كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة :10+11/نظري/د .لمى رزوق

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

البوابات والدارات المنطقية
Logical Gates and Circuits

من أهم تطبيقات المنطق الرياضي، استخدامه في تصميم شبكات المفاتيح الكهربائية، وهي عبارة عن دارات كهربائية (دوائر) مثل الموجودة في مفاتيح الإضاءة، والأجهزة الالكترونية المختلفة، التي تتضمن عددًا كبيرًا من الدارات التي تؤدي بعض العمليات التي يتكرر تنفيذها كثيًرا وبسرعة عالية جداً، وتتألف الدارة عادةً من مجموعة من العناصر (أسلاك، قواطع أو مفاتيح، وترانزستورات، ومقاومات،...).
تعمل الدارة على معالجة إشارات أو نبضات كهربائية (اتصال وانقطاع ON and OFF) وبالتالي يمكننا وصف هذه العملية باستخدام الجبر المنطقي الثنائي فنستخدم:

- الرمز **1** أو **T** ليعني **ON** – أي التيار يمر ويكون المفتاح الكهربائي في حالة تشغيل -القاطع مغلق-.
- الرمز **0** أو **F** ليعني **OFF** – أي التيار لا يمر ويكون المفتاح الكهربائي في حالة عدم تشغيل -القاطع مفتوح-

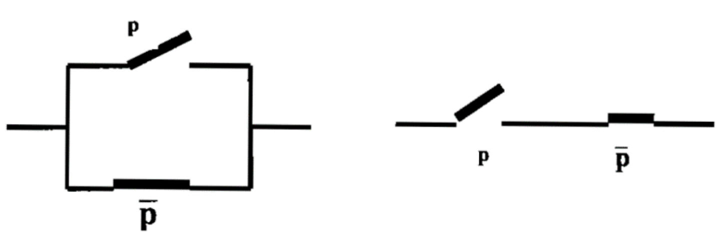
حالة عدم تشغيل " OFF "   **حالة تشغيل " ON "**

وتعتبر البوابات المنطقية العناصر الأساسية في تشكيل الدارات، التي تتكون منها الأنظمة الرقمية مثل الحاسبات وأجهزة الاتصالات الرقمية وأجهزة التحكم وغيرها.
تستخدم البوابات المنطقية لتنفيذ عمليات منطقية على واحد أو أكثر من المدخلات لإنتاج مخرج واحد. أي تعتمد البوابة المنطقية عناصر الإدخال Input وفي كل لحظة سوف يستوعب كل عنصر من عناصر الإدخال وحدة أساسية Bit من المعلومات هي إما 0 أو 1 وبالتالي سوف تُعالج البوابة المنطقية متتابعة من المعلومات تمثل سلسلة من الرمزين 0 و 1، لتعطي نتيجة المعالجة في مخرج واحد (عنصر الإخراج Output) وهذه النتيجة هي أيضاً إما 0 أو 1.

ملاحظة:

في لغة المنطق: يمثل المفتاح الكهربائي قضية بسيطة، في حين تمثل الدارة الكهربائية قضية مركبة.

المفتاحان المتتامان: هما المفتاحان اللذان لهما دائماً أوضاع متعاكسة، فإذا كان أحدهما مفتوح يكون الآخر مغلق.

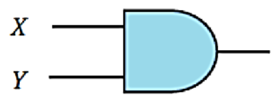


يمثل هذان المفتاحان في لغة المنطق، القضية ونفيها، أي أن $\bar{p} = \sim p$.

