كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : **السادسة عشر** /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مثال: ليكن لدينا $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = \sqrt{5}$

والمطلوب: ① أوجد $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ فوق $\mathbb{Q}$

② أثبت أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

③ أوجد $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$ فوق $\mathbb{Q}$

④ أثبت أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ ، ماذا ستنتج؟

الحل: ① نلاحظ أن $irr(\sqrt{5},\mathbb{Q}) = x^2 - 5$

$$deg(\sqrt{5},\mathbb{Q}) = deg(irr(\sqrt{5},\mathbb{Q})) = 2$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$$

القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ فوق $\mathbb{Q}$ هي: $\{1, \beta\} = \{1, \sqrt{5}\}$

② نفرض جدلاً أن $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \Leftarrow \sqrt{2} = a + b\sqrt{5}$

$\mathbb{Q} \ni a = \sqrt{2} - b\sqrt{5}$ ؛ $a, b \in \mathbb{Q}$

↳ هذا مرفوض $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

③ $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] \times [\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$

حساب $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})]$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$

|

$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

|

$\mathbb{Q}$

لنوجد كثيرة الحدود الأصغرية لـ $\alpha = \sqrt{2}$ فوق $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

نلاحظ أن α صفر لـ $p(x) = x^2 - 2$

$$p(x) \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})[x]$$

أصفار $p(x)$ هي $\mp\alpha$ نلاحظ أن $\mp\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

نستنتج أن $irr(\sqrt{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{5})) = x^2 - 2$

$deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{5})) = deg(irr(\sqrt{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{5}))) = 2$

$[\mathbb{Q}(\sqrt{5})(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] = 2$

و القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) فوق \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})(\sqrt{2})$ هي: $\{1, \sqrt{2}\}$

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2 \times 2 = 4$

و القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ فوق $\mathbb{Q}$ هي:

$\{1, \sqrt{2}\} \times \{1, \sqrt{5}\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\}$

④ الاحتواء الأول: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

حتى نثبت ذلك يجب أن نثبت: $\sqrt{2} \& \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

وهذا أيضاً: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

* $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{5} + 15\sqrt{2} + 5\sqrt{5} = 11\sqrt{5} + 17\sqrt{2}$

$= 11(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + 6\sqrt{2} \Longrightarrow 6\sqrt{2} = \underbrace{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^3}_{\in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})} - \underbrace{11(\sqrt{2} + \sqrt{5})}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}$

$6\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \Longrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

* $\sqrt{5} = (\underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{5}}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})} - \underbrace{\sqrt{2}}_{\in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

نستنتج أن $\sqrt{2} \& \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

بالتالي: $\underbrace{\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})}_{\text{أصغر حقل جزئي لـ } \mathbb{Q} \text{ ويحتوي إليه العنصرين } \sqrt{2}, \sqrt{5}} \subset \underbrace{\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})}_{\text{حقل جزئي لـ } \mathbb{Q} \text{ ويحتوي إليه العنصرين } \sqrt{2}, \sqrt{5}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الاحتواء الثاني: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$

حتى نثبت ذلك يجب أن نثبت: $\sqrt{2}+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$

وصنوماً: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$

ولدينا: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$ ، $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$

بالتالي: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$: أصغر حقل يحوي $\mathbb{Q}$ ويسمى إليه $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$: حقل يحوي $\mathbb{Q}$ ويسمى إليه $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

سنستنتج مما سبق أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

وذلك من الاحتوائين السابقين

وسنستنتج أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$ توسيع بسيط لأنه ناتج عن ضم عنصر واحد وهو $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ إلى حقل الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$

مثال: $\alpha = \sqrt{5}\,i$ و $\beta = \sqrt[3]{5}$

1. أوجد $\deg(\alpha,\mathbb{Q})$ ثم أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$
2. أوجد $\deg(\beta,\mathbb{Q})$ ثم أوجد $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\beta)$ فوق $\mathbb{Q}$
3. أثبت أن $\alpha = \sqrt{5}\,i \notin \mathbb{Q}(\beta)$ و $\beta = \sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}(\alpha)$
4. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\beta)]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ فوق $\mathbb{Q}(\beta)$
5. أوجد $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]$
6. أثبت أن $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\,i)$ وماذا ستستنتج؟

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل ① $\alpha = \sqrt{5}\,i$ جذر لـ $p(x) = x^2 + 5 \in \mathbb{Q}[x]$

$p(x)$ موحدة لأن $a_2 = 1$ و $p(x)$ لاختزالة فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار إيزنشتاين من أجل العدد الأولي $p = 5$

عاسبت نجد أن $irr(\alpha, \mathbb{Q}) = x^2 + 5$

$$deg(\alpha, \mathbb{Q}) = deg(irr(\alpha, \mathbb{Q})) = 2$$

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 2$$

و القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي: $\{1, \alpha\} = \{1, \sqrt{5}\}$

② نلاحظ بسهولة أن $irr(\beta, \mathbb{Q}) = x^3 - 5$

$$deg(\beta, \mathbb{Q}) = 3 \Longrightarrow [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = deg(\beta, \mathbb{Q}) = 3$$

و القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\beta)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي:

$$\{1, \beta, \beta^2\} = \{1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}\}$$

③ $deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 2$ ، $deg(\beta, \mathbb{Q}) = 3$

$2 \nmid 3 \Longleftarrow \alpha \notin \mathbb{Q}(\beta)$

$3 \nmid 2 \Longleftarrow \beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$

④ $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\beta)] = [\mathbb{Q}(\beta)(\alpha) : \mathbb{Q}(\beta)]$

لنوجد $irr(\alpha, \mathbb{Q}(\beta))$

نلاحظ أن $\alpha = \sqrt{5}\,i$ جذر لـ $p(x) = x^2 + 5 \in \mathbb{Q}(\beta)[x]$

و $p(x)$ موحدة و $p(x)$ لاختزالة فوق $\mathbb{Q}(\beta)$ لأن جذورها:

$$\{-\sqrt{5}\,i, \sqrt{5}\,i\} \notin \mathbb{Q}(\beta) \Longrightarrow irr(\alpha, \mathbb{Q}(\beta)) = x^2 + 5$$

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\beta)] = 2$$

و القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ فوق $\mathbb{Q}(\beta)$ هي: $\{1, \alpha\} = \{1, \sqrt{5}\,i\}$

⑤ $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\beta)] \times [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$

$$= 2 \times 3 = 6$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

والقاعدة لـ $[Q(\alpha,\beta):Q]$ هي:

$$\{1,\alpha\} \times \{1,\beta,\beta^2\} = \{1,\sqrt{5}\,i\} \times \{1,\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{25}\}$$
$$= \{1,\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{25},\sqrt{5}\,i,\sqrt[6]{5}\,i,\sqrt[6]{5^7}\,i\}$$

⑥ الاحتواء الأول: $Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5}) \subset Q(\sqrt[6]{5}\,i)$

يجب أن نثبت أن: $\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5} \in Q(\sqrt[6]{5}\,i)$

$Q \subset Q(\sqrt[6]{5}\,i)$

* $\sqrt[6]{5}\,i \in Q(\sqrt[6]{5}\,i) \Rightarrow (\sqrt[6]{5}\,i)^2 \in Q(\sqrt[6]{5}\,i)$

$\Rightarrow -\sqrt[3]{5} \in Q(\sqrt[6]{5}\,i) \Rightarrow \sqrt[3]{5} \in Q(\sqrt[6]{5}\,i)$

* $\sqrt[6]{5}\,i \in Q(\sqrt[6]{5}\,i) \Rightarrow (\sqrt[6]{5}\,i)^3 \in Q(\sqrt[6]{5}\,i)$

$\Rightarrow -\sqrt{5}\,i \in Q(\sqrt[6]{5}\,i) \Rightarrow \sqrt{5}\,i \in Q(\sqrt[6]{5}\,i)$

$Q \subset Q(\sqrt[6]{5}\,i)$

ووضوحاً:

$Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5}) \subset Q(\sqrt[6]{5}\,i)$

بالتالي:

حقل جوي Q ونسبت إليه α,β ← أصغر حقل جوي Q ونسبت إليه α,β

الاحتواء الثاني: $Q(\sqrt[6]{5}\,i) \subset Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5})$

يجب أن نثبت أن: $\sqrt[6]{5}\,i \in Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5})$

$Q \subset Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5})$

* $\sqrt{5}\,i \times (\sqrt[3]{5})^2 \in Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5})$

$i \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{2}{3}} = i \times 5^{\frac{7}{6}} \in Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5})$

$i \times 5 \times 5^{\frac{1}{6}} \in Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5})$

$\sqrt[6]{5}\,i \in Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5})$

ووضوحاً: $Q \subset Q(\sqrt{5}\,i,\sqrt[3]{5})$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبالتالي :

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}\, i) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5}\, i, \sqrt[3]{5})$

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}\, i)$: أصغر حقل يحوي $\mathbb{Q}$ وينتمي إليه العنصر $\sqrt[6]{5}\, i$

$\mathbb{Q}(\sqrt{5}\, i, \sqrt[3]{5})$: حقل يحوي $\mathbb{Q}$ وينتمي إليه العنصر $\sqrt[6]{5}\, i$

من الاحتوائين السابقين نجد أن :

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}\, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}\, i, \sqrt[3]{5})$

و $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ توسيع بسيط لـ $\mathbb{Q}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z