كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : التاسعة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: $T_{x(t)} = x'(t)$; $t \in [0,1]$

1- هل T خطي ؟

2- هل T محدود ؟

الحل:

1- $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x, y \in X$

$$T(\alpha x(t) + \beta y(t)) = (\alpha x(t) + \beta y(t))' = \alpha x'(t) + \beta y'(t)$$
$$= \alpha T_x + \beta . T_y$$

بالتالي T خطي

2- $x_n = x_n(t) = t^n$; $t \in [0,1]$

$$\|x_n\| = \max_{0 \le t \le 1} |x_n(t)| = \max_{0 \le t \le 1} |t^n| = 1$$

$$T_{x_n(t)} = x_n'(t) = (t^n)' = n t^{n-1}$$

$$\|T_{x_n(t)}\| = \|n t^{n-1}\| = \max_{0 \le t \le 1} |n t^{n-1}| = n . \max_{0 \le t \le 1} |t^{n-1}| = n$$

$$\|T_{x_n(t)}\| \le n . \|x\| \Rightarrow \frac{\|T_{x_n(t)}\|}{\|x_n\|} \le n$$

n عدد طبيعي كيفي

وبالتالي لا يوجد عدد ثابت يحقق العلاقة بالتالي T غير محدود

التمرين الثاني: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x . \alpha = x_1 . \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$\forall x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

1- أثبت أنّ f دالة خطية؟

2- أثبت أنّ محدود؟

3- أوجد النظيم؟

الحل: 1-

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad , \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$f(\beta x + \gamma y) = f(\beta(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \gamma(y_1, y_2, \dots, y_n))$

$= f((\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3, \dots, \beta x_n) + (\gamma y_1, \gamma y_2, \gamma y_3, \dots, \gamma y_n))$

$= f((\beta x_1 + \gamma y_1), (\beta x_2 + \gamma y_2), (\beta x_3 + \gamma y_3), \dots, (\beta x_n + \gamma y_n))$

$= (\beta x_1 + \gamma y_1)\alpha_1 + (\beta x_2 + \gamma y_2)\alpha_2 + \dots + (\beta x_n + \gamma y_n)\alpha_n$

$= \beta x_1 \alpha_1 + \gamma y_1 \alpha_1 + \beta x_2 \alpha_2 + \gamma y_2 \alpha_2 + \dots + \beta x_n \alpha_n + \gamma y_n \alpha_n$

$= \beta x_1 \alpha_1 + \beta x_2 \alpha_2 + \dots + \beta x_n \alpha_n + \gamma y_1 \alpha_1 + \gamma y_2 \alpha_2 + \dots + \gamma y_n \alpha_n$

$= \beta(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n) + \gamma(y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \dots + y_n\alpha_n)$

$= \beta f(x) + \gamma f(y)$

بالتالي f خطي

2- نقول إنّ f محدود إذا تحقق الشرط:

$\exists c \in \mathbb{R} \quad , c > 0 \qquad |f(x)| \le c \cdot \|x\|$

لدينا: $|f(x)| = |x \cdot \alpha| = |x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n| =$

$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i\right| \le \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right]^{1/2}$

$\Rightarrow |f(x)| \le \|\alpha\| \cdot \|x\|$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بوضع $c = \|\alpha\|$ بالتالي f محدود $|f(x)| \leq \|\alpha\| . \|x\|$

$|f(x)| \leq c . \|x\|$

3- لإيجاد النظيم ننطلق من العلاقة $|f(x)| \leq \|\alpha\| . \|x\|$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|\alpha\|$$

بأخذ Sup الطرفين:

$$\sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|\alpha\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|f(x)\| \leq \|\alpha\|} \quad (1)$$

ولدينا: $\|f\| \geqslant \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ بوضع $x = \alpha$

$$\|f\| \geqslant \frac{|\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i|}{\|\alpha\|} = \frac{|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2|}{\|\alpha\|}$$

$$= \frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|} = \|\alpha\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|f\| \geqslant \|\alpha\|} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أنّ $\|f\| = \|\alpha\|$.

التمرين الثالث: $x = c[a,b]$ و $t_0 \in [a,b]$

ونعرّف $f_1(x) = x(t_0)$ برهن أنّ f_1 خطي ومحدود وأوجد النظيم؟

الحل: $\forall x, y \in c[a,b] \quad \forall \alpha, \beta \in K$.

$$f_1(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(t_0) = \alpha x(t_0) + \beta y(t_0) = \alpha f_1(x) + \beta f_1(y)$$

بالتالي f_1 خطي

f_1 محدود لأنّ $|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| = \|x\|$

$\exists c \in \mathbb{R}, c > 0$ و $c = 1$

- لإيجاد النظيم:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لدينا من علاقة الحدود السابقة: $|f_1(x)| \leq \|x\|$

$$\frac{|f_1(x)|}{\|x\|} \leq 1$$

نأخذ Sup للطرفين:

$$\sup \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \boxed{\|f_1\| \leq 1} \quad (1)$$

$$\|f_1\| \geq \frac{|f_1(x)|}{\|x\|}$$

بوضع $x=1$ $\Longrightarrow$ $\|f_1\| \geq \frac{1}{1}$

$$\Rightarrow \boxed{\|f_1\| \geq 1} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$\|f_1\| = 1$$

انتهت المحاضرة الأخيرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z