كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة :الثانية عشر/نظري/د.لمى رزوق

المنطق الكلاسيكي والمنطق الضبابي

Classical Logic & Fuzzy Logic

تاريخ ونشأة الضبابية *Fuzziness* :

بدأت الحكاية مع المنطق الكلاسيكي **Classical** (البوليانيBoolean) الذي يناقش احتمالين فقط، فإمّا الوجود 1 أو العدم 0، إمّا الصّواب أو الخطأ، إمّا الأبيض أو الأسود...

لكن هذا المنطق لا يمثل دوماً التفكير البشري الفضفاض في خياراته. و على الرغم من أن الكثير من العلاقات تعتمد على المنطق **الكلاسيكي**، إلا أنّه لا يمثل العلاقات التي قد تكون صحيحة جزئياً أو خاطئة جزئياً في نفس الوقت.

يُقصد **بالضبابية** أن القضية قد تكون صحيحة جزئياً وخاطئة جزئياً في الوقت نفسه.

وينص **مبدأ الغموض** على أن كل شيء نسبي.

FUZZY LOGIC

قام المنطق الضبابي على تعميم **المنطق الكلاسيكي** (التقليدي)، وذلك لاتخاذ قرارات أفضل في حالات عدم اليقين. يحاكي هذا المنطق الطريقة التي يفكر فيها البشر في اتخاذ القرار، والتي تأخذ بعين الاعتبار كل الاحتمالات الممكنة.

تطورت فكرة الضبابية مع الزمن بشكل تدريجي على يد العديد من العلماء والرياضيين. وفي عام 1965م، عرّف العالم الأذربيجاني لطفي زاده **المجموعات الضبابية** لأول مرة وأدخل مفاهيم جديدة إلى عالم الضبابية، نذكر أهمها باختصار:

- **المجموعة الضبابية** M هي مجموعة عناصرها تنتمي إليها بنسبة معينة تتراوح بين 0 و1، تسمى **درجة العضوية**.
- **تابع العضوية** f هو الدالة الرياضية التي تحدد **درجة انتماء** أي عنصر للمجموعة الضبابية M،

$$f: \mathrm{M} \mapsto [0,1]$$

مقارنة:

في المجموعات التقليدية ينتمي العنصر إما كلياً أو لا ينتمي أبداً للمجموعة (1 أو 0)، في حين تسمح المجموعات الضبابية **بالانتماء الجزئي**.

ونقول أنّ العنصر x ينتمي للمجموعة M بدرجة:

$$f(\mathrm{x}) \in [0,1]$$

حيث:

$f(\mathrm{x}) = 0$ عندما لا ينتمي العنصر x للمجموعة M.

$f(\mathrm{x}) = 1$ عندما ينتمي العنصر x للمجموعة M بشكل كلي.

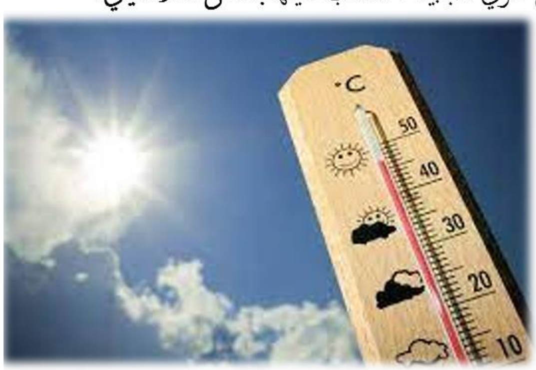
$f(\mathrm{x}) \in]0,1[$ عندما ينتمي العنصر x للمجموعة M بشكل جزئي.

EXAMPLE

فمثلاً عند التحدث عن أحوال الطقس، حين نعرّف الطقس الحار على أن تبدأ درجة حرارته من 30° فما فوق، فيما عدا ذلك فهو طقس بارد.

فهل درجة الحرارة 29° تدل أننا في طقس بارد؟!

بالتأكيد هذا غير منطقي، وهذا واحد من العديد من الأمثلة الواقعية التي تحوي ضبابية لا تناسب تمثيلها **بالمنطق الكلاسيكي**.



حلّ **المنطق الضبابي** هذه الإشكالية حيث:

يمكن إدخال درجة عضوية لهذه الحرارة كأن نقول أن 29° تمثل الطقس الحار **بنسبة معينة** ولتكن 0.9، وهي درجة العضوية التي تنتمي بها الدرجة 29° إلى الطقس الحار

$$f(29^{\circ}) = 0.9$$

يطبق المنطق الضبابي في مجالات عديدة، كالاقتصاد والصناعة وتكنولوجيا المعلومات والاستثمار والبيولوجيا والانترنت.

ذكرنا في بداية المحاضرة أن ((المنطق البولياني)) كمرادف للمنطق الكلاسيكي=التقليدي=الأرسطي=الثنائي، لنتعرف عليه أكثر:

المنطق البولياني Boolean Logic:

لقد أخذ جورج بول (1850 م) المبادئ والمفاهيم الفلسفية للمنطق الأرسطي (حوالي 350 ق.م) وحولها إلى نظام جبري يعتمد على متغيرات ذات قيمتين فقط :صواب (True/1) وخطأ(False/0) ، ويستخدم العمليات المنطقية الأساسية للتعامل مع هذه القيم، وقد دُعي **بجبر بول.**

هذا التحول هو ما مهد الطريق للعصر الرقمي الذي نعيشه اليوم، حيث أصبحت أفكار أرسطو المنطقية هي نفسها التي تدير حواسيبنا وهواتفنا وأنظمتنا الإلكترونية المعقدة.

باختصار: **المنطق البولياني** هو اللغة الرياضية التي تكتب بها الحواسيب أفكار المنطق الكلاسيكي.

جبر بول: هو أحد أشكال المنطق الرمزي الذي يبين كيفية عمل أدوات الربط المنطقية:

- **و=∧=AND=.=***
- **أو=∨=OR=+.**

رياضياً:

تعريف : جبر بوول هو مجموعة B غير خالية وعملية جمع يرمز لها + وعملية ضرب يرمز لها * بحيث تتحقق الشروط الآتية :

B_0 : قانون الانغلاق Closure law

لكل $a , b \in B$ فإن $a * b \in B \quad , \quad a + b \in B$

B_1 : قانون الإبدال Commutative law

لكل $a , b \in B$ فإن

$$a * b = b * a \quad , \quad a + b = b + a$$

B_2 : قانون التجميع Associative law

لكل $a , b , c \in B$ فإن

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad , \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

B_3 : قانون التوزيع Distributive law

لكل $a , b , c \in B$ فإن

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$
$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

B_4 : قانون الوحدة Identity law

المجموعة B تحتوى على العنصر المحايد الجمعى ويرمز له بالرمز O وتحتوى على العنصر المحايد للضرب ويرمز له بالرمز U بحيث أن لكل $a \in B$ فإن

$$a + O = a \quad , \quad a * U = a$$

B_5 : قانون المكملة Complement law

لكل $a \in B$ يوجد $a' \in B$ يسمى مكملة a بحيث أن

$$a + a' = U \quad , \quad a * a' = O$$

ونظام جبر بوول يرمز له بالثلاثية $(B , + , *)$.

ونلاحظ من قانون التوزيع B_3 أن المتطابقة الأولى

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

لا تمثل متطابقة فى الجبر العادى بينما المتطابقة الثانية

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

تمثل متطابقة فى الجبر العادى. وعملية المكملة لها الأسبقية على عملية الضرب وكذلك عملية الضرب لها الأسبقية على عملية الجمع فمثلا

$a + b * c$ تعنى $a + (b * c)$ وليس $(a + b) * c$

$a * b'$ تعنى $a * (b')$ وليس $(a * b)'$

وفى كثير من الأحيان يمكن الاستغناء عن الرمز $*$ ونستخدم التجاور بدلا من ذلك، فمثلا

قانون الإبدال $a * b = b * a$

يمكن التعبير عنه بالصورة $a\,b = b\,a$

مثال ١ : نفرض $B = \{0, 1\}$ وعمليتي الجمع والضرب معرفتان بالنسبة إلى B بالجدولين الآتيين

*	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	1

اثبت أن النظام $(B, +, *)$ يكون جبر بوول.

