كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : العاشرة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التوقع الرياضي للمتغيرات التي تتبع توزيعاً مستمراً مطلقاً:

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً مطلقاً دالة كثافة الاحتمالية $f_X(x)$

نعرف توقع المتغير العشوائي بالشكل:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

سنستنتج فيما يلي التوقع الرياضي لبعض التوزيعات الهامة:

① X يتبع توزيعاً منتظماً على المجال $[\ell, R]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{R-\ell} & ; x \in [\ell, R] \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{R-\ell}\, dx = \int_{\ell}^{R} \frac{x}{R-\ell}\, dx$$

$$E(x) = \left[\frac{x^2}{2(R-\ell)}\right]_{\ell}^{R} = \frac{R^2-\ell^2}{2(R-\ell)} = \frac{R+\ell}{2}$$

في حال كان $\ell = 0$, $R = 1$ فإن $E(x) = \frac{1}{2}$

② X يتبع توزيعاً أسياً سالباً:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx=\int_{0}^{\infty} x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

باستخدام الكاملة بالتجزئة نجد أن:

$$E(X)=\left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx=\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty}$$

$$E(X)=0-\left(-\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}$$

③ X يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} & ;\ x\in\ ]-\infty,+\infty[\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx+\int_0^{+\infty}\frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

بفرض أن $x=-w$ وبالتالي:

$$E(X)=-\int_0^{\infty}\frac{w}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}\,dw+\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx=0$$

$$E(X)=0$$

التوقع لا نهائي:

مثال:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & ;\ x\geq 1\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= [\ln|x|]_1^{\infty} = \ln(\infty) = \infty$$

$$E(x) = \infty$$

التوقع غير معروف (غير محدد)

مثال:

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y^2} & ; y \geq 1 \\ \frac{1}{2y^2} & ; y \leq -1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_1^{\infty} \frac{y}{2y^2}\,dy + \int_{-\infty}^{1} \frac{y}{2y^2}\,dy$$

بفرض $y = -w$

$$E(x) = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dw}{w}$$

$$E(x) = \frac{1}{2}(\infty - \infty) = \infty - \infty$$ (غير معروف)

خصائص التوقع الرياضي:

X متغير عشوائي مستمر مطلقاً بدالة كثافة احتمالية $f_x(x)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ عندئذٍ فإن: [a]

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x)\,dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

b) X, Y متغيران عشوائيان مستمران مطلقاً بدالة كثافة احتمالية مشتركة $f_{X,Y}(x,y)$ و $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

عندئذٍ:

$$E(h(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

c) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$; $a, b \in \mathbb{R}$

d)

$$E(X + c) = E(X) + c$$

e) إذا كان X, Y مستقلان فإن:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

★ X توزيعاً طبيعياً $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow X = \sigma Z + \mu$$

$$E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \sigma E(Z) + \mu$$

$$E(X) = \mu$$

التباين والانحراف المعياري:

X متغير عشوائي يعرف تباين X بالشكل:

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - E(X))^2]$$

أحياناً يمكن أن نرمز لتوقعه μ:

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

نعرف الانحراف المعياري بالشكل:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

تعريف: X متغير عشوائي يتبع توزيع برنولي عندئذٍ:

$$P_X(x) = \begin{cases} \theta & ; x = 1 \\ 1-\theta & ; x = 0 \\ 0 & ; \text{خلا ذلك} \end{cases}$$

$$Var(x) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left[(X-\theta)^2\right]$$
$$= (1-\theta)^2\theta + (0-\theta)^2(1-\theta)$$
$$= (1-\theta)\theta\left[1-\theta+\theta\right] = \theta(1-\theta)$$
$$\Rightarrow Var(x) = \theta(1-\theta)$$
$$\sigma = \sqrt{\theta(1-\theta)}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة