كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة١

المحاضرة : **السادسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

العادلة المميزة للمصفوفات:

- المخطات الخاصة والقيم الخاصة للمصفوفات:

لتكن المصفوفة المربعة $A=(a_{ij})_{mn}$ سحن كل متجه $x=[x_1 \dots x_n]$

من أجل $x \neq 0$ وحقيقة $*$ $Ax=\lambda x$

يجتبه خاص ,, متجه لا يتغير ,,

ويسمى λ قيمة خاصة مرافقة لـ x.

الآن لضرب المعادلة $*$ بـ I [مصفوفة واحدية] إلى الطرف الأيسر

$$Ax=\lambda Ix \quad \} \quad (A-\lambda I)x=0$$
$$Ax-\lambda Ix$$

وهي تمثل جملة معادلات خطية متجانسة إلى الطرف الآخر / وعكن كتابتها بضرب بـ -1

$$(\lambda I-A)x=0$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ويتم إيجادها كمصفوفة:

$$= \begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{2m} \\ -a_{m1} & -a_{m2} & -a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يكون لهذه الحلة حل وحيد عندما $\det(\lambda I - A) = 0$

معادلة مجهول λ من الدرجة $|\lambda I - A| = 0$

وتسمى المعادلة المميزة لـ A ,, أو هي المعادلة المميزة لـ A.

أو حل هذه المعادلة يعطي قيم خاصة [قيم لـ λ] ومركبات المتجهات الموافقة للقيم الخاصة تسمى متجهات خاصة.

مثال: أوجد القيم الخاصة والمركبات الخاصة الموافقة لصيغة المعادلات التالية:

$$2X_1 + 2X_2 - X_3 = 0$$
$$X_1 + 3X_2 + X_3 = 0$$
$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 0$$

الحل: نشكل مصفوفة المعادلات:

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

لإيجاد القيم الخاصة

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

نعكس إشارة المصفوفة A ونطرح العكس من λ

نوجد القيم الخاصة من حل المعادلة:

$$P(*) = |\lambda I - A| = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0$$

نحلها بسارروس / التجميع

$$(\lambda-2)^2(\lambda-3) + 2 - 2\lambda + 3 - 2(\lambda-2) - 2(\lambda-2) = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

نوجد جذر المعادلة $\lambda = 1$ نقسم العشة على $\lambda - 1$ لازم يطلع معادلة من درجة المصفوفة.

$$p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-5)$$

$\lambda - 1$

$$p(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-5) = 0$$

$\lambda = 1$ } متجهان ذاتيان
$\lambda = 5$ } $\{1, 5\}$

- أما لإيجاد الأشعة الخاصة: $Ax = 0$

من أجل $\lambda = 1$ نعوض في المعادلة: $(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$H_{12}(-1)$
$H_{13}(-1)$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بمتحول الحرية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$-X_1 - 2X_2 - X_3 = 0$$

$$X_1 = 2X_2 - X_3$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2X_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أساس فضاء الحلول

المتجهة الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ وهما مستقلان خطياً

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أما الأساس الذاتي المقابل لـ $\lambda = 5$ هي

$$(1I - A)X = 0 \longrightarrow (5I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

H_{12}

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$H_{12(3)}$, $H_{13(-1)}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$H_{23}(1)\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_2 + 2x_1 - x_3 = 0$$

$$4x_1 - 2x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} x_3$$

$$\Rightarrow x_2 = x_3 - x_3 = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أحد الأشعة الخاصة هو:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مبرهنة الفضاء الخاصي:

نفرض أن متجه V ونعلم أن بعد الفضاء $\mathbb{R}^3$ يعني يوجد ثلاثة أشعة مستقلة خطياً أو أي عدد أشعة تشكل استقلال خطي ونرمز له $\dim V = r$ حيث r عدد صحيح.

نتيجة: إذا كانت $\lambda_1 \dots \lambda_n$ هي قيم مميزة للمصفوفة A - $I\lambda$ وكانت الأشعة $x_1 \dots x_n$ أشعة خاصة (موافقة) لهذه القيم المميزة فإن هذه المتجهات مستقلة خطياً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

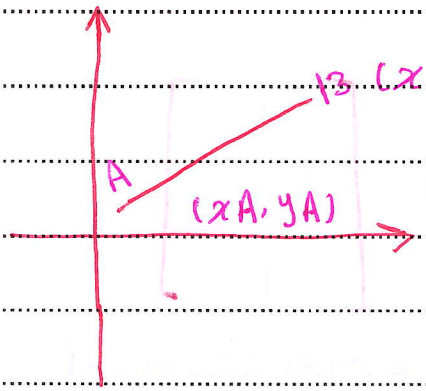
المضاء الحر [المكان بفضاء فارغ]

المتجه عبارة عن قطعة مستقيمة موجهة بدايتها A ونهايتها B ، طول المتجه هو طول القطعة المستقيمة [AB] ويرمز له بأحد الأشكال $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ أو أي رمز آخر يعبر عن الشيء على شكل مصفوفة سطرية الرتبة

$x = (x_1 \ , x_2 \ , \dots \ , x_n)$ من الشكل $1 \times n$

وهنا المتجه يمكن أن يكون 1×2 بالشكل التالي

$x = (x_1 \quad x_2)$



وهو عبارة عن المتجه

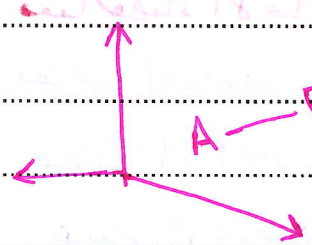
$x_1 = x_B - x_A$

$x_2 = y_B - y_A$

أما عندما المتجه من الشكل 1×3 أي يكتب بالشكل

$x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \in \mathbb{R}^3$

يسمى بالفراغ (x, y, z)



$\vec{x} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \ , y_B - y_A \ , z_B - z_A)$

$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

جمع متجهات هو متجه حقيقي

$X_1 (X_{11}, X_{12}, X_{13})$

$X_2 (X_{21}, X_{22}, X_{23})$

$\Rightarrow X_1 + X_2 = (X_{11}+X_{21} \quad X_{12}+X_{22} \quad X_{13}+X_{33})$

* يمكن الجمع حسب قاعدة سهل أو حسب قاعدة متوازي الأضلاع

أما المركبات السلمية المتجهة في R^3

$x = (x_1, x_2)$

$= x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j}$

في R^3:

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$= x \cdot \vec{i}, x_2 \cdot \vec{j}, x_3 \cdot \vec{k}$

طول المتجه هو مقدار حقيقي

في R^3 $\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

في R^3 $\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

• تعريف: من أجل M مجموعة ما معرف عليها عملية جمع وجداء متجه بعدد

ولتكن F وفضاء ما نقول أن $M(F)$ فضاء اتجاهي إذا تحقق:

① $(M, +1)$ زمرة تبديلية

② العملية x تحقق ما يلي:

• $1x = x$

• $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$ ، $\alpha \in R$

• $(\alpha + \beta)(x_1) = \alpha x_1 + \beta x_1$ و $\alpha, \beta \in R$

• $(\alpha \cdot \beta) x = \alpha(\beta x)$ و $\forall \alpha, \beta \in R, x \in M$

• تعريف: $F = R$ حقل حقيقي.

نقول عن المجموعة الجزئية $V \in M$ من المتجهات في الفضاء $M_n(F)$ أنه فضاء جزئي إذا تحقق:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① $x_1, x_2 \in V \Rightarrow x_1 + x_2 \in V$

② $\forall \alpha \in (F_R) \ , \forall x \in V \Rightarrow x\alpha \in V$

أي عليك استيفاء الشرطين السابقين بالشرط المدروس

بالتالي $\alpha x_1 + \beta x_2 \in V$

$\forall \alpha, \beta \in F \ , x_1, x_2 \in V$

الأمثلة:

ليكن $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ من R بين إذا كانت المجموعات الآتية تشكل فضاء شعاعي أم لا...

A) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ ، فضاء شعاعي جزئي من R

$V = [\{x, x, x, x\}]$

الحل:

للتحقق نقوم الشرط التالي:

$\forall \alpha, \beta \in R \ , x_1, x_2 \in V$

$x_1 \{a, a, a, a\}$

$x_2 (b, b, b, b)$

$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(a, a, a, a) + \beta(b, b, b, b)$

$= (\alpha a + \beta b, \alpha a + \beta b, \alpha a + \beta b, \alpha a + \beta b)$

أي الفضاء V جزئي من R^4.

