2(x,t)\, dx + \frac{1}{2}\int_0^L \rho\, u_t^2(x,t)$$

ثالثاً:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < \ell \ , \ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0 \ , \ u_x(0,t) = 0 \ , \ u(\ell,t) = u_1$$

السؤال الثاني.

أولاً:

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x \ , \ 0 < t$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad \& \quad u(x,t) < M$$

$$u(0,t) = A_0 \sin \omega t$$

نطبق تحويل لابلاس

$$s^2 \hat{u}(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0) = \alpha^2 \hat{u}_{xx}$$

$$\hat{u}_{xx} - \frac{s^2}{\alpha^2}\hat{u}(x,s) = 0$$

$$m^2 - \frac{s^2}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow m = \mp \frac{s}{\alpha} \Rightarrow \hat{u}(x,s) = c_1 e^{\frac{s}{\alpha}x} + c_2 e^{-\frac{s}{\alpha}x}$$

نطبق الشرط الحدي

$$\hat{u}(0,s) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2} = c_1 + c_2$$

$$c_1 = 0 \Leftarrow \hat{u}(x,s) < M$$

$$c_2 = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2} \Leftarrow$$

$$\hat{u}(x,s) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2} e^{-\frac{s}{\alpha}x} \Rightarrow u(x,t) = G(t) = \begin{cases} A_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) & ; t> \\ 0 & t < \frac{x}{\alpha} \end{cases}$$

ثانياً:

$$u_x + u_t = x + t \qquad ; \ u(x,0) = u(0,t) = 1$$

$$\hat{u}_x + s\hat{u}(x,s) - u(x,0) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} \Rightarrow \hat{u}_x + s\hat{u}(x,s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + 1$$

$$\mu = e^{sx} \Rightarrow \hat{u}(x,s) = e^{-sx}\left(c + \int \left(\frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + 1\right) e^{sx}\, dx\right) = c e^{-sx} + \frac{1}{s} + \frac{x}{s^2}$$

لحساب c : $\hat{u}(0,s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s} = c + \frac{1}{s} \Rightarrow$

$$c = 0 \Rightarrow \hat{u}(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{x}{s^2} \Rightarrow u(x,t) = 1 + xt$$

ثالثاً:

$\mathcal{L}^{-1}(\arctan\frac{a}{s}) = f(t)$

لدينا

$$\left(\arctan \frac{a}{s}\right)' = \frac{-a}{s^2+a^2} \quad \& \ \mathcal{L}^{-1}(f'(s)) = -t f(t) \Rightarrow f(t) = \frac{-\mathcal{L}^{-1}(f'(s))}{t} = \frac{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)}{t}$$

$$f(t) = \frac{\sin at}{t} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\arctan\frac{a}{s}\right) = \frac{\sin at}{t} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin at}{t}\right) = \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$$

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الاضافية ٢٠١٦-٢٠١٧

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (٢٠ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$xu_{xx} + 25x^2 yu_{xy} + xu_{yy} + yu_x + u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة : ١- مكافئية ٢- ناقصية ٣- زائدية .

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا سلك متجانس بطول ٢٠ ، درجة حرارة نهايتيه الابتدائية (على الترتيب ٢٠، ٦٠)، ودرجة حرارة نهايتيه بعد الاتزان (على الترتيب ٣٠، ٤٠). أوجد التوزيع الحراري عند الزمن t والموضع x .

السؤال الثالث: (٣٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 ،$$

$$u(x,b) = \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح مقرر / معادلات تفاضلية جزئية /

20

السؤال الأول:

$$xu_{xx}+25x^2y\,u_{xy}+xu_{yy}+yu_x+u=0$$

(5) $\Delta=B^2-4AC$

$\Delta=625x^4y^2-4x^2 \Leftarrow$

1- زائدية $\Leftarrow B^2-4AC>0 \Leftarrow$ (5) $625x^4y^2-4x^2>0$

2- مكافئية $\Leftarrow B^2-4AC=0 \Leftarrow$ (5) $625x^4y^2-4x^2=0$

3- ناقصية $\Leftarrow B^2-4AC<0 \Leftarrow$ (5) $625x^4y^2-4x^2<0$

السؤال الثاني 20

$$u(x,0)=20+\frac{60-20}{20}x=20+2x \quad (2)$$

التوزيع بعد الاتزان

$$w(x)=3+\frac{40-30}{20}x=30+\frac{1}{2}x \quad (2)$$

$$u(x,t)=w(x,t)+\bar{u}(x,t) \quad (2)$$

$$\bar{u}_t=k\bar{u}_{xx}$$

(3) $\bar{u}(0,t)=\bar{u}(L,t)=0$

(3) $\bar{u}(x,t)=X(x)T(t)$

$X''-\lambda X=0 \quad , \quad T'-k\lambda T=0$ (1)

$\bar{u}(0,t)=0=X(0)\,T(t)=0 \Rightarrow X(0)=0$ (1)