الحـــل :

B_0 : قانون الانغلاق متحقق لان جميع العناصر داخل كل جدول تنتمي في المجموعـــة B ،
أي إن لكل $a, b \in B$ فإن $a * b \in B$, $a + b \in B$

B_1 : قانون الإبدال متحقق بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب وهذا واضح من التمـــاثل في كل جدول، أي إن لكل $a, b \in B$ فإن

$$a + b = b + a \quad , \quad a * b = b * a$$

B_2 : قانون التجميع متحقق على الأعداد.

B_3 : قانون التوزيع متحقق على الأعداد.

B_4 : قانون الوحدة متحقق ومن الجدولين واضح أن
العنصر المحايد الجمعي O بالنسبة لعمليـــة الجمع هو 0
العنصر المحايد الضربي U بالنسبة لعملية الضرب هو 1

B_5 : قانون المكملة متحقق وفي الجدول الآتي نوضـــح انـــه لكـــل $a \in B$ يوجـــد المكملة $a' \in B$ بحيث أن $a * a' = O$, $a + a' = U$

$a \in B$	$a' \in B$	$a + a'$	$a * a'$
0	1	1	0
1	0	1	0

النظام $(B, +, *)$ يكون جبر بوول .

مثال : نفرض أن B مجموعة من الافتراضات التي تتولد من القضايا $p , q , ..$. النظام $(B , \vee , \wedge)$ يكون جبر بورل حيث $\wedge$, $\vee$ هي أدوات الربط المنطقية (أداة الوصل وأداة الفصل).

الحــل :

B_0 : قانون الانغلاق متحقق حيث أن B تتولد من القضايا $p , q , ...$ ولكل قضية

$$p \;,\; q \in B$$

فإن $p \wedge q \in B \quad , \quad p \vee q \in B$

B_1 : قانون الإبدال متحقق على الافتراضات ، حيث أنه لأى $p \;,\; q \in B$ فإن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

B_2 : قانون التجميع متحقق على الافتراضات، حيث أنه لأى $p , q , r \in B$ فإن

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$
$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

B_3 : قانون التوزيع متحقق على الافتراضات، حيث أنه لأى $p , q , r \in B$ فإن

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

B_4 : قانون الوحدة متحقق و العنصر المحايد الجمعي O بالنسبة لأداة الوصل $\vee$ هــو قضية خاطئة منطقياً F في مجموعة الافتراضات B ويحقق

$$p \vee F \equiv p \quad \text{لأى} \quad p \in B$$

والعنصر المحايد الضربي U بالنسبة لأداة الفصل $\wedge$ هو قضية صحيحة منطقياً T في مجموعة الافتراضات B ويحقق

$$p \wedge T \equiv p \quad \text{لأى} \quad p \in B .$$

B_5 : قانون المكملة متحقق لأنه لكل $p \in B$ يوجد $\sim p \in B$ بحيث أن

$$p \wedge \sim p \equiv F \quad , \quad p \vee \sim p \equiv T$$

أى أن النفى يمثل المكملة . فالنظام $(B , \vee , \wedge)$ يكون جبر بورل.

ملاحظة لمعلومات حديثة:

من أهم توسيعات extensions الأعداد الحقيقية:

1) مجموعة الأعداد العقدية **Complex numbers**

$$\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}J\ ;\ J^2 = -\mathbf{1}\ ,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$$

2) مجموعة الأعداد الثنائية/ المزدوجة **Dual numbers**

$$\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}J\ ;\ J^2 = \mathbf{0}\ ,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$$

3) مجموعة الأعداد العقدية المنقسمة **Split-Complex numbers**

$$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}J\ ;\ J^2 = \mathbf{1}\ ,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$$

وقد تم اكتشاف مجموعة جديدة من توسيعات الأعداد الحقيقية مع بداية عام 2023 هي

4) "**مجموعة الأعداد المركبة الضبابية الضعيفة** Weak Fuzzy Complex ":

$$\boldsymbol{F}_J = \{x_0 + x_1 J\ ;\ x_0 , x_1 \in \boldsymbol{R}\ , J^2 = t \in]0,1[\ \}$$

- أتمنى لكم كل التوفيق والنجاح –