B: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$

$V = (2x_1, 2x_1, 2x_1, x_1)$

$\forall \alpha, \beta \in R \ , x_1, x_2 \in V$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$X_1 = (2a, 2a, 2a, a)$

$X_2 = (2b, 2b, 2b, b)$

$\alpha X_1 + \beta X_2 = \alpha(2a, 2a, 2a, a) + \beta(2b, 2b, 2b, b)$

$= [2\alpha a + 2\beta b + 2\alpha a + 2\beta b + 2\alpha a + 2\beta b + \alpha a + \beta b]$

$= 2[\alpha a + \beta b + \alpha a + \beta b + \alpha a + \beta b + \alpha a + \beta b]$

©

$V = \{(x_1, x_2, x_3, 0)\}\ x_4 = 0$

$\forall \alpha, \beta \in R \quad , x_1, x_2 \in V$

$x(x_1, x_2, x_3, 0)$

$y(y_1, y_2, y_3, 0)$

$\alpha x + \beta y \in V$: لتحقق من الشرط

$\alpha(x_1, x_2, x_3, 0) + \beta(y_1, y_2, y_3, 0)$

$= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 + 0) \in V$

$x = 1$ ①

اذا : الفضاء V يعرف بالشكل

$\forall \alpha, \beta \in R \quad \forall x, y \in V$

$x(1, x_2, x_3, x_4)$

$y(1, y_2, y_3, y_4)$

$\alpha x + \beta y = \alpha(1, x_2, x_3, x_4) + \beta(1, y_2, y_3, y_4)$

$= (\alpha + \beta, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4)$

① لشرط $\notin V$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

x_1, x_3, x_2, x_4 E

$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ و } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}\}$

أعداد صحيحة

$\forall\ x+\beta y = \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta(y_1, y_2, y_3, y_4)$

$(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3 + \alpha x_4 + \beta y_1 + \beta y_2 + \beta y_3 + \beta y_4)$

$(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 + \beta x_4 + \beta y_4)$

$\notin V$ دائماً

لأن $\alpha, \beta \in R$ أعداد صحيحة / عدد صحيح كسري

$(x_2 + x_3, x_2, x_3)$ F

$(a+b, a, b)$

$(c+d, c, d)$

$\alpha(a+b, a, b) + \beta(c+d, c, d)$

$(\alpha \cdot a + a b + \beta c + \beta \cdot d, a\alpha + \beta c + \alpha \cdot b + \beta \cdot d) \in V$

تعريف 2: يقول عن المتجهات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ انها تولد الفضاء V اذا

تحقق

① $x_i \in V$ و $i = 1, \ldots, m$

② كل متجهة لـ V تكتب على شكل تركيب خطي

لمتجهة المتجهات

تعريف 3: يسمى فضاء متجهي هو أصغر عدد متجهات مستقلة خطياً المولدة لـ V

ورمز بعدد المتجهات المستقلة خطياً بالرمز r

$\dim V = r$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف 4: نقول عن مجموعة متجهات انها تشكل قاعدة أساس لفضاء V اذا كانت مولدة له $(X_1, \dots, X_n)$ المستقلة خطياً.

مثال: نفرض

$X_1 (1, 2, 2, 1)$

$X_2 (3, 4, 4, 3)$

$X_3 (1, 0, 0, 1)$

أوجد بعد أساس هذه المتجهات

الحل: نشكل مصفوفة مصاحبة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نحولها الى مدرجة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{13}(-1)]{H_{12}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

رتبة $r = 2 \Rightarrow \dim V = 2$

بعد الارتباط المستقلة خطياً هو (2) اذ القاعدة الاساس / هي أي مجموع (زوج) من الارتباط المستقلة ...

أو (x_1, x_2) أو (x_2, x_3)

مثال: برهن أن المتجهات:

$x_1 (1, 1, 1, 0)$ $\quad$ $x_3 (2, 1, 0, -1)$

$x_2 (4, 3, 2, 1)$ $\quad$ $x_4 (4, 2, 0, -2)$

أوجد بعد هذا الفضاء / الاساس / القاعدة

الحل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نشكل المصفوفة المصاحبة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\dim V = 2$ ، $r = 2$

عدد الأعمدة المستقلة خطياً هو (2)

إذاً الأعمدة الأولى والثانية تشكل

مع سؤالين يمكن تشكيل القاعدة

من أي زوجين من الأعمدة من V ماعدا (X_3, X_4) لا تشكل

لأن $2X_3 = X_4$ (م. ج).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z