كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك١

المحاضرة : السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ميكانيك (1)
ملخص (6)

السؤال الأول : لتكن M نقطة مادية تتحرك على المنحنى :

$$x = a\cos(\varphi)$$
$$y = b\sin(\varphi)$$

بحركة خاضعة لقانون السطوح نحو O .
حيث a و b ثوابت.

والمطلوب : إيجاد معادلة الحركة φ والمسار لهذه النقطة والسرعة العددية والتسارع .

الحل : -

الحركة خاضعة لقانون السطوح معناه تحقق :

$$\frac{1}{2}(xy' - yx') = C$$

$$\Leftrightarrow xy' - yx' = C_1 \quad ; \quad C_1 = 2C \quad \dots (*)$$

لدينا $\begin{cases} x' = -a\varphi'\sin\varphi \\ y' = b\varphi'\cos\varphi \end{cases}$ بالتعويض في (*) نجد :

$$(a\cos\varphi)(b\varphi'\cos\varphi) - (b\sin\varphi)(-a\varphi'\sin\varphi) = C_1$$

$$ab\varphi'\cos^2\varphi + ab\varphi'\sin^2\varphi = C_1$$

$$ab\varphi' = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi' = \frac{C_1}{ab} = k \leftarrow \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow \varphi = kt + C_2 \quad ; \quad (\text{نفرض عندما } t=0 \text{ كانت } \varphi = 0)$$

$$C_2 = 0 \Leftarrow 0 = 0 + C_2 \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = kt}$$

- المسار : نحذف الزمن من معادلات الحركة x و y :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos(\varphi) \\ \frac{y}{b} &= \sin(\varphi) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{والجمع}]{\text{بالتربيع}} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

فالمسار قطع ناقص نصفا قطراه a و b ومركزه (0,0) .

- السرعة العددية :

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$= \sqrt{a^2\varphi'^2 \sin^2\varphi + b^2\varphi'^2 \cos^2\varphi} = \sqrt{a^2K^2\sin^2(Kt) + b^2K^2\cos^2(Kt)}$$

$\varphi = Kt$

- التسارع :

$$\vec{w} = x''\vec{i} + y''\vec{j}$$

$$\Rightarrow x'' = -a\varphi''\sin\varphi - a\varphi'^2\cos\varphi = -a\varphi'^2\cos\varphi \quad ; \varphi'' = 0$$

$$y'' = b\varphi'\cos\varphi - b\varphi'^2\sin\varphi = -b\varphi'^2\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{w} = -a\varphi'^2\cos\varphi\,\vec{i} - b\varphi'^2\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$[\varphi = Kt] \quad = -aK^2\cos(Kt)\,\vec{i} - bK^2\sin(Kt)\,\vec{j}$$

السؤال الثاني : نقطة مادية تتحرك في المستوى xoy وفق المعادلات :

$$x = \frac{a}{\cos\varphi} \quad , \quad y = b\tan(\varphi)$$

بحركة خاضعة لقانون السطوح حول المبدأ o . والمطلوب :

1 - أوجد مسار الحركة

2 - أوجد المعادلة $\varphi(t)$ علماً أنه في اللحظة $t=0$ كانت $\varphi = 0$

الحل :

1- لإيجاد المسار نحذف الزمن من x و y :

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos\varphi} \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \quad \cdots(1)$$

$$\frac{y}{b} = \tan(\varphi) \Rightarrow \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \tan^2(\varphi) \quad \cdots(2)$$

نعلم أن $\frac{1}{\cos^2(\varphi)} = 1 + \tan^2(\varphi)$ <= من (1) و (2) نجد :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <= وهي معادلة قطع زائد

2 - بما أن المركبة خاضعة لقانون السطوح فإن الشرط التالي محقق

$$(*) \cdots xy' - x'y = c \qquad \text{و} \begin{cases} x' = \frac{a\varphi' \sin(\varphi)}{\cot^2(\varphi)} \\ y' = \frac{b\varphi'}{\cot^2(\varphi)} \end{cases}$$

نعوض في (*) ;

$$\left(\frac{a}{\cot(\varphi)}\right)\left(\frac{b\varphi'}{\cot^2(\varphi)}\right) - \left(\frac{a\varphi' \sin(\varphi)}{\cot^2(\varphi)}\right)\left(b \frac{\sin\varphi}{\cot\varphi}\right) = c$$

$$\Rightarrow \frac{ab\varphi'}{\cot^3(\varphi)} - \frac{ab\varphi' \sin^2(\varphi)}{\cot^3(\varphi)} = c$$

$$\Rightarrow \frac{ab\varphi'(1 - \sin^2(\varphi))}{\cot^3(\varphi)} = c \qquad \Rightarrow \left[\frac{ab\varphi'}{\cot(\varphi)} = c\right] \rightarrow \text{معادلة تفاضلية تابع } \varphi \text{ ومتحول } t$$

$$\frac{\varphi'}{\cot\varphi} = \frac{c}{ab} \qquad \Rightarrow \frac{d\varphi}{\cot\varphi} = \frac{c}{ab} dt$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{d\varphi}{\cot\varphi}}_{(A)} = \int \frac{c}{ab} dt$$

$$A = \int \frac{d\varphi}{\cot\varphi} = \int \frac{\cot\varphi}{\cot^2\varphi} d\varphi = \int \frac{\cot\varphi}{1 - \sin^2(\varphi)} d\varphi$$

نفرض $u = \sin\varphi$ <= $du = \cot\varphi \, d\varphi$

$$\Rightarrow A = \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|$$

وبالتالي بالعودة للمعادلة:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right| = \frac{c}{ab}t + c_1$$

عند $t=0$ تكون $\varphi = a$:

$$c_1 = 0 \quad <= \quad 0 = 0 + c_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right| = \frac{2c}{ab}t$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = e^{\frac{2c}{ab}t}$$

$$\Rightarrow 1+\sin\varphi = (1-\sin\varphi)\,e^{\frac{2c}{ab}t}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi\left(1+e^{\frac{2c}{ab}t}\right) = e^{\frac{2c}{ab}t} - 1$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{\frac{2c}{ab}t} - 1}{e^{\frac{2c}{ab}t} + 1}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \arcsin\left(\frac{e^{\frac{2c}{ab}t} - 1}{e^{\frac{2c}{ab}t} + 1}\right)$$

مكتبة A to Z