



كلية العلوم

القسم : الكيمياء

السنة : الاولى

المادة : رياضيات عامة ١

المحاضرة : السادسة / عملي /

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

5

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الدكتور :

المحاضرة:

المحاضرة (١٥) عملين



القسم: الكيمياء

السنة: الأولى

المادة: رياضيات عامة (١١)

التاريخ: / /

A to Z Library for university services

المعريف الأول: أوجد القيم الخاصة والمتجهات اللاغزيرة للعائلة للمصفونات الآتية

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (I\lambda - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1-2 & -1 \\ -2 & -2 & 1-3 \end{vmatrix} = 0$$

نضاع المحور أو الطريقة سايروس أو طريقة لابلاس

$$\begin{vmatrix} 1-1 & 1-2 & -1 \\ -2 & 1-3 & -0 \\ -2 & 1-3 & +1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (1-1) [(1-2)(1-3)-2] - 0 + 1 [2+2(1-2)] = 0$$

$$= (1-1) (1^2 - 5 \cdot 1 + 4) + 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$= 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1^2 + 5 \cdot 1 - 4 + 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$= 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$$

بالقبة الأقلية $(1, 1) \rightarrow$ حل

$$\begin{array}{r} \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ 1-1 \overline{) \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6} \\ \underline{\lambda^3 \quad \lambda^2} \\ 0 - 5\lambda^2 + 11\lambda \\ \underline{-5\lambda^2 + 5\lambda} \\ 0 \quad 6\lambda - 6 \\ \underline{6\lambda - 6} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

$$(1-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$25 - 4(1)(6)$$

$$25 - 24 = 1 = 5\sqrt{\Delta} = 1 > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\lambda_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

أي من الخيارات في حال $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \cdot X = 0$$

عند $\lambda = 3$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \bar{X} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2x_1 + x_3 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$-2x_1 - 2x_2 = 0 \dots \textcircled{3}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \text{ (2)} - 2x_1 = x_3 \text{ (1) من}$$

$$x_2 = -x_1 \text{ (3)} - 2x_2 = 2x_1 \text{ (3) عوض في}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_3 \\ \frac{1}{2} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = |\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \Rightarrow (1-1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & \lambda-2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-1) [(\lambda-2)(\lambda-2) - 2] + 2[0+1] - 2[0-\lambda+2]$$

$$\Rightarrow (1-1)(\lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda + 4 - 2) + 2 + 2\lambda - 4 = 0$$

$$= (1-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) + 2\lambda - 2 = 0$$

$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 + 4\lambda - 2 + 2\lambda - 2 = 0$$

$$= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

$$\boxed{\lambda = +1}$$

بالمقام الأول

$$\lambda - 1 \overline{\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4}$$

$$\lambda^3 - \lambda^2$$

$$0 - 4\lambda^2 + 8\lambda$$

$$- 4\lambda^2 + 4\lambda$$

$$0 \quad 4\lambda - 4$$

$$4\lambda - 4$$

$$0 \quad 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

$$\Delta: b^2 - 4(a)(c)$$

$$16 - 4(1)(4)$$

$$16 - 16 = 0$$

$$\lambda = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(1)} = 2 \text{ له طرفين}$$

ج) إذاً القيم الخاصة هي $(\lambda = 1 \text{ و } \lambda = 2)$

نوجد المتجهات الخاصة عندما $\lambda = 1$

$$(\lambda I - A)\bar{X} = 0 \Rightarrow \left(1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) \bar{X} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} -2x_2 - 2x_3 &= 0 & \text{--- (1)} \\ -x_2 - x_3 &= 0 & \text{--- (2)} \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 & \text{--- (3)} \end{aligned}$$

من المعادلة ① $-2x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow -2x_2 = -2x_3 \Rightarrow x_2 = x_3$

$\Rightarrow x_2 = x_3 \Rightarrow$ نضرب ③ $x_1 + 2x_3 - x_3 = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$

إذاً المتجه الخاص عند $\lambda = 1$ هو

$$(1-1)(1-2)(1-3) = 0$$

$\lambda = 1, 2, 3$ هي القيم الخاصة $\Leftrightarrow$

نوجد المتجهات الخاصة

$$(\lambda I - A)\bar{X} = 0$$

عند $\lambda = 1$

$$\left(1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) \bar{X} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 0 + 0 + x_3 &= 0 & \text{--- (1)} \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 & \text{--- (2)} \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 & \text{--- (3)} \end{aligned}$$

$$-x_1 - x_2 = 0$$

معادلاته ① $x_3 = 0$ نفرض في ②

$$-x_1 - x_2 = x_1 = x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

أي أن المتجهات الأساسية هي:

$$(I - A)x = 0 \Rightarrow \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \bar{x} = 0$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \bar{x} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 + x_3 = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$-x_1 - x_3 = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$-2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \quad \text{--- ③}$$

من ① فإن $x_1 = -x_3$ نفرض في ③

$$-2(-x_3) - 2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow 2x_3 - x_3 - 2x_2 = 0$$

$$-2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -2x_2 = -x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = [I - A] = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda + 4 &= 0 \\ 16 - 4(1)(4) &= 0 \\ 16 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$(2-1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & \lambda-2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-1)[(\lambda-2)(\lambda-2)-2] + [0+1] - 2[0-\lambda+2] = 0$$

$$(2-1)(\lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda + 4 - 2) + 2 - 2(-\lambda + 2) = 0$$

$$(2-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) + 2 + 2\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 + 4\lambda - 2 + 2 + 2\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

$$1 - 5 + 8 - 4 = 0$$

$$-4 + 8 - 4 = 0 \Rightarrow 4 - 4 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2) = 0$$

$$\boxed{\lambda=1, \lambda=2} \Rightarrow \lambda=2$$

$$\begin{array}{r} \lambda-1 \overline{) \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4} \\ \underline{\lambda^3 - \lambda^2} \\ -4\lambda^2 + 8\lambda \\ \underline{-4\lambda^2 + 4\lambda} \\ -4\lambda - 4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (\lambda-1)[(\lambda-2)(\lambda+1)-1] + [\lambda+1+0] - 2[-1+0] = 0$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2 + \lambda - 2\lambda - 2 - 1) + \lambda + 1 + 2 = 0$$

$$= \lambda^3 - \lambda^3 - 3\lambda - \lambda^3 + \lambda + 3 + \lambda + 3 = 0$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$

$$1 - 2 - 1 + 6 = 0$$

$$8 - 8 - 2 + 6 = 0$$

تجريباً، حل عدة المعادلات الخطية بطريقة غرام

$$S = \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

نفس الطريقة

$$= [-4 + 6 + 1] - [3 - 2 + 4] =$$

$$3 - 5 = -2 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = [2 + 9 + 4] - [12 + 1 - 6]$$

$$= 15 - 7 = 8$$



$$|A_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = [-8 + 2 + 3] - [1 + 6 + 8] = -3 - 15 = -18$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad \left| \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4 \right.$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-18}{-2} = 9 \quad \left| \quad \begin{array}{l} x_1 = 2, x_2 = 9, x_3 = 4 \\ x_3 = 9 \end{array} \right.$$



مكتبة
A to Z