$\bar{u}(L,t)=0=X(L)\,T(t)=0 \Rightarrow X(L)=0$

$\lambda>0\ ,\ \lambda=0$ حلول مرفوضة (3)

$\lambda<0$

$m=\mp i\sqrt{-\lambda} \Leftarrow m^2-\lambda=0$

(1) $X=A\cos\sqrt{-\lambda}\,x+B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$X(0)=0 \Rightarrow A=0$

$B\sin\sqrt{-\lambda}L=0 \Rightarrow \lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow X_n=A_n\sin\frac{n\pi x}{L}$

(1) $T=e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$

$\bar{u}_n(x,t)=X(x)T(t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$ (1)

$u(x,t)=30+\frac{1}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$

$20+2x=u(x,0)=30+\frac{1}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow \frac{3}{2}x-10=u(x,0)=30+\frac{1}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L}$

$\Rightarrow \ldots \frac{2}{\ldots}\int^{20}(\frac{3}{\ldots}\ldots)\sin n\pi x\,dx$

35

السؤال الثالث

5

نفرض أن الحل يشكل $u = X(x)\,Y(y)$

$u_{xx} = X''Y \;،\; u_{yy} = XY'' \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$ 5

1

$u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0)\,Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0} \;،\; u(a,y) = 0 \Rightarrow X(a)\,Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(a) = 0}$ 1

$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(x)\,Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0}$ 1

$u(x,b) = X(x)\,Y(b) = \sin\frac{m\pi x}{L}$ 1

$X'' - \lambda X = 0$ 1

نناقش الحالات

1- $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$ 3

$X(0) = B = 0 \;،\; X(b) = Ab = 0 \Rightarrow A = 0$ مرفوض

2- $\lambda > 0 \Rightarrow m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \mp\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B \;،\; X(b) = A(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}) = 0 \Rightarrow A = 0$

مرفوض

3- $\lambda < 0 \Rightarrow m^2 = -(-\lambda) \Rightarrow m = \mp i\sqrt{\lambda}$ 2

$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$X(0) = A = 0 \;،\; X(a) = B\sin\sqrt{-\lambda}\,a = 0 \;،\; B \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\,a = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\,a = n\pi \;;\; n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{a^2}$ 2

$X_n = B_n \sin\frac{n\pi x}{a}$ 2

1 $Y'' + \lambda_n Y = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda_n = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda_n > 0$ 1

$Y_n = a_n e^{\sqrt{-\lambda_n}\,y} + b_n e^{-\sqrt{-\lambda_n}\,y}$ 1

$\Rightarrow Y_n(y) = A_n\cosh\sqrt{-\lambda_n}\,y + B_n\sinh\sqrt{-\lambda_n}\,y \Rightarrow Y_n(0) = A_n = 0 \Leftarrow Y(0) = 0$ 2

$Y_n(y) = B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$

$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$ 2

لتعين B_n نطبق الشرط $u(x,b) = \frac{\sin n\pi x}{L}$ نجد 1

$\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\left(\sinh\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a} = \sum C_n \sin\frac{n\pi x}{a}$

$\ldots \; 2 \int_0^a \sin\frac{n\pi x}{\ldots}\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \left(\sinh\frac{n\pi b}{a}\right)$

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$y^2u_{xx} + 5u_{xy} - 2x^3u_{yy} - 3u_x + 2u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة : ١- مكافئية ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة **منتظمة** c عبر أنبوب **رفيع** G ذو مقطع **منتظم** A . استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبّر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثالث: (٤٠ درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط مرن مشدود وموضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايتيه، نزيح الخيط عن وضع التوازن ونتركه فنلاحظ موجة تعبر هذا الخيط:

١. اكتب (**دون استنتاج**) النموذج الرياضي الذي يصف الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x واللحظة t **مع وجود التخامد**.

٢. اذا علمت أن الطاقة الكلية للخيط تعطى بالعلاقة

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(u_t^2 + c^2u_x^2\right)dx$$

برهن أن الطاقة الكلية للخيط متخامدة.

ثانياً: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المعادلة

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0; \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0 ، \quad u(x,0) = 2\sin x$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية
لطلاب السنة الثالثة ف2 2016 - 2017

15

سؤال الأول:

$$y^2 u_{xx} + 5u_{xy} - 2x^3 u_{yy} - 3u_x + 2u = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$\Delta = 25 - 4(y^2)(-2x^3) \quad 3$$

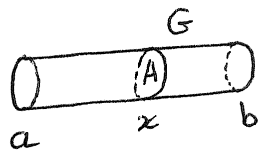
1- زائدية $\Leftarrow$ $B^2 - 4AC > 0$ $\Leftarrow$ $25 + 8x^3y^2 > 0$ 4

2- مكافئية $\Leftarrow$ $B^2 - 4AC = 0$ $\Leftarrow$ $25 + 8x^3y^2 = 0$ 4

3- ناقصية $\Leftarrow$ $B^2 - 4AC < 0$ $\Leftarrow$ $25 + 8x^3y^2 < 0$ 4

سؤال الثاني

20



اتجاه جريان الماء $\longrightarrow$

نعبر عن G بالمجال المفتوح (a, b)
لتكن السرعة $c > 0$ بالاتجاه الموجب للحركة 2
على المحور x . ونفترض أن تركيز المادة الكيميائية
ثابت عبر المقطع A في كل نقطة x وبذلك تركيز المادة الكيميائية
يمكن $u(x,t)$ قابلة للاشتقاق ومستمرة وتعبر عن تركيز المادة الكيميائية في النقطة x
اللحظة t ، وبالتالي كمية المادة الكيميائية تتغير بتغير x فقط
تعطى بالتكامل 2 المادة الكيميائية الموجودة في مقطع الأنبوب بين الموضعين x و a

$$\int_a^x A u(s,t)\, ds$$

بما أن الماء يجري بسرعة c فإنه باللحظة $h+t$ سيكون لدينا نفس كمية المادة الكيميائية

$$\int_a^x A(u(s,t)\, ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A u(s, t+h)\, ds \quad 4$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x نجد

$$A u(x,t) = A u(x+ch, t+h) \Rightarrow u(x,t) = u(x+ch, t+h) \quad 4$$

نشتق بالنسبة لـ h نجد 4

$$0 = u_t(x+ch, t+h) + c\, u_x(x+ch, t+h)$$

نجعل $h \to 0$ فنجد 4

$$u_t(x,t) + c\, u_x(x,t) = 0 \quad \forall (x,t)$$

السؤال الثالث

أولاً ١- النموذج الرياضي

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma u_t = 0 \quad 5$$

$$\gamma > 0 \,, \quad 0 < x < L \qquad u_t(l,t) = u_t(0,t) = 0 \quad 5$$

-2

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (u_t^2 + c^2 u_x^2)\,dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\int_0^l 2u_t u_{tt} + 2c^2 u_x u_{xt})\,dx \quad 5$$

$$= \int_0^l u_t u_{tt}\,dx + c^2 \left(u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l u_t u_{xx}\,dx\right)$$

$$= c^2 u_t(l,t)\,u_x(l,t) - c^2 u_t(0,t)\,u_x(0,t) + \int_0^l u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})\,dx$$

$$= 0 + \int_0^l u_t(-\gamma u_t)\,dx = -\int_0^l \gamma u_t^2 < 0 \quad 5$$

$\Leftarrow \quad \frac{dE}{dt} < 0$ وبالتالي الطاقة الكلية متناقصة

ثانياً

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \,; \quad 0 < x < \pi \,, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \,, \quad u_t(x,0) = 0 \,, \quad u(x,0) = 2\sin x$$

بتطبيق تحويل لابلاس

$$s^2 U(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0) - 9U_{xx} = 0 \quad 10$$

$$s^2 U(x,s) - 9U_{xx} - 2s\sin x = 0$$

$$U_{xx} - \frac{1}{9}s^2 U = -\frac{2}{9}s\sin x \quad 3 \qquad m^2 - \frac{1}{9}s^2 = 0 \Rightarrow m = \mp\frac{1}{3}s$$

$$U_h(x,s) = c_1(s)\,e^{-\frac{1}{3}sx} + c_2(s)\,e^{\frac{1}{3}sx} \qquad ; \; U(0,s) = 0 \,, \; U(\pi,s) = 0$$

$$U(0,s) = c_1(s) + c_2(s) = 0 \quad 2$$

$$U(\pi,s) = c_1(s)\,e^{-\frac{1}{3}\pi s} + c_2(s)\,e^{\frac{1}{3}\pi s} = 0$$

$\Bigg\} \Rightarrow c_1(s) = c_2(s) = 0$

$$U_p(x,s) = A(s)\sin x + B(s)\cos x$$

$$(U_p)_x = A(s)\cos x - B(s)\sin x$$

$$(U_p)_{xx} = -A(s)\sin x - B(s)\cos x$$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$A(s) = \frac{2/9\,s}{1 + \frac{1}{9}s^2} \,, \quad B(s) = 0 \quad 2$$

$$U(x,s) = \frac{2/9\,s}{1 + 1/9\,s^2}\sin x \Rightarrow$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي

$$3 \qquad u(x,t) = 2\sin x\cos 3t$$

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$xu_{xx} - 6xu_{xy} + x^4u_{yy} + yu_x + u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة: ١- مكافئية ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا خيط مرن ممدود (كثافته ثابتة ρ) وموضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايتيه اليسارية L و اليمينية R. يهز الخيط في نهايته L عندها نلاحظ موجة تعبر هذا الخيط. استنتج (مع الشرح) النموذج الرياضي الذي يصف الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x واللحظة t.

السؤال الثالث: (٤٠ درجة)

أولاً:

أوجد حل المعادلة التفاضلية $xu_x + yu_y = xe^{-u}$

المحقق للشرط $u(x, x^2) = 0$

ثانياً:

بفرض لدينا سلك متجانس بطول ٢٠، درجة حرارة نهايتيه الابتدائية (على الترتيب ٢٠، ٦٠)، ودرجة حرارة نهايتيه بعد الاتزان (على الترتيب ٣٠، ٤٠). أوجد التوزيع الحراري عند الزمن t والموضع x.

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر: د. منال حسين

م الرياضيات

سلم تصحيح معادلات تفاضلية جزئية

لطلاب السنة الثالثة ف1 2016 - 2017

السؤال الأول

$$\Delta = B^2-4AC \Rightarrow \Delta = 36x^2-4x^5 \quad (3)$$

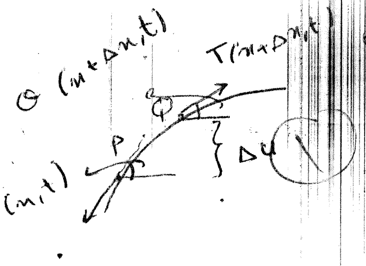
1 زائدية $\Leftarrow B^2-4AC>0 \Leftarrow 36x^2-4x^5>0$ (2)

2 ناقصية $\Leftarrow B^2-4AC<0 \Leftarrow 36x^2-4x^5<0$ (2)

3 مكافئية $\Leftarrow B^2-4AC=0 \Leftarrow 36x^2-4x^5=0$ (2)

السؤال الثاني

نفرض أن مقدار الإزاحة في جزء صغير من الخيط P, Q بالشكل



(1)

$\theta(x,t)$ الزاوية بين مماس الخيط والخط الأفقي

$T(x,t)$ توتر الخيط في الموضع x واللحظة t (2)

ρ كثافة الخيط

نفرض 1) كثافة الخيط ثابتة وبالتالي كتلة الخيط بين P, Q هي $\rho \Delta s$ حيث $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta u)^2}$

2) مقدار الإزاحة بين P, Q هو u ومشتقاته صغيرة بقدر كافٍ أي $\Delta x \approx \Delta s \Leftarrow$ كتلة الخيط هي $\rho \Delta x$

3) القوة المطبقة على هذا الجزء من الخيط هي $T(x,t)$ عند P و $T(x+\Delta x,t)$ عند Q وهي ذات قيمة محدودة

4) المقطع المذكور يتحرك فقط بشكل عمودي وبالتالي محصلة القوى الأفقية معدومة

القوى المطبقة على هذا المقطع

$T(x+\Delta x,t)$ بزاوية $\theta(x+\Delta x,t)$ مع الأفق

$T(x,t)$ بزاوية $\theta(x,t)$ " "

القوى الأفقية معدومة (2)

$$-T(x,t)\cos\theta(x,t) + T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t) = 0$$

$$T(x,t)\cos\theta(x,t) = T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t) = T \quad (3)$$

محصلة القوى العمودية = الكتلة × التسارع (2)

$$T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t) = \rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

نقسم على T

$$\frac{\rho}{T}\,\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tan\theta(x+\Delta x,t) - \tan\theta(x,t) \quad (2)$$

ولكن

$\tan\theta(x+\Delta x,t) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u_x(x,t)$ (2)

$\tan\theta(x+\Delta x,t) = u_x(x+\Delta x,t)$

$\frac{\rho}{T}\,\Delta x\, u_{tt}(x,t) = u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)$ (2)

نقسم على Δx ونجعلها تسعى للصفر $\Leftarrow$

$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$ (1)

حيث $c^2 = \frac{T}{\rho}$

السؤال الثالث:

أولاً

$x u_x + y u_y = x e^{-u}$; $u(x,x^2)=0$

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x e^{-u}}$ (4) $\Rightarrow \frac{y}{x} = c_1$ (4)

$e^{u} - x = c_2$ (4)

$e^{u} - x = f(y/x)$

(4) $u = \ln(x + f(y/x))$

(4) $u(x,x^2) = \ln(x+f(x)) = 0 \Rightarrow x + f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1-x$

$u = \ln(x + 1 - \frac{y}{x})$

ثانياً

$u(x,0) = 20 + \frac{60-20}{20}x = 20 + 2x$ (3)

التوزيع الذي بعد الاتزان

$w(x) = 30 + \frac{40-30}{20}x$ (3)

$= 30 + \frac{1}{2}x$

$c_n = \frac{2}{20}\int_0^{20} (\frac{3}{2}x - 10)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$u(x,t) = w(x,t) + \bar u(x,t)$ (3)

$\bar u_t = k \bar u_{xx}$

$\bar u(0,t) = \bar u(L,t) = 0$ (3)

$\bar u(x,t) = X(x)T(t)$ (3) $\Rightarrow$

$X'' - \lambda X = 0,\; T' - k\lambda T = 0$ (1) (1)

$\bar u(0,t) = 0 = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

$\bar u(L,t) = 0 = X(L)T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$

$m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \mp i\sqrt{-\lambda}$ (1)

$X = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B\sin\sqrt{-\lambda}L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$

$\Rightarrow X_n = A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$, $T = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$ (1) $\Rightarrow \bar u_n(x,t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-n^2\pi^2/L^2\,kt}$ (1)

$u(x,t) = 30 + \frac{1}{2}x + \sum c_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$; $20 + 2x = u(x,0) = 30 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}$

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الاضافية للعام الدراسي 2015-2016

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (٢٠ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$u_{xx} - 5u_{xy} + x^3 u_{yy} + u_x + 2u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة : ١- مكافئية ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا خيط مرن مشدود (كثافته ثابتة ρ) وموضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايتيه اليسارية L و اليمينية R . نهز الخيط في نهايته L عندها نلاحظ موجة تعبر هذا الخيط. استنتج (مع الشرح) النموذج الرياضي الذي يصف الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x واللحظة t .

السؤال الثالث: (٣٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(a, y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$$
$$u(0, y) = f(y)$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية > لطلاب السنة الثالثة الفصل الثاني للعام الدراسي 2015-2016	الدرجة: ٧٥ المدة: ساعتان

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$yu_{xx} - u_{xy} + 2x^2u_{yy} - u_x + u = 0$$

عيّن المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة: ١- مكافئية ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $xu_x + yu_y = xe$

المحقق للشرط $u(x,x^2) = 0$

السؤال الثالث: (١٥ درجة)

بفرض لدينا قضيب متجانس بطول L نهايتيه معزولتين، وليكن لدينا مصدر حراري ثابت $q_0 \neq 0$، ولتكن درجة الحرارة الابتدائية $u(x,0) = x$

١. اكتب المعادلة التفاضلية والشروط الحدية لهذا النموذج.

٢. أحسب الطاقة الحرارية الكلية لكامل القضيب

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$$
$$u(0,y) = f(y)$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية

الأول

$$y u_{xx} - u_{xy} + 2x^2 u_{yy} - u_x + u = 0$$

$\Delta = B^2 - 4AC \Leftarrow \Delta = 1 - 8x^2 y$ (3)

1- زائدية $B^2 - 4AC > 0$ (2) $\Leftarrow 1 - 8x^2 y > 0$ (2)

2- مكافئية $B^2 - 4AC = 0$ (2) $\Leftarrow 1 - 8x^2 y = 0$ (2)

3- ناقصية $B^2 - 4AC < 0$ (2) $\Leftarrow 1 - 8x^2 y < 0$ (2)

السؤال الثاني

$$x u_x + y u_y = x e^{-u}$$

$$u(x, x^2) = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x e^{-u}} \ (5) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y}{x} &= c_1 \ (4) \\ e^{u} - x &= c_2 \ (4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{u} - x = f(y/x) \ (5)$$

$$u = \ln(x + f(y/x))$$

$$u(x, x^2) = \ln(x + f(x)) = 0 \Rightarrow x + f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - x \ (1)$$

$$u = \ln\left(x + 1 - \frac{y}{x}\right) \ (1)$$

السؤال الثالث

المعادلة التفاضلية التي تصف النموذج هي

$$u_t(x,t) = k u_{xx} + q_0 \ (5) \quad , \quad u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \ (2)$$

لذلك نحسب

$$E(t) = \int_0^L u(x,t)\, dx \ (3)$$

$$\int_0^L u_t(x,t)\, dx = \int_0^L k u_{xx}\, dx + \int_0^L q_0\, dx = k u_x \Big|_0^L + q_0 L$$

وبما أن $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

$$\int_0^L u_t(x,t)\, dx = q_0 L$$

$$E(t)=\int_0^L u(x,t)\,dx = q_0 L t + c \quad ③$$

$$E(0)=\int_0^L u(x,0)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{L^2}{2} \Rightarrow E(t) = q_0 L t + \frac{L^2}{2} \quad ②$$

بالنسبة لـ [illegible]

السؤال الرابع :

نفرض أن الحل على الشكل

$$u = X(x)\,Y(y) \quad ②$$

$$u_{xx} = X''Y \quad , \quad u_{yy} = XY'' \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \quad ②$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \Rightarrow X'' - \lambda X = 0 \quad \& \quad Y'' + \lambda Y = 0 \quad ②$$

$$u(0,y) = f(y) = X(0)\,Y(y) \quad ①$$

$$u(a,y) = 0 \Rightarrow X(a)\,Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0 \quad ①$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(x)\,Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \quad ①$$

$$u(x,b) = 0 \Rightarrow X(x)\,Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0 \quad ①$$

نبدأ بإيجاد حلول المعادلة

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

$$Y = Ay + B \Leftarrow \lambda = 0$$

نعوض
$$\begin{cases} Y(0) = B = 0 \quad ① \\ Y(b) = Ab = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$$

$$Y(y) = A e^{\sqrt{-\lambda}\,y} + B e^{-\sqrt{-\lambda}\,y} \Leftarrow \lambda < 0$$

$$A = B = 0 \Leftarrow Y(0) = Y(b) = 0 \quad ①$$

$$\Leftarrow \lambda > 0$$

$$\Leftarrow m = \mp i\sqrt{\lambda} \Leftarrow m^2 = -\lambda \Leftarrow m^2 + \lambda = 0$$

$$② \quad Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}\,y + B\sin\sqrt{\lambda}\,y$$

$$Y(0) = A = 0$$

$$\Leftarrow \sin\sqrt{\lambda}\,b = 0 \Leftarrow Y(b) = B\sin\sqrt{\lambda}\,b = 0 \quad B \neq 0$$

$$\sqrt{\lambda}\,b = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad ②$$

$$Y_n(y) = B \sin \frac{n\pi y}{b} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$$X'' - \lambda X = 0$$

$\lambda > 0 \quad m^2 - \lambda = 0 \Leftarrow m^2 = \lambda \Leftarrow m = \mp\sqrt{\lambda}$

$$X_n(x) = a_n e^{\sqrt{\lambda_n}\, x} + b_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\, x} \quad (1)$$

$$= A_n \cosh \frac{n\pi x}{b} + B_n \sinh \frac{n\pi x}{b}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$X_n = A_n \cosh \frac{n\pi}{b}(x-a) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right); \quad n \in \mathbb{N}$$

$$X(a) = 0$$ نعوض في الشرط

$$X_n(a) = A_n \underbrace{\cosh 0}_{=1} + B_n \underbrace{\sinh 0}_{=0}$$

$$= A_n = 0 \quad (2)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi}{b}(x-a) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

$$u(0,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(B_n \sinh \frac{-n\pi}{b} a\right)}_{C_n} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$C_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy \Rightarrow$$

$$B_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy \left(\sinh \frac{-n\pi a}{b}\right)^{-1}$$

$\Leftarrow$ اكمل الحل بالطريقتين السابقتين

انتهت الاسئلة

سلم تصحيح

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الاضافية للعام الدراسي ٢٠١٤-٢٠١٥

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$y^2 u_{xx} + u_{xy} - x\, u_{yy} - 3u_x - 2u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة : ١- مكافئية ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة **منتظمة** c عبر أنبوب **رفيع** G ذو مقطع **منتظم** A . استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثالث: (١٥ درجة)

صنّف المعادلة التفاضلية التالية $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

ومن ثم أوجد حلّها بوجود الشروط التالية:

$$u_t(x,0) = w(x) \quad , \quad u(x,0) = v(x)$$

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$$
$$u(0,y) = f(y)$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

السؤال الأول

$$y^2 u_{xx} + u_{xy} - x u_{yy} - 3u_x - 2u = 0$$

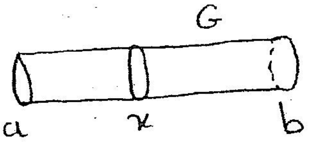
$\Delta = B^2 - 4AC \Leftarrow \Delta = 1 + 4xy^2$ (3)

1- زائدية $\Leftarrow$ (2) $B^2 - 4AC > 0 \Leftarrow 1 + 4xy^2 > 0$ (2)

2- مكافئية $\Leftarrow$ $B^2 - 4AC = 0$ (2) $\Leftarrow 1 + 4xy^2 = 0$ (2)

3- ناقصية $\Leftarrow$ (2) $B^2 - 4AC < 0 \Leftarrow 1 + 4xy^2 < 0$ (2)

السؤال الثاني (20)



اتجاه جريان الماء $\rightarrow$

لنفرض أن G بالمجال المفتوح (a,b) ولتكن السرعة $c > 0$ بالاتجاه الموجب (2) للحركة على المحور x ونفترض أن تركيز المادة الكيميائية ثابت عبر المقطع A في كل نقطة x وبذلك تركيز المادة الكيميائية يتغير بتغير x فقط ولتكن $U(x,t)$ قابلة للاشتقاق ومستمرة ونعبر عن تركيز المادة الكيميائية في النقطة x في اللحظة t وبالتالي كمية المادة الكيميائية الموجودة في مقطع الأنبوب بين الموضعين a، x تمثل بالتكامل (2) $\int_a^x A u(s,t)\,ds$

وبما أن الماء يجري بسرعة c فإنه باللحظة $t+h$ سيكون لدينا نفس كمية المادة الكيميائية (4)

$$\int_a^x A u(s,t)\,ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A u(s,t+h)\,ds$$

لنشتق الطرفين بالنسبة لـ x نجد (4)

$$Au(x,t) = Au(x+ch, t+h) \Rightarrow u(x,t) = u(x+ch, t+h)$$

لنشتق بالنسبة لـ h نجد (4)

$$0 = u_t(x+ch, t+h) + c u_x(x+ch, t+h)$$

نجعل $h \longrightarrow 0$ نجد (4)

$$u_t(x,t) + c u_x(x,t) = 0 \quad \forall (x,t)$$

السؤال الثالث : (١٠)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

(3) معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الثانية من النوع الزائدي

(معادلة الموجة)

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \quad 3$$

$$u(x,0) = \boxed{f(x) + g(x) = v(x)} \quad 1$$

$$u_t(x,0) = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct)\Big|_{t=0}$$

$$= -cf'(x) + cg'(x) = w(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) - g(x) = -\frac{1}{c}\int_0^x w(s)\,ds}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(v(x) - \frac{1}{c}\int_0^x w(s)\,ds\right) \quad 3$$

$$g(x) = v(x) - f(x) = \frac{1}{2}v(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{c}\int_0^x w(s)\,ds \quad 3$$

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[v(x-ct) + v(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct} w(s)\,ds - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct} w(s)\,ds\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[v(x-ct) + v(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} w(s)\,ds\right]. \quad 1$$

(25)

السؤال الرابع : بفرض أن الحل على الشكل (٢)

$$u = X(x)\,Y(y) \quad 2$$

$$u_{xx} = X''Y \;,\; u_{yy} = XY'' \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \lambda$$

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \& \quad Y'' + \lambda Y = 0$$

$$u(0,y) = f(y) = X(0)\,Y(y) \quad 1$$

$\ldots Y(y) = 0 \Rightarrow X(a)\,Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0$

$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(x)\,Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$ (1)

$u(x,b) = 0 \Rightarrow X(x)\,Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0$ (1)

نبدأ بإيجاد حلول المعادلة

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

$\lambda = 0 \Leftarrow \quad Y = AY + B$

(1) مرفوض
$Y(0) = B = 0$
$Y(b) = Ab = 0 \Rightarrow A = 0$

$\lambda < 0 \Leftarrow \quad Y(y) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\,y} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\,y}$

مرفوض $A = B = 0 \Leftarrow Y(0) = Y(b) = 0$ (1)

$\lambda > 0 \Leftarrow$

$m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda \Rightarrow m = \mp i\sqrt{\lambda}$

(2) $Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}\,y + B\sin\sqrt{\lambda}\,y$

$Y(0) = A = 0$

$Y(b) = B\sin\sqrt{\lambda}\,b = 0 \quad B \neq 0 \Rightarrow$

$\sin\sqrt{\lambda}\,b = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,b = n\pi \Rightarrow$

$\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{b^2}$ (2) $\Rightarrow \quad Y_n(y) = B\sin\dfrac{n\pi y}{b} \quad n \in N$ (2)

$$X'' - \lambda X = 0$$

$\lambda > 0, \quad m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m^2 = \lambda \Rightarrow m = \mp\sqrt{\lambda}$

$X_n(x) = a_n e^{\sqrt{\lambda_n}\,x} + b_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,x}$ (1)

$= A_n \cosh\dfrac{n\pi x}{b} + B_n \sinh\dfrac{n\pi x}{b}\ ; n \in N$ (1)

$X_n = A_n \cosh\dfrac{n\pi}{b}(x-a) + B_n \sinh\left(\dfrac{n\pi}{b}(x-a)\right) n \in N$

نعوض بالشرط $X(a) = 0$

$$X_n(a) = A_n \underbrace{\cosh 0}_{=1} + B \underbrace{\sinh 0}_{=0}$$

$$= A_n = 0 \qquad (2)$$

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi}{b}(x-a) \sin \frac{n\pi y}{b}} \qquad (2)$$

$$u(0,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(B_n \sinh \frac{-n\pi}{b} a\right)}_{C_n} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$C_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\boxed{B_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy \left(\sinh \frac{-n\pi a}{b}\right)^{-1}}$$

⟸ اكل يبط بالعلامات (٢+٣) ,(٤)

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٤-٢٠١٥

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$yu_{xx} + u_{xy} - x^2 u_{yy} - u_x - u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة : ١- مكافئية ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة **منتظمة** C عبر أنبوب **رفيع** G ذو مقطع **منتظم** A. استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثالث: (١٥ درجة)

بفرض لدينا قضيب متجانس بطول L نهايتيه معزولتين، وليكن لدينا مصدر حراري ثابت $q_0 \neq 0$، ولتكن درجة الحرارة الابتدائية $u(x,0) = x$

١. اكتب المعادلة التفاضلية والشروط الحدية لهذا النموذج.

٢. احسب الطاقة الحرارة الكلية لكامل القضيب.

