كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف الحبر:

لتكن R حلقة بواحدة إن M هو R- حبر إذا تحققت الفرضيات التالية:

1) M هو R- مودول.

2) نعرف على M عملية جداء

$\forall m_1, m_2 \in M \Rightarrow m_1 . m_2 \in M$

بحيث يحقق هذا الجداء الشرط:

$R \times M \longrightarrow M$

ما يلي:

$\forall r \in R ; m_1, m_2 \in M \Rightarrow$

$r(m_1 . m_2) = (r m_1) . m_2 = m_1 . (r . m_2)$

مثال:

نعلم أن كل حلقة هي Z- حبر فإذا كانت R هي حلقة تبديلية عندئذٍ R هي R- حبر.

تعريف: لتكن S مجموعة جزئية من M حيث M هو R- مودول عندئذٍ $\langle S \rangle$ ترمز إلى تقاطع كل المودولات الجزئية من M التي تحوي S.

ونقول بأن $\langle S \rangle$ هي المودول الجزئي من M المولد بـ S

بينما نسمي عناصر S أسرة مولدات $\langle S \rangle$

بكلام آخر يمكن اعتبار $\langle S \rangle$ بأنها أصغر مودول جزئي من M يحوي S.

* إذا كانت $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ نكتب:

$$\langle S \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

ملاحظة:

لتكن M هي R-مودول و $S \subseteq M$ إذا كانت $S = \emptyset$ عندئذٍ $\langle S \rangle = \{0\}$ بينما إذا كانت $S \neq \emptyset$ عندئذٍ

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \; ; \; n \in \mathbb{N}, \; a_i \in R, \; s_i \in S \right\}$$

$1 \leq i \leq n$

تعريف: لتكن $M = \langle S \rangle$ هي R-مودول و

1) إذا كانت S مجموعة منتهية نقول بأن M هو مودول منتهي التوليد.

2) إذا كانت $S = \{m\}$ نقول بأن $M = \langle m \rangle$ هو مودول دوري (Cyclic)

3) إذا كان M هو منتهي التوليد فإنّ أصغر عدد من المناصر الكامنة لتوليد M فوق الحلقة R يدعى رتبة المودول M ويرمز له $\mu(M)$ إذا لم يكن M منتهي التوليد عندئذٍ $\mu(M) = \infty$

مثال ومقارنة:

1) $\mu(\{0\}) = 0$

② M دوري $\Leftrightarrow$ $\mu(M)=1$

مبرهنة: لتكن M هي R- مودول ولتكن N مودولاً جزئياً من M إذا كان N و M/N منتهيا التوليد عندئذٍ إن M منتهي التوليد ويحقق:

$$\mu(M) \leq \mu(N) + \mu(M/N)$$

الإثبات:

لتكن $K = \mu(N)$ ، $N = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ ، $S = \{x_1, \dots, x_n\}$

ولنأخذ الإسقاط الطبيعي $\pi : M \to M/N$

نختار $T = \{y_1, \dots, y_\ell\} \subseteq M$ بحيث أن:

$\{\pi(y_1), \dots, \pi(y_\ell)\}$

هو أصغر مجموعة مولدات لـ M/N من حيث العدد أي:

$\mu(M/N) = \ell$

$M/N = \{\pi(y_1), \dots, \pi(y_\ell)\}$

سنثبت أن $M = \langle S \cup T \rangle$ عندئذٍ:

$$\mu(M) \leq |S \cup T| = k + \ell = \mu(N) + \mu(M/N)$$

ليكن $x \in M$ عنصراً كيفياً عندئذٍ:

$$\pi(x) = a_1 \pi(y_1) + \dots + a_\ell \pi(y_\ell)$$

ليكن $y = a_1 y_1 + \dots + a_\ell y_\ell$ عندئذٍ $y = \langle T \rangle$

$$\pi(x - y) = \pi(x) - \pi(y) = 0$$

$$\Rightarrow x - y \in \ker(\pi) = N \Rightarrow x - y \in N = \langle S \rangle$$

$$\Rightarrow x = (x - y) + y \in \langle S \cup T \rangle$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبسبب كيفية x من M نجد أن $M=\langle SUT\rangle$