من الأنواع الرئيسية للبوابات المنطقية:

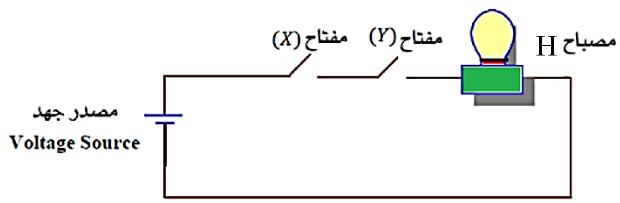
1. بوابة AND (و ∧):

لها مدخلان أو أكثر ولها مخرج واحد، وتؤدي هذه البوابة وظيفة العملية المنطقية ((الوصل ∧))، كما أنها تعمل كدارة مفاتيح كهربائية بسيطة مكونة من عدد من المفاتيح الموصولة على **التسلسل/التوالي**، حيث يمثل كل مدخل من مدخلاتها بمفتاح، وبالتالي يكون عدد هذه المفاتيح يساوي عدد مدخلات البوابة. ولتوضيح ذلك نعتبر بوابة AND ذات مدخلين X و Y ومخرج H والتي نرمز لها بالرمز



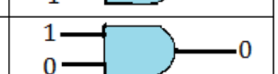
$H = X \wedge Y$

سوف تعمل هذه البوابة كدارة كهربائية بسيطة مكونة من المفتاحين X وY (المدخلين) موصلين على **التوالي** والمصباح H (المخرج)



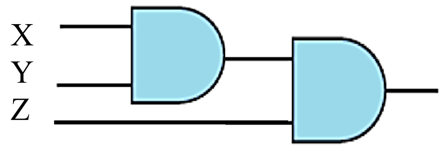
نلاحظ أنّ المصباح H يكون مضيئاً في حالة واحدة فقط هي الحالة التي يكون كل من المفتاحين مغلقين معاً (ON – Closed).
أي أن المخرج H يأخذ القيمة (1) في حالة واحدة فقط هي الحالة التي يأخذ فيها المدخلين القيمة (1).

والجدول التالي يلخص وظيفة البوابة المنطقية AND ذات المدخلين:

Input		Output	AND Gate
X	Y	H=X AND Y	
0	0	0	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	

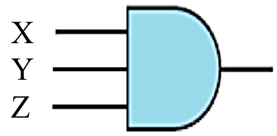
وبصورة عامة فإن البوابة المنطقية AND وبغض النظر عن عدد مدخلاتها فإن مخرجها سوف يساوي (1) فقط في الحالة أو اللحظة التي تكون جميع مدخلاتها تساوي (1).

❖ البوابة المنطقية AND ل 3 مدخلات X و Y و Z تكون بالشكل:



$H = (X \wedge Y) \wedge Z$

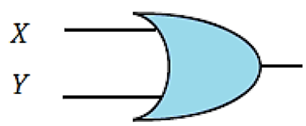
أو اختصاراً بالشكل:



$H = X \wedge Y \wedge Z$

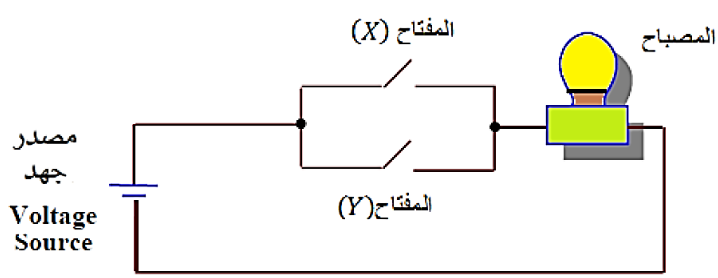
2. بوابة OR (أو ∨):

لها مدخلان أو أكثر ولها مخرج واحد، وتؤدي هذه البوابة وظيفة العملية المنطقية ((الفصل ∨))، كما أنها تعمل كدارة مفاتيح كهربائية بسيطة مكونة من عدد من المفاتيح الموصلة على **التوازي/ التفرع**، حيث يمثل كل مدخل من مدخلاتها بمفتاح، وبالتالي يكون عدد هذه المفاتيح يساوي عدد مدخلات البوابة كما هو الحال في البوابة المنطقية AND. ولتوضيح ذلك نعتبر بوابة OR ذات مدخلين X و Y ومخرج H والتي نرمز لها بالرمز



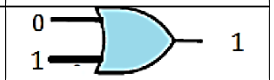
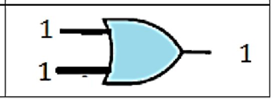
$H = X \vee Y$

سوف تعمل هذه البوابة كدارة كهربائية بسيطة مكونة من المفتاحين X و Y (المدخلين) موصلين على **التوازي** والمصباح H (المخرج)



نلاحظ أنّ المصباح H يكون مضيئاً في في الحالة التي يكون فيها واحد على الأقل من المفتاحين في وضع الإغلاق (ON – Closed). أي أن المخرج H يأخذ القيمة 1 عندما يأخذ أحد المدخلين أو كليهما القيمة 1.

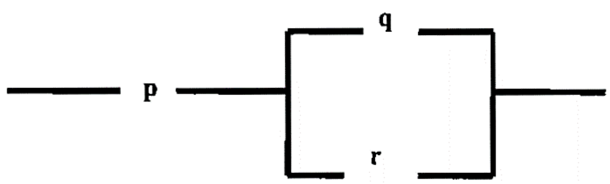
والجدول التالي يلخص وظيفة البوابة المنطقية OR ذات المدخلين:

Input		Output	OR Gate
X	Y	H =X OR Y	
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	1	

وبصورة عامة فإن البوابة المنطقية OR وبغض النظر عن عدد مدخلاتها فإن مخرجها سوف يساوي 1 في اللحظة أو الحالة التي يكون واحد على الأقل من مدخلاتها يساوي 1 أي أن المخرج يساوي 0 في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون جميع المدخلات تساوي 0.

وظيفة1: أوجد شكل البوابة المنطقية OR لـ3مدخلات X و Y و Z

تمرين: مثّل بلغة المنطق ما تعنيه الدارة:



الحل:

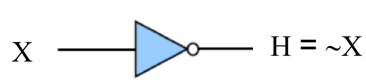
-إنّ المفتاحان q و r موصلان على التوازي، ويمكن تمثيل ذلك منطقياً بالصورة $q \vee r$ ،

-المفتاح p موصول على التسلسل مع باقي الدارة،

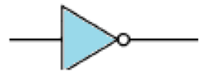
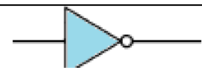
إذاً، يمكن تمثيل الدارة بالشكل $p \wedge (q \vee r)$.

3. البوابة العاكسة NOT:

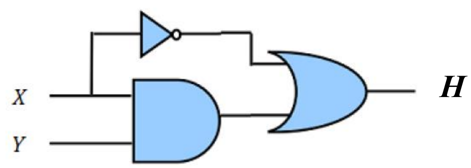
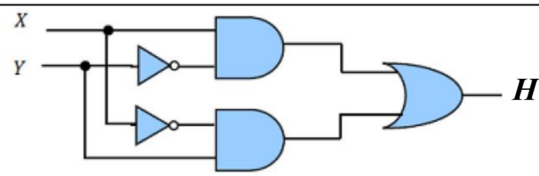
هي بوابة ذات مدخل واحد ومخرج واحد، وتؤدي عملية **نفي** قيمة المدخل، أي أنها تعكس قيمة المدخل 1 إلى القيمة 0 في المخرج وتغير قيمة المدخل 0 إلى القيمة 1 في المخرج. ونرمز للبوابة NOT بالرمز



الجدول التالي فيلخص فكرة عمل البوابة العاكسة:

INPUT X	OUTPUT H	NOT Gate (Inverter Gate)
0	1	0  1
1	0	1  0

أمثلة على تمثيل البوابات والدارات بلغة المنطق:

	$H = (X\ AND\ Y) OR\ NOT\ X$ $= (X \wedge Y) \vee \sim X$
	$H =$ $(X\ AND\ NOT\ Y)\ OR\ (NOT\ X\ AND\ Y\ )$ $H = (X \wedge \sim Y) \vee (\sim X \wedge Y)$

---- تمارين ----

1) أوجد قيمة H

$$H = X\ OR\ Y\ AND\ NOT\ Z$$

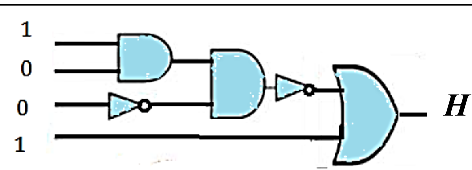
إذا علمت أن $X = Z = 1$ و $Y = 0$

الحل:

لدينا $H = X \vee Y \wedge \sim Z$ وبالتعويض بالقيم نحصل على

$$H = 1 \vee 0 \wedge \sim 1 = 1 \vee 0 \wedge 0 = 1 \vee 0 = 1$$

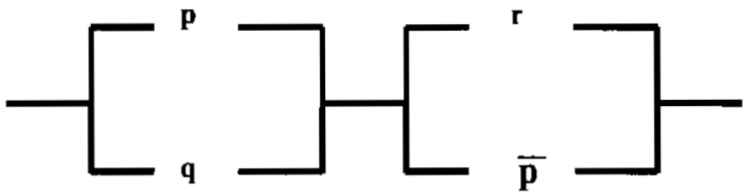
2) احسب قيمة H إذا كانت:



$$H = NOT[(1\ AND\ 0) AND\ NOT\ 0]\ OR\ 1 = \sim [(1 \wedge 0) \wedge \sim 0] \vee 1$$
$$= \sim [0 \wedge 1] \vee 1 = \sim 0 \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$$

3) مثّل بلغة المنطق ما تعنيه الدارات التالية:

الدارة الأولى:



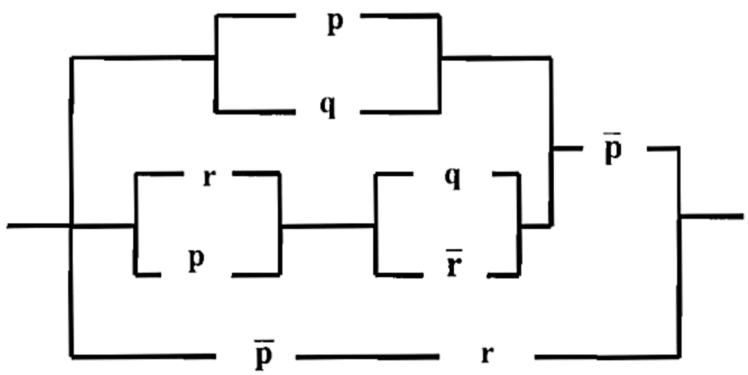
الحل:

تحتوي هذه الدارة على مجموعتين متصلتين على التسلسل، كل مجموعة تحتوي على مفتاحين متصلين على التفرع/ التوازي،

إذاً بلغة المنطق فيمكننا تمثيل الدارة بالصورة: $(p \vee q) \wedge (r \vee \sim p)$

حيث أنّ $\sim p$ تعني المفتاح المتمم $\bar{p}$.

الدارة الثانية:

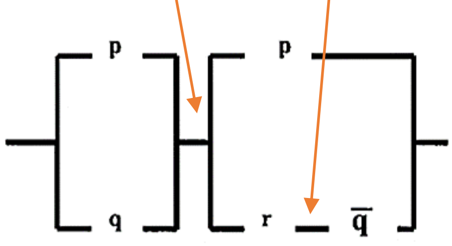


الحل

$$\big(((p \vee q) \vee ((r \vee p) \wedge (q \vee \sim r))) \wedge \sim p \big) \vee (\sim p \wedge r)$$

4) مثّل الدارة التي تعبّر عن القضية المنطقية: $(p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge \sim q))$

الحل:

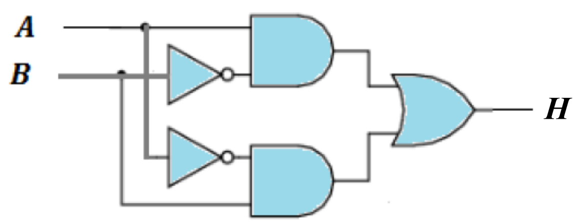


5) تمرين:

احسب قيمة H الناتجة عن الدارة المجاورة إذا علمت أن:

$A = 10011101$

$B = 00110001$



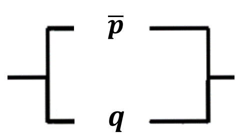
الحل: لاحظ أن التعبير المنطقي لهذه الدارة هو: $H = (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$

ومن أجل حساب قيمة H حسب قيم المُدخلين A و B المعطيين سوف نلخص الحسابات في الجدول التالي:

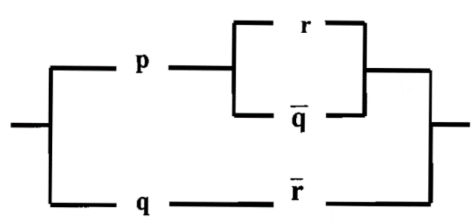
A	1	0	0	1	1	1	0	1
B	0	0	1	1	0	0	0	1
$\sim A$	0	1	1	0	0	0	1	0
$\sim B$	1	1	0	0	1	0	1	0
$A \wedge \sim B$	1	0	0	0	1	0	0	0
$\sim A \wedge B$	0	0	1	0	0	0	0	0
H	1	0	1	0	1	0	0	0

6) ارسم الدارة التي تعبّر عن العبارة p→q

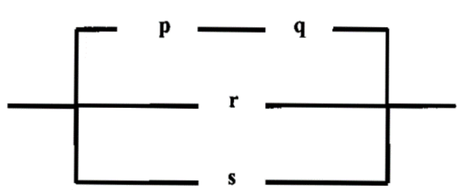
إنّ العبارة المعطاة تكافئ $\sim p \vee q$، وهذه العبارة تُمثَّل بالشكل:



وظيفة2: مثّل بلغة المنطق الدارتين:



الدارة 1



الدارة 2

تبسيط الدارات:

يمكن استخدام القوانين المنطقية في تبسيط الدارات، ولهذا أهمية كبيرة في إنقاص عدد المفاتيح في الدارة وبالتالي توفير الوقت والجهد والكلفة، ويتم هذا التبسيط عن طريق مفهوم **الدارات المتكافئة** الذي يشبه مفهوم القضايا المتكافئة.

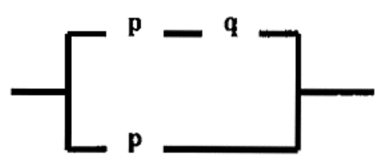
تعريف: يُقال عن دارات المفاتيح الكهربائية أنها **دارات متكافئة** إذا كانت تؤدي نفس العمل.

خطوات تبسيط الدارة الكهربائية:

1- نكتب العبارة المنطقية التي تمثلها الدارة.
2- نبسّط العبارة المنطقية وفق القوانين المنطقية المناسبة.
3- نمثّل العبارة المنطقية الناتجة بدارة كهربائية مكافئة مبسطة للدارة المعطاة.

أمثلة لتبسيط دارات كهربائية:

مثال 1: لتكن لدينا الدارة الموضحة بالشكل:



بلغة المنطق، يمكن تمثيل هذه الدارة بالقضية المركبة: $(p \wedge q) \vee p$

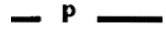
والتي جدول الحقيقة لها هو:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

نلاحظ من الجدول أن القضية المركبة في العمود الأخير$(p \wedge q) \vee p$، تكافئ القضية البسيطة p في العمود الأول.

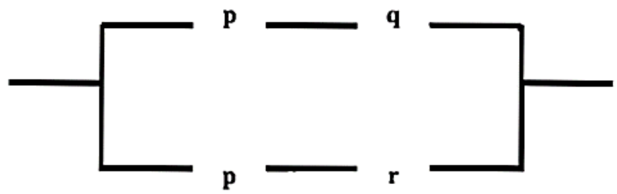
أي أنّ التيار يمر في الدارة إذا كان المفتاح p مغلق (وهذا ما يمثله السطر الأول والثاني في الجدول)، وأنّ التيار لا يمر في الدارة إذا كان المفتاح p مفتوح (وهذا ما يمثله السطر الثالث والرابع في الجدول).

