كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : **الحادية عشر** /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التعريف: المؤثر المستمر:

ليكن $T: D(T) \to Y$ مؤثر ما (حيث ليس من الضروري أن يكون مؤثراً خطياً) حيث $D(T) \subset X$ و X و Y فضائين منظمين (خطيين)، نقول عن المؤثر T أنّهُ مستمر في النقطة x_0 من $D(T)$ إذا تحقّق أحد الشرطين:

① $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; ; \; \forall x \in D(T) \wedge \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$

② $\forall (x_n)_{n \geq 1}, \; x_n \in D(T) \; ; \; n = 1, 2, \ldots \wedge x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \Rightarrow Tx_n \xrightarrow[n \to \infty]{} Tx_0$

ونقول عن T أنّهُ مستمر إذا كان T مستمراً في كل نقطة x من $D(T)$.

- إنّ الاستمرار والمحدودية مفهومان متكافئان بالنسبة للمؤثرات الخطية كما سنرى ذلك من خلال البرهنة التالية:

برهنة الاستمرار والمحدودية:

إذا كان: $T: D(T) \subset X \to Y$ مؤثراً خطياً و X و Y فضاءان منظمان (خطيان) عندئذٍ فإنّ:

أ- الشرط اللازم والكافي حتّى يكون T مستمراً هو أن يكون محدوداً.

ب- إذا كان T مستمراً في نقطة واحدة x_0 من $D(T)$ فإنّهُ يكون مستمراً.

برهان (1): • لزوم الشرط: الفرض: T مؤثر خطي ومستمر

الطلب: T محدود.

البرهان: نفرض جدلاً أنّ المؤثر T غير محدود عندئذٍ توجد متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من نقط المجموعة $D(T)$ بحيث يكون:

$$\|Tx_n\| > n.\|x_n\| \quad ; \quad n=1,2,\dots$$

الآن: إذا وضعنا $u_n = \frac{x_n}{n.\|x_n\|}$ حيث $n=1,2,\dots$ عندئذٍ نجد:

$$\|u_n - 0_x\| = \|u_n\| = \left\|\frac{x_n}{n.\|x_n\|}\right\| = \frac{1}{n.\|x_n\|}.\|x_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وبالتالي $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0_x$ وكذلك:

$$\|Tu_n - T0_x\| = \|Tu_n\| = \left\|T\frac{x_n}{n.\|x_n\|}\right\| = \left\|\frac{1}{n.\|x_n\|}.Tx_n\right\| =$$

$$\frac{1}{n.\|x_n\|}\|Tx_n\| > \frac{1}{n.\|x_n\|}.n.\|x_n\| = 1$$

وبالتالي فإنّ:

$$\|Tu_n - T0_x\| = \|Tu_n - 0_x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وبالتالي

$Tu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T0_x$ وهذا يناقض الفرض وبالتالي الفرض T غير محدود هو فرض خاطئ و T مؤثر خطي محدود.

• كفاية الشرط: الفرض: T مؤثر خطي محدود

الطلب: T مستمر

البرهان: حتّى نبرهن أنّ T مستمر نأخذ نقطة كيفية x من $D(T)$ ونبرهن أنّ T مستمر فيها.

لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية من نقط الفضاء الخطي $D(T)$ بحيث يكون $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ولنبرهن أنّ $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall c>0$ و $\|x_n - x\|$ لدينا $0 \le \|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \le c \cdot \|x_n - x\|$

وبأخذ النهاية في أطراف المتراجحة السابقة عندما $n \to \infty$ نجد أنّ

$\|T_{x_n} - T_x\| \to 0$ هذا يؤدي إلى أنّ $T_{x_n} \to T_x$ $n \to \infty$

أي أنّ T مستمر في النقطة الكيفية x من $D(T)$ وبالتالي $x_n \to x$ $n \to \infty$

T مؤثر مستمر.

