كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

القسم: الرياضيات

السنة: الأولى

المادة: هندسة تحليلية

المحاضرة: 8- نظري

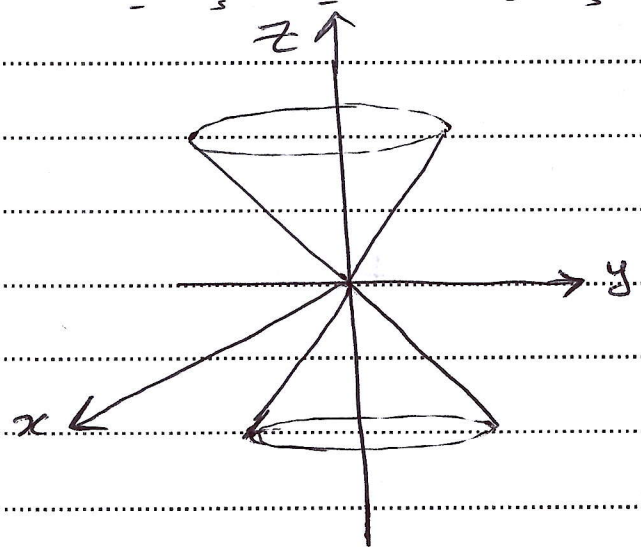
المخروط: سطح من الدرجة الثانية

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

حيث a و b و c ثوابت

متناظر بالنسبة للمحاور الإحداثية والمستويات الإحداثية

ونسمي oz محورة



حالة خاصة:

إذا كان $a=b=c$ فإن السطح هو مخروط دوراني

مثل:

$$x^2+y^2-z^2=0$$

أو

$$x^2+y^2=z^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السطوح الإسطوانية :

هو سطح من الدرجة الثانية ناتج عن دوران مستقيم موازٍ لمستقيم ثابت (محور الاسطوانة) كل معادلة لا تحوي المتحول z تمثل في المستوي xoy منحنياً أما في الفراغ تمثل شكل إسطواني .

تكون معادلة سطوح اسطوانية مولداتها توازي oz

$$a_1x^2+a_2x+b_1y^2+b_2y+d=0$$

نتمم إلى مربع كامل

$$Ax^2+By^2+D=0$$

$$Ax^2+By^2=-D$$

$$\frac{x^2}{-D/A}+\frac{y^2}{-D/B}=1$$

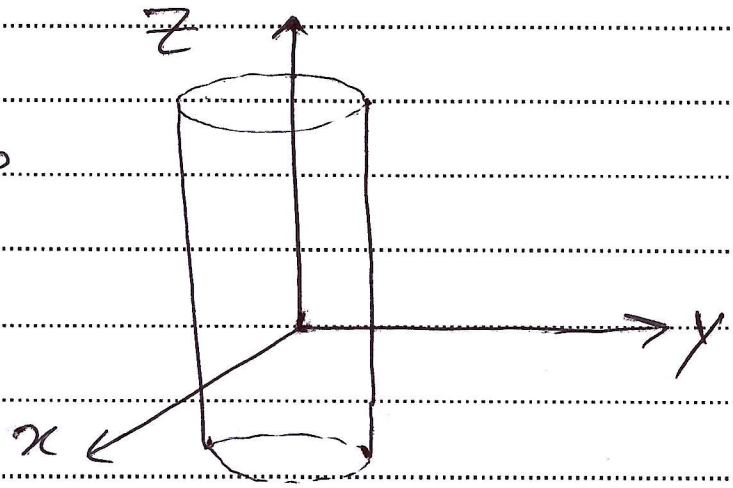
نميز حالتين :

عندما :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

تسمى معادلة سطح اسطواني ناقص

دليل قطع ناقص



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحالة الثانية:

إذا كان $\frac{-D}{B}$ ، $\frac{-D}{A}$ (سالبان)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

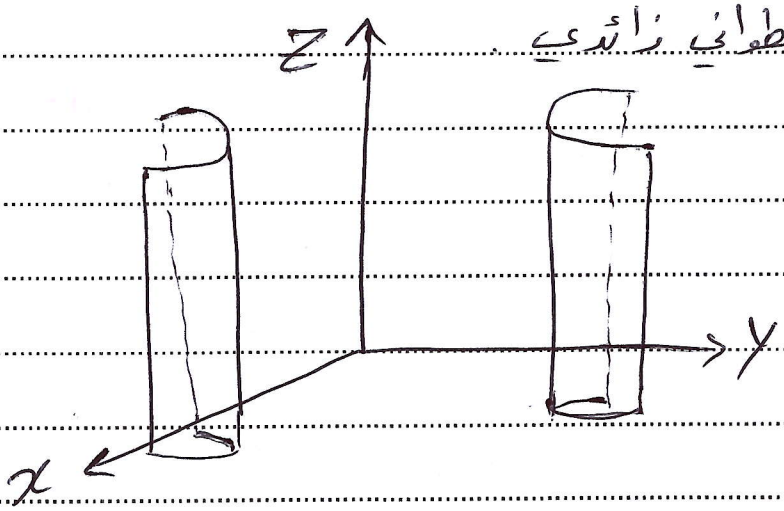
سطح إهليلجي وهمي (عقدي)

الحالة الثالثة:

إذا كان $\frac{-D}{B}$ ، $\frac{-D}{A}$ مختلفان بالإشارة

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

سطح إسطواني زائدي.