إذاً، الدارة المعطاة تكافئ الدارة المبسطة الآتية:



النتيجة: باستخدام مفهوم التكافؤ المنطقي، تمكّنا من تبسيط دارة تحتوي على 3 مفاتيح إلى دارة تحتوي على مفتاح واحد فقط، مما يفيد في خفض التكلفة عند تصميم الدارة.

مثال 2:

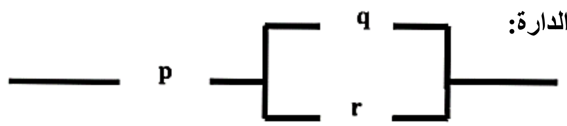


الدارة المعطاة يمكن التعبير عنها بلغة المنطق فى الصورة $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

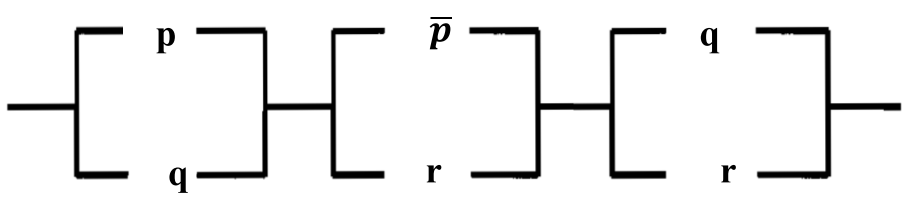
وباستخدام قوانين المنطق نعلم من قانون التوزيع أن

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

فالدارة المعطاة تكافئ الدارة:



مثال 3: لتبسيط الدارة الموضحة بالشكل:



نكتب تمثيلها المنطقي، وهو بالشكل: $(pVq) \wedge (\sim pVr) \wedge (qVr)$

نبسّط هذه العبارة المنطقية:

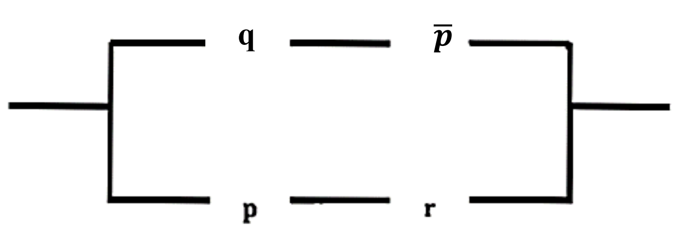
$(pVq) \wedge (\sim pVr) \wedge (qVr)$

$\equiv (pVq) \wedge (qVr) \wedge (\sim pVr) \wedge (\sim pVp)$ -حيادي الفصل-

$\equiv [qV(p \wedge r)] \wedge [\sim p(r \wedge p)] \equiv [qV(p \wedge r)] \wedge [\sim p(p \wedge r)]$

$\equiv (q \wedge \sim p)\, V(p \wedge r)$

هذه العبارة المكافئة للعبارة الأولى تمثل الدارة المبسطة:



مسألة ضوء الغرفة:

هذه المسألة هي أحد المسائل التقليدية في شبكات المفاتيح الكهربائية وتتمثل بكيفية التحكم بضوء الغرفة عن طريق مفتاحين مختلفين في نفس الغرفة. بفرض أن المفتاحين هما p و q، فإنّ الاحتمالات الممكنة لتشغيل الضوء بوجود مفتاحين تكون:

q	p	**الاحتمالات الممكنة**
T	T	الاحتمال الأول
F	T	الاحتمال الثاني
T	F	الاحتمال الثالث
F	F	الاحتمال الرابع

ولتصميم دارة مفاتيح للتحكم في تشغيل أو عدم تشغيل الضوء من أياً من المفتاحين، لدينا الطريقتان:

الطريقة الأولى: تعتمد على تصميم الدارة بحيث يتحقق:

1-مرور تيار في الدارة إذا كان المفتاحين في نفس الوضع: وهذا يتحقق عندما يكون المفتاحان في وضع التشغيل معاً (الاحتمال الأول) أو وضع عدم التشغيل معاً (الاحتمال الرابع).

نرمز لوضع تشغيل المفتاحين معاً بالقضية: $(p \wedge q)$ وهي قضية صحيحة.

كما نرمز لوضع عدم تشغيل المفتاحين معاً بالقضية: $(\sim p \wedge \sim q)$ وهي قضية صحيحة.

$$\boxed{\boldsymbol{T \wedge T = T}}$$

2-عدم مرور تيار في الدارة إذا كان المفتاحين في وضعين مختلفين: وهذا يحدث عندما يكون أحد المفتاحين في وضع التشغيل والآخر في وضع عدم التشغيل (الاحتمال الثالث والرابع).

أي عندما يكون المفتاحين p و q في وضعين مختلفين،

فإن القضية $(p \wedge q)$ تكون خاطئة، كذلك تكون القضية $(\sim p \wedge \sim q)$ خاطئة.

$$\boxed{\boldsymbol{T \wedge F = F \wedge T = F}}$$

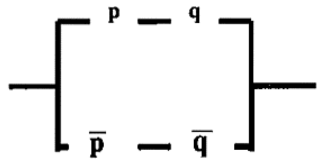
إذاً الدارة تُمَثل بالقضية المنطقية:

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

ويكون جدول الحقيقة للطريقة الأولى:

p	q	~ p	~ q	p ∧ q	~p∧~q	(p∧q)∨(~p∧~q)
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**

ونرسم الدارة بالشكل:



نلاحظ أن الدارة موصولة على التفرع:

- **السلك العلوي** يحتوي على المفتاحين p و q موصولين على التسلسل.
- **السلك السفلي** يحتوي على المفتاحين المتممين $\bar{p}$ و $\bar{q}$ موصولين على التسلسل.

عندما يكون المفتاحين pو q في وضع تشغيل ON، فإن التيار الكهربائي يمر بالدارة عن طريق السلك العلوي، أما عندما يكونان في وضع عدم تشغيل OFF فإن المفتاحين المتممين $\bar{p}$ و $\bar{q}$ يكونا في وضع تشغيل وبالتالي يمر التيار بالدارة عن طريق السلك السفلي.

لكن، بمجرد الضغط على أحد المفتاحينp أو q ليصبحا بوضعين مختلفين، فإن التيار لن يمر بالدارة، لا بالسلك العلوي ولا بالسلك السفلي.

الطريقة الثانية: تعتمد على تصميم الدارة بحيث يتحقق:

1-مرور تيار في الدارة إذا كان المفتاحين في وضعين مختلفين: وهذا يحدث عندما يكون أحد المفتاحين في وضع التشغيل والآخر في وضع عدم التشغيل (الاحتمال الثالث والرابع).

أي عندما يكون المفتاحين p و q في وضعين مختلفين أحدهما صواب والآخر خطأ، فإن القضية $(p \vee q)$ تكون صحيحة، كذلك تكون القضية $(\sim p \vee \sim q)$ صحيحة.

$$\boldsymbol{T \vee F = F \vee T = T}$$

2-عدم مرور تيار في الدارة إذا كان المفتاحين في نفس الوضع: وهذا يتحقق عندما يكون المفتاحين في وضع التشغيل معاً (الاحتمال الأول) أو وضع عدم التشغيل معاً (الاحتمال الرابع).

نرمز لوضع تشغيل المفتاحين معاً بالقضية: $(p \vee q)$ وهي قضية صحيحة.