نتيجة: الاستمرار والفضاء الصفري: إذا كان T مؤثراً خطياً محدوداً فإنّ:

أ- إذا كان $(x_n)_{n \ge 1}$ متتالية من نقط الفضاء الخطي $D(T)$ و $x_n \to x$ $n \to \infty$ حيث $x \in D(T)$ عندئذٍ فإنّ $T_{x_n} \to T_x$ $n \to \infty$.

ب- الفضاء الصفري $N(T)$ مغلق أي $\overline{N(T)} = N(T)$.

■ الدالیات الخطية:

بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية:

الدالي: ندعو كل مؤثر $f: X \to K$ حيث X فضاء خطي معرّف فوق الحقل K، دالي على X أو دالي أي أنّ الدالي هو مؤثر تقع مساحته في فضاء خطي X ومداه هو الحقل العددي K للفضاء الخطي X ولدينا هنا حالتان:

أ- الحالة الأولى: عندما X فضاء خطي حقيقي فإنّ $K = \mathbb{R}$ وندعو F في هذه الحالة دالي حقيقي.

ب- الحالة الثانية: عندما X فضاء خطي عقدي فإنّ $K = \mathbb{C}$ وندعو F في هذه الحالة دالي عقدي.

نرمز لمساحة الدالة F بـ $D(F)$ ولمداه بـ $R(F)$ حيث:

$D(F) \subset X$ و $R(F) \subset K$.

ملاحظة: إنّ الدالي هو حالة خاصة من المؤثر (كل دالي هو مؤثر ولكن ليس كل مؤثر هو دالي).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: الدالي الخطية:

ندعو $F: D(F) \subseteq X \longrightarrow R(F) \subseteq K$ دالي خطي إذا تحقق الشرطان التاليان:

① $\forall x_1, x_2 \in D(F) \subseteq X \Rightarrow F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$

② $\forall \alpha \in K \ \& \ \forall x \in D(f) \subseteq X \Rightarrow F(\alpha x) = \alpha . f(x)$

ويمكن دمج الشرطين السّابقين بشرط واحد وهو:

$$\forall \alpha, \beta \in K \ \& \ \forall x_1, x_2 \in D(F) \subseteq X \Rightarrow$$
$$F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

■ **الفضاء الصفري لـ F:**

اذا كان $f: D(f) \subseteq X \longrightarrow D(F) \subseteq K$ دالي خطي عندئذٍ ندعو المجموعة $N(f) = \{x \in D(f) \ ; \ f(x) = 0_K\}$ الفضاء الصفري لـ f (نواة الدالي [المؤثر] الخطي F) وهي تشكل فضاء جزئي خطي من الفضاء الذي تقع فيه وهو X.

■ **تعريف الدالي الخطي المحدود:**

نقول عن الدالي الخطي (المؤثر الخطي) $F: D(F) \subseteq X \longrightarrow K$ حيث D(F) مساحته و X فضاء منظم (خطي) و K الحقل المعرف عليه X أنّهُ محدود إذا حقق الشرط التالي:

$$\exists c > 0 \ ; \ c \in \mathbb{R} \ \wedge \ |f(x)| \leq c . \|x\| \ ; \ \forall x \in D(f)$$

بالإضافة لذلك فإنّ نظيم f يعطى بالعلاقة:

$$\|f\| = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$ حفظ

أو بالعلاقة: $\|f\| = \sup_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \in X - \{0\}}} |f(x)|$ حفظ كذلك يمكن أن نضع

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

استناداً للمؤثرات الخطية المحدودة:

$|f(x)| \leq \|f\| . \|x\| \quad ; \forall x \in D(f)$

وبقسمة طرفي العلاقة السابقة على $\|x\| \neq 0$ نحصل على المتراجحة

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$$

علاقة مهمة لحساب قيمة نظيم التابع الخطي f.

