كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : **السابعة عشر /نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تعريف: يقال عن الحقل F بأنه مغلق جبرياً إذا كانت كل كثيرة حدود غير ثابتة من F[x] تملك جذر في F

مثال ① حقل الأعداد الكسرية ليس مغلق جبرياً لأن:

$p(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ لا تملك جذر في $\mathbb{Q}$

مثال $\mathbb{R}$ حقل الأعداد الحقيقية ليس مغلق جبرياً لأن:

$p(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ لا تملك جذر في $\mathbb{R}$

مثال Z_3 حقل ليس مغلق جبرياً لأن:

$p(x) = x^2 + 1 \in Z_3[x]$ لا تملك جذر في Z_3

برهنة $\mathbb{C}$ مغلق جبرياً

برهنة إذا كان F حقلاً عندئذ الشروط التالية متكافئة:

① F مغلق جبرياً

② كل كثيرة حدود لا مختزلة في F[x] من الدرجة الأولى

③ كل توسيع جبري لـ F يساويه

برهنة E توسيع حقلي لـ F، $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in E$ عناصر جبرية فوق F عندئذ الحقل $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ توسيع جبري لـ F

برهنة: ليكن E توسيع حقلي لـ F عندئذ المجموعة:

$\bar{F} = \{a : a \in E \ \& \ a$ عنصر جبري فوق $F\}$

حقل جزئي في E، و $F \subset \bar{F}$

البرهان: وضوحاً $\bar{F} \subset F$

*) $0 \in \bar{F}$

$0 \in E : \exists\ p(x) = x \in F[x]$ حيث $p(0) = 0$

$\Rightarrow 0$ عنصر جبري فوق F ومنه $0 \in \bar{F}$

*) $1 \in \bar{F}$

$1 \in E : \exists\ p(x) = x - 1 \in F[x]$ حيث $p(1) = 0$

$\Rightarrow 1$ عنصر جبري فوق F ومنه $1 \in \bar{F}$

*) $\forall a, b \in \bar{F} \overset{?}{\Rightarrow} a - b \in \bar{F}$

بما أن $a, b \in \bar{F}$ عندئذ: $a \in E$ و a عنصر جبري فوق F

$b \in E$ و b عنصر جبري فوق F

ومنه $a - b \in E$

$F(a,b) \subset E$ توسيع جبري لـ F

$a, b \in F(a,b)$ (حقل)

$a - b \in F(a,b)$

بالتالي $a - b$ عنصر جبري فوق F بالتالي $a - b \in \bar{F}$

*) $\forall a, b \in \bar{F}, b \neq 0 \overset{?}{\Rightarrow} ab^{-1} \in \bar{F}$

بما أن $a, b \in \bar{F}$ عندئذ: $a \in E$ و a عنصر جبري فوق F

$b \in E$ و b عنصر جبري فوق F

ومنه $ab^{-1} \in E$

$F(a,b) \subset E$ توسيع جبري لـ F

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$a, b \in F(a,b)$ (حقل)

ومنه $b^{-1} \in F(a,b)$

$a.b^{-1} \in F(a,b)$

بالتالي $a.b^{-1}$ عنصر جبري فوق F بالتالي $a.b^{-1} \in \bar{F}$

سنتبع ماسبق أن $\bar{F}$ حقل جزئي من E

إثبات أن $F \subset \bar{F}$:

$\forall \alpha \in F : \Rightarrow \alpha \in E$

$\exists p(x) = x - \alpha \in F[x] \subset E[x]$ حيث $p(\alpha) = 0$

α عنصر جبري فوق F بالتالي $\alpha \in \bar{F}$ $\Leftarrow$

ومنه $F \subset \bar{F}$

ملاحظة: إذا كان E توسيع حقلي لـ F عندئذ ندعو المجموعة:

$\bar{F} = \{\alpha \in E : \alpha$ عنصر جبري فوق $F\}$

بـ الغلاقة (الاصاقة) الجبرية للحقل F في E

ملاحظة: إذا كان F مغلق جبرياً عندئذ $F = \bar{F}$

البرهان: برهنا سابقاً أن $F \subset \bar{F}$ و لنثبت أن $\bar{F} = F$

بما أن $\bar{F}$ توسيع جبري لـ F و F مغلق جبرياً عندئذ $F = \bar{F}$

حقول التفريق (الانشطار)

E توسيع حقلي لـ F ، $f(x) \in F[x]$

* يقال عن كثيرة الحدود $f(x)$ أنها تتفرق (تنشطر) فوق الحقل E إذا أمكن كتابة كثيرة الحدود $f(x)$ على شكل جداء لضاربيب خطية في $E[x]$ أي إذا أمكن كتابة $f(x)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

في $E[x]$ على الشكل التالي:

$$f(x) = \lambda (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

حيث $\lambda \in F$ و $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$

* يقال عن الحقل E أنه حقل تفريق لكثيرة الحدود $f(x)$ فوق F إذا كانت كثيرة الحدود $f(x)$ تتفرق في الحقل E ولا تتفرق في أي حقل آخر K بحيث: $F \subset K \subsetneq E$

ملاحظة ليكن F حقلاً، $f(x) \in F[x]$

إن حقل التفريق لكثيرة الحدود $f(x)$ فوق الحقل F هو أصغر حقل تفريق فيه كثيرة الحدود $f(x)$ فوق F

ملاحظة للحصول على حقل التفريق لكثيرة الحدود $f(x)$ نقوم بضم أصفار كثيرة الحدود إلى الحقل F أي هو: $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ أصفار كثيرة الحدود

أمثلة [1] ليكن $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ أوجد حقل التفريق (الانشطار) لـ $f(x)$ فوق $\mathbb{Q}$.

الحل أصفار $f(x)$ هي $\mp\sqrt{2}$ بالتالي حقل انشطار $f(x)$ فوق $\mathbb{Q}$ هو: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2 حقل التفريق لـ $p(x) = x^2 + 1 \in Q[x]$ فوق Q هو $Q(i)$

3 أوجد حقل التفريق لـ $p(x) = x^4 - x^2 - 2 \in Q[x]$ فوق Q

الحل

$p(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$

أصفارها: $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -i, i\}$

حقل التفريق لـ $p(x)$ فوق Q هو $Q(\sqrt{2}, i)$

4 أوجد حقل التفريق لـ $f(x) = x^3 - 1 \in Q[x]$ فوق Q:

الحل

$f(x) = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x - 1 = 0$ أو $x^2 + x + 1 = 0$

$x = 1$ أو $\alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ أو $\alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

بالتالي حقل التفريق لـ $f(x)$ فوق Q هو:

$Q(\sqrt{3}i) = Q(\alpha_1, \alpha_2) = Q(\sqrt{3}, i)$

5 أوجد حقل التفريق لـ $h(x) = x^4 - 3 \in Q[x]$ فوق Q

الحل

$h(x) = (x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3})$

$= (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3}i)(x + \sqrt[4]{3}i)$

أصفار $h(x)$ هي: $\{-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}, -i\sqrt[4]{3}, i\sqrt[4]{3}\}$

بالتالي حقل التفريق لـ $h(x)$ فوق Q هو:

$Q(\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}i) = Q(\sqrt[4]{3}, i) = Q(\sqrt[4]{3}i)$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة