كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة١

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

1) طريقة المعادلات الأولية / غاوس / تعتمد على المصفوفة الموسعة ثم تأخذ منحى آخر على المصفوفة

2) حل المعادلات الخطية باستعمال طريقة التقسيم LU

مضغوط: 1- تقسيم مصفوفة الأمثال / المعادلات / إلى LU

حيث L: مصفوفة مثلثية سفلى وعناصر قطرها الرئيسي تساوي الـ (1)

و U مصفوفة مثلثية عليا

$$\Rightarrow A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ L_{21} & 1 & 0 & \cdots \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{m1} & L_{m2} & \cdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & & U_{2n} \\ 0 & & & & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & U_{mn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعادلات

نوجد عناصر المصفوفتين L و U كالآتي:

الصف والعمود الأول $1 \geq n$ ترتبط أوجد اعتماد أكبر من 1

$$U_{11} = a_{11} \qquad U_{12} = a_{12} \qquad U_{1n} = a_{1n}$$

2-

$$U_{kn} = a_{kn} - \sum_{i=1}^{k=1} L_{kj} U_{jn}$$

مجموع

$$L_{kn} = a_{kn} - \sum_{d=1}^{k=1} L_{nj} U_{j+k}$$

$$a_{23} = a_{23} - \sum_{j=1}^{2-1=1} L_{2j} \cdot U_{j3}$$

مثال:

$$= a_{23} - L_{21} \cdot U_{13}$$

$A \cdot x = B$ يكون حل المعادلات:

$L \cdot U \cdot X = B \Rightarrow Ly = B$

نحلها ونوجد y ثم نوجد x من حل المعادلة $U(x) = y$

مثال: أوجد حل الجملة الآتية باستخدام طريقة التفسير LU:

$$2X_1 + X_3 = 1$$

$$X_1 + 2X_2 = 0$$

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 0$$

* الناتج: مصفوفة مربعة لأنه لدينا 3 مجاهيل و 3 معادلات.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$Ax = B$

نقسم A إلى مصفوفتين LU

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow U_{11} = 2$

$U_{12} = 0$ (عنصر أول بعمود أول)

$U_{13} = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مصفوفة L المثلثية:

$L_{21}U_{11} = 1 \Rightarrow L_{21}(2) = 1 \Rightarrow L_{21} = \frac{1}{2}$

سطر أول عمود ثاني

$L_{21}U_{12} + 1U_{22} = 2 \Rightarrow U_{22} = 2$

$L_{21}U_{13} + U_{23} = 0 \Rightarrow U_{23} = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow LU = A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = A$$

سطر ثالث عمود أول

$L_{31}(2) = 2 \Rightarrow L_{31} = 1$

سطر ثالث عمود ثاني

$L_{31}(0) + 2L_{32} = 3 \Rightarrow L_{32} = \frac{3}{2}$

سطر ثالث عمود أول

$L_{31}(1) - \frac{1}{2}L_{32} + U_{33} = 4 \Rightarrow U_{33} = \frac{15}{4}$

$$\Rightarrow LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

حل معادلة المعادلات بالشكل: $Ax = B$

$LU(x) = B \Rightarrow Ly = B \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 1 \quad , \quad \frac{1}{2}y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2}$

$y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{4} + y_3 = 0$

$\Rightarrow y_3 = -\frac{1}{4}$

* هنا بدنا x مو y

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y = ux$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

① $2x_1 + x_3 = 1$

② $2x_2 - \frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{2}$

③ $\frac{15}{4}x_3 = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$

$x_3 = -\frac{1}{15}$ حل معنا من المعادلة

x_2 بالتعويض في ② لإيجاد

$x_2 = -\frac{4}{15}$

x_1 بالتعويض في ① لإيجاد

$x_1 = \frac{8}{15}$ ←

سؤال: قسم المصفوفة إلى LU:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* $U_{11} = 2$ * $U_{13} = 0$

* $U_{12} = 0$ * $U_{14} = 3$

* $L_{21}.a_{11} = 1 \Rightarrow L_{21}(2) = 1$

$\Rightarrow L_{21} = \frac{1}{2}$

* $L_{21}U_{12} + 1\,U_{22} = 2 \Rightarrow U_{22} = 2$

* $L_{21}.U_{13} + 1\,U_{23} = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}(0) + U_{23}(3)$

$\Rightarrow U_{23} = 3$

* $L_{21}.U_{14} + U_{24} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}(3) + U_{24} = 4$

$\Rightarrow U_{24} = \frac{5}{2}$

ما نؤدي إلى:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* $L_{31}(2) = 0 \Rightarrow L_{31} = 0$

* $L_{31}(0) + L_{32}(2) = 2 \Rightarrow L_{32} = 1$

$L_{31}(0) + L_{32}(3) + U_{33} = -3 \Rightarrow U_{33} = -6$

$L_{31}(3) + L_{32}(\frac{5}{2}) + U_{34} = 1 \Rightarrow U_{34} = -\frac{3}{2}$

- نضرب السطر الرابع بالعمود الرابع لنستخرج L_{43} و U_{44}:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -6 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) طريقة كرامر لحل جملة المعادلات الخطية غ المجهولة:

نعني المعادلة $a_1X_1 + a_2X_2 \dots\dots a_nX_n = h$

حيث $h \neq 0$ معادلة خطية غ متجانسة / لأنها لا تساوي الصفر /

أي الشرط اللازم والكافي لوجود حل وحيد محلولة مكونة من n معادلة

غ مجهولة بـ n مجهول هو أن يكون [محدد مصفوفة المعادلات غير معدومة

أي $\det \neq 0$ «$AX = H$

الخطوات:

لتكن جملة المعادلات الخطية غ المجهولة من الشكل:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \dots\dots a_{1n}X_n = h_1$$
$$a_{21} + a_{22}X_2 \dots\dots a_{2n}X_n = h_2$$
$$a_{m1} + a_{m2}X_n \dots\dots a_{mn}X_n = h_n$$

- أولاً نحسب $\det(A)$ أي $|A|$ ولازم يكون لا يساوي الصفر
- ثانياً: نحسب A نقتطع منها استبدال العمود الأول بعمود الثوابت

ثم نحسب $|A_1|$ فيكون: $X_1 = \frac{|A_1|}{A}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ثالثاً: حيث A2 تنتج من استبدال العمود الثاني لمصفوفة المعادلات بعمود الثوابت

$$A = \begin{bmatrix} a11 & h_1 & a13 & a1m \\ a21 & h_2 & a23 & a2m \\ & & & \\ am1 & him & am3 & amn \end{bmatrix} \rightarrow x_2 = \frac{|A_2|}{A}$$

نكرر العملية حتى نصل إلى العمود الأخير An

$$\Rightarrow x_n = \frac{|A_n|}{A}$$

مثال:

① $2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5$

② $x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1$

③ $3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$

④ $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$

الحل: مصفوفة المعادلات:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad H \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow |A| = 120$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

بدلنا الأول اللي فيه محدد بالثوابت

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$|A_1| = -240 \Rightarrow x_2 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-240}{-120} = 2$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{|A_2|}{A} = \frac{1}{5}$$

$|A_2| = -24$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_3| = 0$$

$x_3 = 0$

$|A_4| = -96 \Rightarrow x_4 = \frac{4}{5}$

حل بدون طريقة

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

الأصورية:

$|A| = 18$

$|A_1| = 35$

$|A_2| = 25$

$|A_3| = -13$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z