كما نرمز لوضع عدم تشغيل المفتاحين معاً بالقضية: $(\sim p \vee \sim q)$ وهي قضية خاطئة.

$$\boldsymbol{T \vee T = T}$$
$$\boldsymbol{F \vee F = F}$$

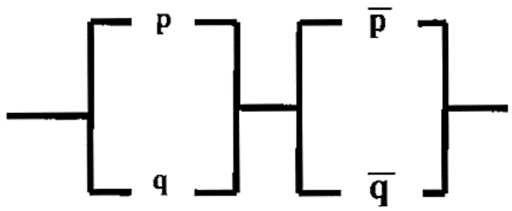
إذاً الدارة تُمَثل بالقضية المنطقية:

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

ويكون جدول الحقيقة للطريقة الثانية:

p	q	~p	~q	p ∨ q	~p ∨ ~q	(p ∨ q) ∧ (~p ∨ ~q)
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F

ونرسم الدارة بالشكل:



نلاحظ أن الدارة موصولة على التسلسل وفيها فرعين:

-**الفرع الأول** يحتوي على المفتاحين p و q موصولين على التفرع.

-**الفرع الثاني** يحتوي على المفتاحين المتممين $\bar{p}$ و $\bar{q}$ موصولين على التفرع.

عندما يكون المفتاحين p و q في وضع تشغيل ON، فإن المفتاحين المتممين $\bar{p}$ و $\bar{q}$ في وضع عدم التشغيل، وبالتالي فإن التيار الكهربائي يمر بفرع الدارة الأول ولا يمر بالفرع الثاني، عندئذٍ، لن يمر التيار بالدارة.
لكن، بمجرد الضغط على أحد المفتاحينp أو q ليصبحا بوضعين مختلفين، فإن المفتاحين المتممين $\bar{p}$ و $\bar{q}$ يكونان بوضعين مختلفين أيضاً، بالتالي فإن التيار سيمر بفرع الدارة الأول وبفرعها الثاني، أي سيمر التيار بالدارة.

باستخدام تكافؤ القضايا، نلاحظ أنّ:

$$\begin{aligned}
&(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \\
&\equiv ((p \vee q) \wedge \sim p) \vee ((p \vee q) \wedge \sim q) \\
&\equiv (\sim p \wedge (p \vee q)) \vee (\sim q \wedge (p \vee q)) \\
&\equiv ((\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)) \vee ((\sim q \wedge p) \vee (\sim q \wedge q)) \\
&\equiv (\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge p) \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)
\end{aligned}$$

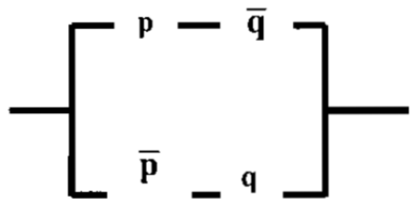
فتكون القضية التي تصف الطريقة الثانية لتمثيل ضوء الغرفة بالشكل:

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

ويكون جدول الحقيقة لهذه القضية:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F

وبالتالي بدلاً من الشكل الأخير للدارة في الطريقة الثانية، يمكن أن نرسمها بالشكل:



نلاحظ أن هذه الدارة موصولة على التفرع:

- **السلك العلوي** منها يحتوي على المفتاحين $\bar{q}$ وp موصولين على التسلسل.
- **السلك السفلي** يحتوي على المفتاحين $\bar{p}$ و q موصولين على التسلسل.

عندما يكون المفتاحان p و q في وضع تشغيل ON، فإن المفتاحين المتممين $\bar{p}$ و $\bar{q}$ في وضع عدم تشغيل، وبالنتيجة فإن التيار الكهربائي لن يمر بالسلك العلوي ولا بالسلك السفلي، وبالتالي لن يمر التيار بالدارة.

لكن، بمجرد الضغط على أحد المفتاحينp أو q ليصبحا بوضعين مختلفين، فإن المفتاحين المتممين $\bar{p}$ و $\bar{q}$ يصبحان بوضعين مختلفين أيضاً، وبالتالي فإن التيار يمر بالدارة، لأنه:

-إذا كان المفتاح p في وضع تشغيل، بينما المفتاح q في وضع عدم تشغيل، فإن التيار سيمر بالسلك العلوي.

-إذا كان المفتاح p في وضع عدم تشغيل، بينما المفتاح q في وضع تشغيل، فإن التيار سيمر بالسلك السفلي.