أمثلة:

حدد نوع السطح في كل مما يلي:

1-

$$25x^2 + 150x + 16y^2 + 32y - 191 = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$25(x^2+6x)-16(y^2-2y)-191=0$

نتمم إلى مربع كامل

$25(x+3)^2-16(y-1)^2-191-9(25)+16=0$

$25(x+3)^2-16(y-1)^2=400$

نقسم على 400

$$\frac{(x+3)^2}{\frac{400}{25}}-\frac{(y-1)^2}{\frac{400}{16}}=1$$

$$\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

مطلع إسطواني زائدي محوره (oz)

$y^2-12x-4y-56=0$ -2

نتمم إلى مربع كامل

$y^2-4y+4-4-12x-56=0$

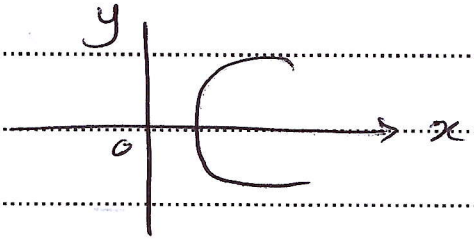
$(y-2)^2-4-12x-56=0$

$(y-2)^2-12x-60=0$

$(y-2)^2=12x+60$

$(y-2)^2=12(x+5)$

معادلة قطع مكافئ محوره ox



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 - 16x + 30y - 24z - 47 = 0$ (3)

$4x^2 - 16x - 3y^2 - 30y + 12z^2 - 24z - 47 = 0$

$4(x^2 - 4x) - 3(y^2 - 10y) + 12(z^2 - 2z) - 47 = 0$

$4[(x^2 - 4x + 4) - 4] - 3[(y^2 + 10y + 25) - 25] + 12[(z^2 - 2z + 1) - 1] - 47 = 0$

$4(x-2)^2 - 3(y+5)^2 + 12(z-1)^2 - 16 + 75 - 12 - 47 = 0$

$\frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y+5)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 0$

مخروط دوراني.

$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16x - 24y - 8z + 31 = 0$ (4)

بالإتمام إلى مربع كامل

$\frac{(x+2)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(z-1)^2}{\frac{25}{4}} = 1$

$a = b = c$ مجسم قطع ناقص ولكن

بالتالي المجسم كرة

$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \frac{25}{4}$

كرة مركزها $(-2, 3, 1)$ نصف قطرها $\frac{5}{2}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظير متوازي بالنسبة لمستوي آخر:

أوجد معادلة المستوي P_2 الذي يناظر المستوي

$P_1 : x - 2y + z - 1 = 0$

بالنسبة للمستوي

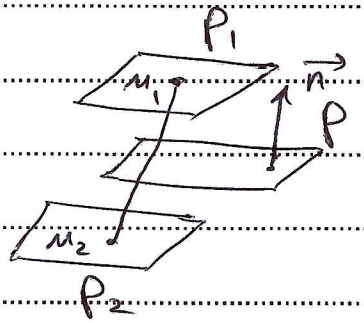
$P : 2x + y - 2z = 0$

* نفرض M_2 نقطة من P_2 إصطناعية $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة من P_1 هي نظيرة M_1 بالنسبة لـ P

$\overrightarrow{M_1M_2} // \overrightarrow{NP}$

منتصف $M_1M_2 \in P$



$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

منتصف $M_1M_2 \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$\overrightarrow{NP}(2, 1, -2)$

$$\frac{x_2 - x}{2} = \frac{y_2 - y}{1} = \frac{z_2 - z}{-2}$$

① ② ③

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$2\left(\frac{x_2+x}{2}\right)+4\left(\frac{y_2+y}{2}\right)+2\left(\frac{z_2+z}{2}\right)=0$$

بحل المجلة ① و ② و ③ :

نحصل على x, y, z بدلالة x_2, y_2, z_2

ثم نعوض في P_1 فنحصل على نظير P_1 بالنسبة لـ P

$$17x_2 - 14y_2 + z_2 - 9 = 0$$

نظير مستوٍ بالنسبة لمستقيم

ليكن P مستوياً ممثلاً بالعلاقة :

$$P: Px + qy + rz + d = 0$$

وليكن المستقيم L معطى بالفصل المشترك للمستويين P_1 و P_2

$$L: \begin{cases} P_1 : \dots \\ P_2 : \dots \end{cases}$$

لإيجاد نظير المستوي P بالنسبة لـ L اتبع الخطوات :

1- نعين متجه المستقيم L ولكن $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$$

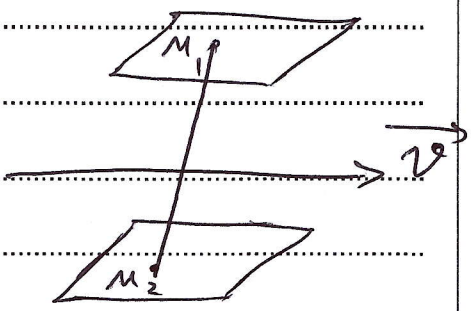
2- ليكن M من P ولكن $M(x, y, z)$ نظيرها M_1 من P_1

(نظير P بالنسبة لـ L)

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \rightarrow \vec{V} \perp L \quad \overrightarrow{M_1M_2}$$

M_1M منتصف M_2 ينتمي إلى L

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



مثال 1:

$$L:\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

أوجد معادلة المستوي $P: x + y - 2z + 1 = 0$

الحل:

$$\vec{v} = \vec{N_1} \hat{X} \vec{N_2} = (1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{v} = 0$$

$$x_2 - x_1 - y_2 + y_1 + z_2 - z_1 = 0$$

منتصف M_1M_2 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \in L$

تحقق المعادلتان بالكل لكل المعادلات ①، ②، ③

نحصل على

$$P': 5x - y + 2z + 9 = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z