كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الثامنة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

٢٠٢٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ملاحظة: نقول عن نظيمان $\|\ \|$ و $\|\ \|_0$ أنهما متكافئان أي
$\|\ \| \sim \|\ \|_0$ إذا تحقق الشرط $a.b > 0$
$a\|\ \| \leq \|\ \|_0 \leq b\|\ \|$

التمرين الأول: في الفضاء $\mathbb{R}^3$ نعرف:

① $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$

② $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

برهن أن هذه النظائم متكافئة ؟

الحل

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = \sum_{i=1}^{3} |x_i \cdot 1| \leq \left[\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{3} |1|^2\right]^{1/2} = \sqrt{3}.\|x\|_2$$

(حسب منكوفسكي)

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_1 \leq \sqrt{3}.\|x\|_2} \quad \ldots ①$$

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2\right]^{1/2} \Rightarrow \|x\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^{3} x_i e_i\right\|_2 \leq \sum_{i=1}^{3} |x_i|.\|e_i\|_2$$

$$= \sum_{i=1}^{3} |x_i| = \|x\|_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_2 \leq \|x\|_1} \quad ②$$

من ① و ② نجد أن

$$1.\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{3}\,\|x\|_2$$

بالتالي النظم متكافئة

التمرين الثاني: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$

$\|x\|_2 = \max_{1\le i\le 3} |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$

برهن أنّ هذه النظائم متكافئة؟

الحل:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| \ge \max |x_i|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_1 \ge \|x\|_2} \quad \dots (1)$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| \le \max|x_i| + \max|x_i| + \max|x_i| = 3\max|x_i| = 3\|x\|_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_1 \le 3\|x\|_2} \quad \dots (2)$$

من ① و ② نجد أنّ

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le 3\|x\|_2$$

بالتالي النظائم متكافئة $\|x\|_2 \sim \|x\|_1$

التمرين الثالث: في الفضاء $c[0,1]$ لدينا نظيمات:

$$\|x\|_0 = \int_0^1 |x(t)|\,dt$$

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 1} |x(t)|$$

غير متكافئان؟

الحل: من أجل ذلك نأخذ $x_n(t) = t^n \in c[0,1]$

$$\|x_n(t)\| = \max_{0\le t\le 1} |x_n(t)| = \max_{0\le t\le 1} |t^n| = 1$$

$$\|x_n(t)\|_0 = \int_0^1 x_n(t)\,dt = \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

إذا كانت $\|\ \|$ و $\|\ \|_0$ متكافئان عندئذٍ يوجد $b.a>0$

حيث تتحقق المتراجحة

$$a\|x_n(t)\| \le \|x_n(t)\|_0 \le b.\|x_n(t)\|$$

$$a.1 \le \frac{1}{n+1} \le b.1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهذا خاطئ الشرط غير محقق لأنّ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

a.b.76

بالتالي النظيمان غير متكافئان.

التمرين الرابع: بيّن أنّ المؤثرات التالية خطية ثمّ حدّد الساحة - المدى - الفضاء الصفري.

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \longrightarrow (3\varepsilon_1, 0)$$

الحل:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^2$; $x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$

نشرط المؤثر الخطي $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$

$$T(\alpha x + \beta y) = T\left(\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \beta(\eta_1, \eta_2)\right)$$
$$= T\left((\alpha\varepsilon_1, \alpha\varepsilon_2) + (\beta\eta_1, \beta\eta_2)\right)$$
$$= T\left(\alpha\varepsilon_1 + \beta\eta_1, \alpha\varepsilon_2 + \beta\eta_2\right)$$
$$= (\alpha\varepsilon_1 + \beta\eta_1, 0)$$
$$= (\alpha\varepsilon_1, 0) + (\beta\eta_1, 0)$$
$$= \alpha(\varepsilon_1, 0) + \beta(\eta_1, 0)$$
$$= \alpha T(x) + \beta T(y) \Rightarrow$$ خطي T

- $D(T_1) = \mathbb{R}^2$
- $R(T_1) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2 ; \varepsilon_2 = 0\}$
- $N(T_1) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2 ; T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0 \Rightarrow (\varepsilon_1, 0) = (0, 0) \Rightarrow \varepsilon_1 = 0\}$

ملاحظة: إذا كان لدينا $T : X \to Y$ مؤثر فإنّ $T^{-1} : Y \to X$ يكون موجود إذا تحقق $T_x = 0 \Leftarrow x = 0$,

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الخامس: ليكن T مؤثر خطي محدود من الفضاء X إلى الفضاء Y

إذا وُجِدَ عدد موجب $b>0$ بحيث $\|Tx\| \geq b\|x\|$

بيّن أنّ T^{-1} موجود ومحدود ؟

الحل:

إنّ الشرط ليكون T^{-1} موجود هو أن يكون $Tx=0 \Leftarrow x=0$

$Tx=0 \Rightarrow \|Tx\|=0 \Rightarrow \|Tx\| \geq b\|x\| \Rightarrow 0 \geq b\|x\|$

إنّ $b>0$ من الفرض بالتالي $0 \geq \|x\|$

$\Rightarrow \|x\|=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

ومنه T^{-1} موجود

بفرض $Tx=y$ بالتالي $T^{-1}.Tx = T^{-1}y$

$\Rightarrow x = T^{-1}.y$

$\|Tx\| \geq b\|x\| \Rightarrow \|y\| \geq b\|T^{-1}y\|$

$\|T^{-1}y\| \leq \frac{\|y\|}{b}$

T^{-1} محدود حيث $c=\frac{1}{b}$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z