تعريف: لتكن R حلقة بواحدة و M هو R- مودول و $X \subseteq M$ نعرف عادم X ("annihilator") وترمز له بـ Ann(X) بأنّه:

$$Ann(X)=\{a\in R ; ax=0 \text{ و } \forall x\in X\}$$

* يكفي لإثبات أن Ann(X) هو إيديال أيمن في R.

$$(ba)x=b(ax)=b0=0 \Rightarrow ba\in Ann(X)$$

برهنة: لتكن R حلقة و $M=\langle m\rangle$ هي R- مودول دوري عندئذٍ $M \cong R/Ann(m)$

الإثبات:

$$f: R \to M$$
$$a \to am$$

إنّ f هو R- هومومورفيزم مودولات غامر بواسطة

$$Ker(f)=\{a\in R ; am=0\}=Ann(m)$$

حسب نظرية الأيزومورفيزم الأولى فإنّ:

$$R/Ann(m) \cong M$$

نتيجة: إذا كان F حقلاً و M هي F- مودول دوري غير صفري عندئذٍ $M \cong F$

الإثبات:

بما أنّ F حقلاً إذاً F مثالي إيديالين فقط هما

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

F و $\{0\}$ وبما أن $Ann(M)$ هو إيديال أيّ

في F عندئذٍ:

$$Ann(M) \begin{cases} = F \\ = \{0\} \end{cases}$$

ولكن $1 \in F$ و $1 \notin Ann(M)$ لأن $1.m = m \neq 0$

إذاً $Ann(M) = \{0\}$ بسبب الحالة الثانية

$$M \cong F/\{0\} = F$$

تعريف: لتكن R حلقة مبدلية و M هو R ـ مودول نقول بأن العنصر $x \in M$ بأنّهُ عنصر التفاف (torsion element) إذا تحقق: $Ann(x) \neq \{0\}$

وبالتالي $x \in M$ هو عنصر التفاف إذا وفقط إذا

وجد $a \in R$ يحقق $ax = 0$, $a \neq 0$

ـ لتكن M_r مجموعة عناصر الالتفاف في M

* إذا كان $M_r = \{0\}$ نقول بأن M مودول حرّ من الالتفاف

(torrsiam_free Mudule)

* إذا كان $M = M_r$ نقول بأن M هو مودول التفاف

(torsion Mudule)

مبرهنة: لتكن R حلقة مبدلية و M هي R مودول

عندئذٍ:

① M_r هو مودول جزئي من M يسمى مودول الالتفاف

② M/M_r مودول حرّ من الالتفاف

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الإثبات:

① $\forall x,y \in M, \quad \forall c,d \in R$

لإثبات أن $x,y \in Mr$ يوجد $0 \neq a,b \in R$ بحيث $ax=0$, $by=0$ وبما أن R حلقة تبديلية عندئذٍ $ab \neq 0$ وبالتالي:

$$ab(cx+dy) = bc(ax)+ad(by)=0$$

وبما أن المجموعة تبديلية لأنها حلقة جزئية

$$\Rightarrow cx+dy \in Mr$$

لأن: $0 \neq a.b \in Ann(cx+dy)$

② ليكن $B \ni a \neq 0$ بحيث $a(x+Mr)=0$

عندئذٍ $ax \in Mr$ وبالتالي يوجد $0 \neq b \in R$ بحيث

$$b(ax)=0 \Leftarrow (b.a)x=0$$

لما أن $a.b \neq 0$ وبالتالي $x \in Mr$ لما يقتضي أن $x+Mr=0$ إذاً M/Mr حقل بالتعريف

المجموع المباشر، المتواليات الصحيحة، الهومومورفزم:

ليكن $M_1, \dots, M_n$ مجموعة منتهية من R موديولات نعرف على الجداء الديكارتي $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ العمليتين:

$$(x_1, \dots, x_n)+(y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

$$a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$$

حيث: $a \in R, (x_1, \dots, x_n) \& (y_1, \dots, y_n) \in M_1 \times \dots \times M_n$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذا $M_1 \times \dots \times M_n$ هي العلبتين المرجعيتين لهما تعرف R مودول جزء $(0, \dots, 0)$ يدعى المجموع المباشر $M_1, \dots, M_n$ مودول ويرمز له بـ:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \text{ أي } M_1 \oplus \dots \oplus M_n$$