■ مبرهنة الاستمرار والمحدودية:

الشرط اللازم والكافي حتى يكون التابع الخطي $F: D(F) \subseteq X \to K$ حيث $D(F) \subset X$ و X فضاء منظم و K الحقل العددي المعرف عليه X، مستمراً هو أن يكون محدود.

تمرين: التكامل المحدد:

ليكن الفضاء $c[a,b]$ ولنأخذ التابع $f: c[a,b] \to \mathbb{R}$ ونعرّف وفق العلاقة: $x(t) \in c[a,b]$ و $f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$

أثبت أنّ F خطي ومحدود وأنّ نظيمه $\|f\| = (b-a)$

أو أثبت أنّ F خطي ومحدود وأوجد نظيمه $\|f\|$ ؟

الحل:

أولاً: اثبات أنّ F خطي

F خطي $\iff$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ &

$\forall x = x(t) \;,\; y = y(t) \in c[a,b]$

$f(\alpha x + \beta y) \stackrel{?}{=} \alpha f(x) + \beta f(y)$

لدينا $f(\alpha x + \beta y) = \int_a^b (\alpha x + \beta y)(t)\,dt = \int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t))\,dt$

$= \int_a^b \alpha x(t)\,dt + \int_a^b \beta y(t)\,dt = \alpha \int_a^b x(t)\,dt + \beta \int_a^b y(t)\,dt$

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالتالي f دالة خطية.

ثانياً: اثبات أنّ F محدود أي يجب أن نبرهن الشرط:

$$\exists c>0 \; ; \; c\in\mathbb{R} \quad \wedge |f(x)| \leq c.\|x\| \; ; \; \forall x \in D(f)=c[a,b]$$

لدينا

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)dt\right| \leq \int_a^b |x(t)|dt \leq \int_a^b \max|x(t)|\,dt$$

$$\leq \|x\| . \int_a^b dt \leq (b-a).\|x\|$$

وصلنا على المتراجحة:

$$|f(x)| \leq (b-a).\|x\| \; ; \; \forall x \in c[a,b]$$

وبالتالي الشرط التالي محقّق:

$$\exists c=b-a>0 \; ; \; c\in\mathbb{R} \wedge |f(x)| \leq c.\|x\| \; ; \; \forall x\in c[a,b]$$

وبالتالي f محدود أو بطريقة أخرى:

لدينا $|f(x)| = \left|\int_a^b x(t).dt\right| \leq \int_a^b |x(t)|dt \leq \max|x(t)|(b-a)$

$$= \|x\|\,(b-a)$$

وبالتالي الشرط التالي محقّق أيضاً:

$$\exists c=b-a>0 \; ; \; c\in\mathbb{R} \wedge |f(x)| \leq c.\|x\| \; ;$$

$$\forall x \in c[a,b]$$

• حساب $\|f\|$: لدينا من الطلب السابق المتراجحة

$$|f(x)| \leq (b-a).\|x\|$$

وبقسمة طرفي هذه العلاقة على $\|x\| \neq 0$ نجد أنّ

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq (b-a)$$

وبأخذ Sup لكلا طرفي المتراجحة السابقة من أجل جميع نقط x من $c[a,b]$ نحصل على المتراجحة التالية:

$$\|f\| = \text{Sup}\,\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq (b-a) \quad ; \quad x\in c[a,b] \;\&\; x\neq 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow \boxed{\|f\| \leq (b-a)}$ ①

ومن جهة أخرى بالتعويض في العلاقة

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$$

كل $x = x_0 = 1$ ، $\|x_0\| = 1$ نجد أن

$$\|f\| \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \int_a^b x_0(t)\,dt = \int_a^b 1\,dt \leq b-a$$

$(\|x_0\| = 1)$

وبالتالي: $\boxed{\|f\| \geq (b-a)}$ ②

من ① و ② نجد أن $\|f\| = b-a$.

انتهت المحاضرة الأخيرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة