كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : الحادية عشر/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

* نعلم أن التباين يعطى بالعلاقة: $Var(X) = E(X-\mu_x)^2$

حيث: $\mu_x = E(X)$

هنالك بعض الخواص الهامة التي يتمتع بها التباين:

1. $Var(X) \geq 0$
2. $Var(aX+b) = a^2\, Var(X)$
3. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu_x^2$

نتيجة: أحياناً نرمز للانحراف المعياري بالرمز $Sd(X)$

وبالتالي نستنتج أنه: $Sd(aX) = |a|\, Sd(X)$

التغاير: **Covariance**

يعرف التغاير لمتغيرين عشوائيين X, Y بالعلاقة التالية:

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right]$$

حيث: $E(X) = \mu_x$

$E(Y) = \mu_y$

مبرهنة: ليكن X, Y متغيران عشوائيان عندئذٍ:

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

وبالتالي إذا كان X, Y مستقلان: $Cov(X,Y) = 0$

مبرهنة: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

نتيجة: X,Y مستقلان بالتالي:

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

تمرين [1]: أوجد تباين المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيعاً أسياً بالبارامتر:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad ; \quad x > 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

نكامل بالتجزئة:

$$E(X^2) = \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

« يمكن اعتماد هذه النتيجة في حل التمارين »

تمرين [2]: ليكن X متغيراً عشوائياً يتبع توزيعاً طبيعياً

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

نعلم أن $E(X) = \mu$

ولنحسب الآن التباين

الحل: نعود إلى $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

إن $Z \sim N(0,1)$ نعلم أن $E(Z) = 0$

لحساب $Var(Z)$

$$Var(Z) = E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$$

بالمكاملة بالتجزئة:

نحصل على النتيجة التالية:

$$Var(Z) = \left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} Z e^{-\frac{Z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ = 1$$

$$Var(X) = Var(\sigma Z + \mu) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2$$

(يمكن اعتماد هذه النتيجة في حل التمارين)

تمرين: X, Y متغيران عشوائيان منفصلان بدالة كثافة احتمالية مشتركة $f_{X,Y}(x,y)$ معطاة بالعلاقة:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; x = 3, y = 4 \\ \frac{1}{3} & ; x = 3, y = 6 \\ \frac{1}{6} & ; x = 5, y = 6 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

① أوجد $E(X)$, $E(Y)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} & ; x = 3 \\ \frac{1}{6} & ; x = 5 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$ (الدالة الهامشية)

$\Rightarrow E(X) = \sum_{x} x f_X(x) = (3)\left(\frac{5}{6}\right) + (5)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{10}{3}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \quad y = 4 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} & ; \quad y = 6 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$\Rightarrow E(Y) = \sum_{y} y f_Y(y) = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 5$

② احسب $Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y) = E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right]$

$= \sum_{(x,y)} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{X,Y}(x,y)$

$= \left(3 - \frac{10}{3}\right)(4-5)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(3 - \frac{10}{3}\right)(6-5)\left(\frac{1}{3}\right) +$

$\left(5 - \frac{10}{3}\right)(6-5)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

تمرين: ليكن X متغيراً عشوائياً: $Y = 3X$

$Z = -4X$

$Cov(X,Y) = E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right]$

ولكن $Y = 3X$

إذاً $E(Y) = 3E(X)$

$\mu_Y = 3\mu_X$

$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(3X-3\mu_X)] = 3E(X-\mu_X)^2 = 3Var(X)$

وبنفس الطريقة نجد:

$Cov(X,Z) = -4\,Var(X)$

تمرين: ليكن X,Y متغيران مستمران مطلقاً بدالة كثافة احتمالية مشتركة:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (4xy+3x^2y^2)/18 & ; 0<x\le 1,\ 0\le y\le 3 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(1) أوجد $E(X)$ ، $E(Y)$ ، $E(X.Y)$

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

نحسب الدالة الهامشية $f_X(x)$:

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^3 (4xy+3x^2y^2)\,dy$

$= \frac{1}{18}\left[2xy^2 + x^2y^3\right]_0^3 = \frac{1}{18}[18x+27x^2]$

$= \frac{3}{2}x^2 + x$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & ; 0\le x\le 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + x^2\right)dx = \left[\frac{3}{8}x^4 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{17}{24}$

احسب $Var(X)$

نحسب أولاً $E(x^2)$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)dx = \int_0^1\left(\frac{3}{2}x^4 + x^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{3}{10}x^5 + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{11}{20} - \left(\frac{17}{24}\right)^2 =$$

وبنفس الطريقة نحسب : $E(y)$ و $Var(y)$

- حساب $E(X.Y)$

$$E(X.Y) = \frac{1}{18}\int_0^3 x.y\,(4xy + 3x^2y^2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3\int_0^1 (4x^2y^2 + \frac{3}{4}x^3y^3\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3\left[\frac{4}{3}x^3y^2 + \frac{3}{4}x^4y^3\right]_0^1 dy$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3\left[\frac{4}{3}y^2 + \frac{3}{4}y^3\right]dy$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{4}{9}y^3 + \frac{3}{16}y^4\right]_0^3$$

$$= \frac{1233}{96}$$

احسب $Cov(X.Y)$

$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

$= \frac{1233}{96} - \left(\frac{17}{24}\right)\left(\frac{27}{8}\right) = \_\_\_$

التوقع الشرطي:

ليكن X,Y متغيرات عشوائيات عندئذٍ التوقع الشرطي يعطى بالعلاقة:

$E(X \mid Y=y)$

① عندما X,Y منفصلات:

$E(X \mid Y=y) = \sum_x x \, f_{X|Y}(X \mid Y=y)$

② عندما X,Y مستمرات مطلقاً:

$E(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_{X|Y}(X \mid Y=y)\, dx$

تمرين: ليكن X,Y متغيران مستمران مطلقاً بدالة كثافة احتمالية مشتركة:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4x^2 + 2y^5 & ; \quad 0 \le x \le 1 \;,\; 0 \le y \le 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أوجد التوقع الشرطي $E(X \mid Y=y)$

الحل: إيجاد الدالة الشرطية:

$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (4x^2 + 2y^5)\, dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 + 2y^5 x\right]_0^1 = \frac{4}{3} + 2y^5$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{4x^2 + 2y^5}{\frac{4}{3} + 2y^5}$$

$$E(X|Y=y) = \int_0^1 x\left(\frac{4x^2+2y^5}{\frac{4}{3}+2y^5}\right) dx = \int_0^1 \frac{4x^3 + 2y^5 x}{\frac{4}{3}+2y^5}\, dx$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}+2y^5}\left[x^4 + x^2 y^5\right]_0^1 = \frac{1+y^2}{\frac{4}{3}+2y^5}$$

تمرين يُحل بنفس الطريقة:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4x^2y + 2y^5 & , \ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

متراجحة ماركوف:

ليكن X متغيراً عشوائياً غير سالب عندئذٍ:

$$P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a} \quad ; \ a > 0$$

متراجحة تشيبشيف:

إذا كان Y متغيراً عشوائياً على توقعاً منتهياً μ_Y عندئذٍ لكل $a>0$ يتحقق:

$$P(|Y - \mu_Y| \ge a) \le \frac{Var(Y)}{a^2}$$

النهاية