ليكن $f_i : M_i \to N$ حيث R - تشاكل مودولات يكون بناء R - تشاكل مودولات معرف بالشكل التالي:

$$f : M_1 \oplus \dots \oplus M_n \to N$$

معرف بالشكل:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

مبرهنة: ليكن M هو R - مودول و $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية منه:

① $M = M_1 + M_2 + \dots + M_2$

② $M_i \cap (M_1 + M_2 + \dots + M_{i-1} + M_{i+1} + \dots + M_n) = 0$

عندئذ:

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

الإثبات: $f_i : M_i \to M$ هو تشاكل الإدماج حيث

$$f_i(x) = x \quad \forall x \in M_i$$

نعرف $f : M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ بالشكل:

$f(x_1,\dots,x_n)=x_1+x_2+\dots+x_n$

f هو R هومومرفيزم مودولات إذن f غامرية:

$\forall x\in M \Rightarrow x=x_1+\dots+x_n$ ، $x_i\in M$

$\forall i=\overline{1,n}$

نواة f:

لبرهن أن $\ker(f)=(x_1,\dots,x_n)$ عندئذٍ:

$x_1+\dots+x_n=0$ وبالتالي:

$x_i=-(x_1+\dots+x_{i-1}+x_{i+1}+\dots+x_n)$

إذاً

$x_i\in M_i\cap(M_1+\dots+M_{i-1}+M_{i+1}+\dots+M_n)$

ونعلم:

$x_i=0$ لكن $1\le i\le n$ مايعني أن:

$(x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0)$

$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\cong M$ و f هو إيزومرفيزم إذاً

مسألة: ليكن M هو R - مودول و M_i هو R - مودول جزئي نقول بأن M_1 هو مباشر (direct summand) إذا وجد $M_2\subset M$ بحيث أن $M=M_1\oplus M_2$ مودول جزئي و M_2 هو R -

تعريف: لتكن R حلقة و $i\in\mathbb{N}$ أنه لدينا متوالية من المودولات وهومومرفيزمات المودولات:

$$\dots\to M_{i-1}\xrightarrow{f_i} M_i\xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1}\to\dots$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نقول بأن المتوالية الدقيقة هي متوالية صحيحة عند M_i إذا تحقق الشرط:

$$Im(f_i) = \ker(f_{i+1})$$

ملاحظة: نقول بأن المتوالية صحيحة إذا وفقط إذا كانت صحيحة عند كل حد من حدودها.

حالات خاصة:

① $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M$

متوالية صحيحة إذا وفقط إذا كان f متباين injective ~~injective~~

② $M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$

متوالية صحيحة إذا وفقط إذا كان g غامر.

③ $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ (*)

متوالية صحيحة إذا وفقط إذا كان f متباين و g غامر و

$$Im(f) \cong \ker(g)$$

$$M_2 \cong M / Im(f)$$

يدعى كوناة f. $M/Im(f)$

تمرين ① إن المتوالية الصحيحة (*) تدعى متوالية صحيحة قصيرة (Shortek act sequence)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② المتوالية ⓐ الصحيحة المقصورة تدعى انشطاراً (انقساماً)
إذا وفقط إذا كان (split)
$Im(f) = ker(g)$
حداً مباشراً لـ M.

مبرهنة:
$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$
متوالية مقصورة عندئذٍ إن الشروط التالية متكافئة:
① يوجد تشاكل $\alpha: M \to M_1$ بحيث $\alpha \circ f = 1_{M_1}$
② يوجد تشاكل $\beta: M_2 \to M$ بحيث: $g \circ \beta = 1_{M_2}$

③ المتوالية $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$
انشطار إذا كانت الشروط التالية متكافئة:
$M \cong Im(f) \oplus ker(\alpha)$
$M \cong ker(g) \oplus Im(\beta)$
$M \cong M_1 \oplus M_2$

النهاية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z