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0$$

$$u(x,b) = \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال حسين

٢١-٦-٢٠١٥

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية جزئية الفصل الثاني ٢٠١٥

لطلاب السنة الثالثة رياضيات مح 2014 - 2015

السؤال الأول : 15

$$y u_{xx} + u_{xy} - x^2 u_{yy} - u_x - u = 0$$

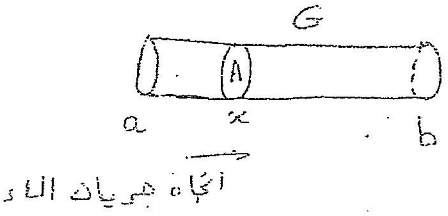
$$\Delta = B^2 - 4AC \Leftarrow \Delta = 1 + 4x^2 y$$

1 - زائدية ⇐ $B^2 - 4AC > 0$ ⇐ $1 + 4x^2 y > 0$

2 - مكافئية ⇐ $B^2 - 4AC = 0$ ⇐ $1 + 4x^2 y = 0$

3 - ناقصية ⇐ $B^2 - 4AC < 0$ ⇐ $1 + 4x^2 y < 0$

السؤال الثاني :



ـ ليكن G بالمجال المفترض (a,b)

لتكن السرعة $c > 0$ بالاتجاه الموجب لمحور x، ونفترض أن تركيز المادة الكيميائية

ابتداءً من المقطع A في كل نقطة x وبذلك تركيز المادة الكيميائية يتغير بتغير x فقط

لتكن $u(x,t)$ تابعة للاشتقاق ومستمرة وتعبر عن تركيز المادة الكيميائية في النقطة x

في اللحظة t، وبالتالي كمية المادة الكيميائية الموجودة في مقطع الأنبوب بين المقطعين

a و x مضروبة بالعامل

$$\int_a^x A\, u(s,t)\, ds$$

بما أن الماء يجري بسرعة c فإنه في اللحظة $h+t$ سيكون لدينا نفس كمية المادة الكيميائية

$$\int_a^x A\, u(s,t)\, ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A\, u(s,t+h)\, ds$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x نجد

$$A\, u(x,t) = A\, u(x+ch, t+h) \Rightarrow u(x,t) = u(x+ch, t+h)$$

نشتق بالنسبة لـ h نجد

$$0 = u_t(x+ch, t+h) + c\, u_x(x+ch, t+h)$$

15

ثالثاً:

المعادلة التفاضلية التي تصف النموذج هي

$u_t(x,t) = k u_{xx} + q_0$ 3

والشروط الحدية

$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ 3

$E(t) = \int_0^L u(x,t)\,dx$ 2

لذلك نحسب

$\int_0^L u_t(x,t)\,dx = \int_0^L k u_{xx}\,dx + \int_0^L q_0\,dx$ 1

$= k u_x \Big|_0^L + q_0 L$ 1

بما أن $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

$\int_0^L u_t(x,t)\,dx = q_0 L$ ⇐ 1

بالتكامل بالنسبة لـ t نجد

$E(t) = \int_0^L u(x,t)\,dx = q_0 L t + c$ 1 2

$E(0) = \int_0^L u(x,0)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{L^2}{2} \Rightarrow E(t) = q_0 L t + \frac{L^2}{2}$ 1

12

السؤال الرابع: نفرض أن الحل على الشكل 2

$u = X(x)\,Y(y)$ 2

$u_{xx} = X''Y \;,\; u_{yy} = XY'' \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \lambda$ 1 2

$u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$, $u(a,y) = 0 \rightarrow X(a)Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(a) = 0}$ 1 1

$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0}$

$\boxed{u(x,b) = X(x)Y(b) = \sin\frac{n\pi x}{L}}$ 1

نناقش الحالات:

1- $\lambda = 0$ ⇐ $X(x) = Ax + B$

$X'' - \lambda X = 0$ 1

$X(0) = B = 0$ ⇐ $X(b) = Ab = 0$ ⇐ $A = 0$

مرفوض

2- $\lambda > 0$ 1

$m^2 - \lambda = 0$ ⇐ $m = \mp\sqrt{\lambda}$ ⇐ $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$, $X(b) = A(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}) = 0 \Rightarrow A = 0$

مرفوض

3- $\lambda < 0$ ⇐ $m^2 = -(-\lambda)$ ⇐ $m = \mp i\sqrt{-\lambda}$

$\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ (2) $\Leftarrow \sqrt{-\lambda}\, a = n\pi \; ; n \in \mathbb{Z} \Leftarrow \sin\sqrt{-\lambda}\, a = 0$ (1)

$$X_n = B_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$Y'' + \lambda_n Y = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda_n = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda_n > 0$$

$$Y_n = a_n e^{\sqrt{-\lambda_n}\, y} + b_n e^{-\sqrt{-\lambda_n}\, y}$$ (1)

$$Y_n(y) = A_n \cosh\sqrt{-\lambda_n}\, y + B_n \sinh\sqrt{-\lambda_n}\, y$$ (1) $\Leftarrow$

$\Leftarrow Y_n(0) = A_n = 0 \Leftarrow Y(0) = 0$ باستخدام الشرط الحدي (2)

$$Y_n(y) = B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \; ; n \in \mathbb{Z}_+$$ (2)

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a}}$$

لتعيين الثوابت B_n نطبق الشرط الحدي $u(x,b) = \sin\frac{n\pi x}{L}$

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n\left(\sinh\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{a}\, dx$$ (1)

$$\Rightarrow \boxed{B_n = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{a}\, dx \left(\sinh\frac{n\pi b}{a}\right)^{-1}}$$

انتهت الأسئلة