كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : التاسعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1) لتكن R حلقة و R^n هي R مودول أبيلي حيث أن الجداء السلمي معرف بالشكل:

$$a(b_1, b_2, \dots, b_n) = (ab_1, \dots, ab_n)$$

• $(R^n, +)$ زمرة آبلية:

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n) = (b_1+a_1, b_2+a_2, \dots, b_n+a_n)$$

حيادي الجمع هو $(a_1, \dots, a_n)$ لكل عنصر $(0, 0, \dots, 0)$ نظير جمعي هو $(-a_1, \dots, -a_n)$ حيث $-a_i$ هو a_i بما أن $1 \le i \le n$ لكل a_i في R يكون $(R^n, +)$ إذن تجميعية الجمع في R^n هي نتيجة مباشرة لتجميعية الجمع في R وتبديلية الجمع في R^n من كون الجمع تبديلي في R إذاً $(R^n, +)$ زمرة آبلية.

• عملية الجداء السلمي:

$$\cdot : R \times R^n \to R^n$$
$$a(b_1, \dots, b_n) \to (ab_1, \dots, ab_n)$$

تحقق كل الخواص المطلوبة حيث أن ab_i عائد لإحدى في الحلقة R

$\forall a, b \in R$, $a_i \in R^n$ و $i = \overline{1,n}$

(*) $(a+b)(a_1, \dots, a_n) = ((a+b)a_1, \dots, (a+b)a_n)$

من تعريفية الجداء على الكم في R نجد أن:

$$(a+b)(a_1,\dots,a_n) = (aa_1+ba_1,\dots,aa_n+ba_n)$$
$$= (aa_1,\dots,aa_n)+(ba_1,\dots,ba_n)$$
$$= a(a_1,\dots,a_n)+b(a_1,\dots,a_n)$$

وباقي الخواص المتعلقة بالجدول تبرهن بطريقة مشابهة

$$(ab)(a_1,\dots,a_n) = a(b(a_1,\dots,a_n))$$

$$a[(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)] = a(a_1,\dots,a_n)+a(b_1,\dots,b_n)]$$

$$1(a_1,\dots,a_n) = (a_1,\dots,a_n)$$

2) إن أسرة العناصر في القياس $m\times n$ بحدات من R هي R مودول أبسط حيث

$$A=(a_{ij}) \quad ; \quad 1\le i\le m \ \text{و} \ 1\le j\le n$$
$$R\times M_{m\times n}(R) \longrightarrow M_{m\times n}(R)$$
$$(a,A) \longmapsto (a\,a_{ij})$$

• برهنا أن $M_{m\times n}(R)$ هي زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جمع العناصر الآلونة.

•• كما أن خواص المودول تتحقق مباشرة من كون R حلقة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(a+b)A = ((a+b)a_{ij}) = (aa_{ij} + ba_{ij})$

$= (aa_{ij}) + b(a_{ij}) =$

$= a(a_{ij}) + b(a_{ij})$

$= aA + bA$

وكذا بالنسبة لباقي الفرضيات

$M_m(R) \times M_{mxn}(R) \longrightarrow M_{mxn}(R)$

$(A, B) \longmapsto AB$

حيث $M_{mxn}(R)$: هي مجموعة المصفوفات من القياس $m \times n$ بعناصر من R.

3) $M_m(R)$ هي مجموعة المصفوفات من القياس $m \times n$ بعناصر من R

AB: هو جداء المصفوفات المألوف.

إذن: $M_{mxn}(R)$ هي $M_m(R)$ مقولة أي مقولة من $(M_m(R))$

- $(M_{mxn}(\mathbb{R}), +)$ زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات المألوف.

- بما أن جداء المصفوفات توزيعي على اليمين واليسار وجداء المصفوفات عملية تجميعية وحيادي الجداء هو المصفوفة الواحدية I_m نتيجة باقي الفرضيات تحقق.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4) لتكن R حلقة عندئذٍ إذا كان I هو R إيديال أيسر (أيمن) فإن I هو R-مودول أيسر (أيمن)

البرهان: بما أن I إيديال فإن $a_i \in I$ وذلك $\forall a \in R$، حيث أن الجداء في هذه الحالة هو الجداء في R وبالتالي فإن:

$$R \times I \longrightarrow I$$

وباقي الفرضيات يتبع مباشرة من كون الجداء توزيعي في الحلقة R والجداء تجميعي في R

5) لتكن I إيديالاً في R عندئذٍ إن عامل الحلقة R/I هو R-مودول أيسر جداؤه السلمي معرف بالشكل:

$$R \times R/I \longrightarrow R/I$$
$$(a, b+I) \longmapsto ab+I$$

• إن $(R/I, +)$ زمرة تبديلية بالنسبة للجمع المألوف

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$$

* $\forall a, b \in R,\ c+I \in R/I$

$$(a+b)(c+I) = (a+b)c+I$$
$$= (ac+bc)+I = (ac+I)+(bc+I)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= a(c+s)+b(c+I)$

(**) $\forall a \in R$ & $c+I$, $d+I \in R/I$

$a((c+I)+(d+I)) = a((c+d)+I)$

$= a(c+d)+I$

$= (ac+ad)+I$

$= (ac+I)+(ad+I)$

$= a(c+I)+a(d+I)$

(***) $\forall a,b \in R$, $c+I \in R/I$

$(ab)(c+I) = (ab)c+I = a(bc)+I$

$= a(bc+I) = a(b(c+I))$

(****) $1 \in R$, $c+I \in R/I$

$1(c+I) = 1 \cdot c + I = c+I$

وهو المطلوب

النهاية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة