

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

اسئلة دورات محلولة

بنى جبريتا

A 2 Z 1 LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

المادة: البنى الجبرية (1)

اسم الطالب:

الدرجة العظمى:

امتحان الفصل الثاني

السنة الثانية رياضيات

المدة : ساعتان

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً:

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Q^* بالشكل التالي:

$$xRy \Leftrightarrow x + \frac{1}{3x} = y + \frac{1}{3y} ; \forall x, y \in Q^*$$

- 1- ماهي كلا من المجموعتين Q و Q^* ثم عبر عن كلا منهما بشكل رياضي.
- 2- برهن أن R علاقة تكافؤ على Q^* ، ثم أوجد صف تكافؤ العنصر $x \in Q^*$ ثم العنصر 6.

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولاً:

إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما و H مجموعة ما غير خالية من G عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ هو:

$$x * y^{-1} \in H ; \forall x, y \in H$$

ثانياً:

أثبت أن $(Z, *)$ زمرة تبديلية ، حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة و $(*)$ عملية جبرية معرفة على Z بالشكل التالي: $x * y = x + y - 5 ; \forall x, y \in Z$ و $(+)$ هي عملية الجمع العادية المعرفة في Z .

*****انتهت الأسئلة*****

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

أ.م. د. عائده صائمه

طرطوس في 2025/8/19م

اسم المصحح: مادة الهندسة الجبرية (الطلاب ص 1)
 لادقان الفصل الثاني للعام الدراسي 1443 - 1444

س 1: (40 درجة)

الطلب الأول: (5) - المجموعة $\mathbb{Q}^*$: هي مجموعة الأعداد العارضية (الأسرية) غير الصفرية
 ويعبر عنها رياضياً بالشكل التالي: $\mathbb{Q}^* = \{ \frac{a}{b} ; a, b \in \mathbb{Z}^* \}$

ك - المجموعة $\mathbb{Q}$: هي مجموعة الأعداد العارضية (الأسرية) والصفرية، رياضياً بالشكل
 $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^* \}$

الطلب الثاني: (5) إثبات أن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{Q}^*$
 R علاقة التكافؤ لأنه:

$$\forall x \in \mathbb{Q}^* ; x R x \Leftrightarrow x + \frac{1}{3x} = x + \frac{1}{3x}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}^* ; x R y \Leftrightarrow x + \frac{1}{3x} = y + \frac{1}{3y} \Leftrightarrow y + \frac{1}{3y} = y + \frac{1}{3y} \Leftrightarrow y R y$$

R علاقة متعديّة لأنه:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}^* ; (x R y \wedge y R z) \Leftrightarrow (x + \frac{1}{3x} = y + \frac{1}{3y} \wedge y + \frac{1}{3y} = z + \frac{1}{3z})$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{3x} = z + \frac{1}{3z}) \Leftrightarrow x R z$$

R علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدية وبالتالي فهي علاقة تكافؤ على $\mathbb{Q}^*$

$$\bar{x} = \{ y \in \mathbb{Q}^* ; x R y \} = \{ y \in \mathbb{Q}^* ; x + \frac{1}{3x} = y + \frac{1}{3y} \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{Q}^* ; x - y = \frac{1}{3y} - \frac{1}{3x} \} = \{ y \in \mathbb{Q}^* ; x - y = \frac{x - y}{3xy} \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{Q}^* ; (x - y)(3xy - 1) = 0 \} = \{ y \in \mathbb{Q}^* ; y = x \text{ or } y = \frac{1}{3x} \}$$

$$\bar{x} = \{ x, \frac{1}{3x} \}$$

نلاحظ بوضوح $x = 6$ في صف تكافؤ x هي 6 :

$$\bar{6} = \{ 6, \frac{1}{3 \times 6} \} = \{ 6, \frac{1}{18} \}$$

س 2: (50 درجة)

أولاً: لنرمز الشرط: الفرض: $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

الطلب: تحقق الشرط: $\forall x, y \in H ; x * y^{-1} \in H$

البرهان: $\forall x, y \in H$ نثبت أن $x * y^{-1} \in H$ وبالتالي فإن $x * y^{-1} \in H$

2

كفاية الشرط: الغرض: تحقق الشرط: $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y^{-1} \in H$:
 المطلوب: $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

البرهان

أولاً: احب الشرط $\forall x \in H \subseteq G \Rightarrow x * x^{-1} = e \in H$
 بغرض العنصر المحايد في الزمرة $(G, *)$
 وبالتالي: $e \in H$: إذا احب الشرط عليك: $x^{-1} = e * x^{-1} \in H$:
 أي أنه: $\forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

ثانياً: احب القسم الأول (أولاً) ما لهذا البرهان
 $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y^{-1} \in H$
 احب الشرط: $\Rightarrow x * (y^{-1})^{-1} = x * y \in H$
 ما أولنا وثانيًا) يجب أن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

ثالثاً: إثبات أن $(Z, *)$ زمرة تبديلية

أب: واضح أن $Z \neq \emptyset$

4: $*$ مغلقة على عناصر Z لأنه: $\forall x, y \in Z: x * y = x + y - 5 \in Z$
 $*$ تبديلية على عناصر Z لأنه:

$$\forall x, y, z \in Z: (x * y) * z = (x + y - 5) * z = (x + y - 5) + z - 5 = x + (y + z - 5) - 5 = x * (y * z)$$

4: العملية $*$ تبديلية على عناصر Z لأنه:
 $\forall x, y \in Z: x * y = x + y - 5 = y + x - 5 = y * x$

5: وجود العنصر المحايد: إن العنصر $e = 5 \in Z$ هو العنصر المحايد في Z بالنسبة
 للعملية $*$ لأن $e = 5 \in Z$ ومن جهة أخرى فإن:

$$\forall x \in Z: x * e = x * 5 = x + 5 - 5 = x \wedge e * x = 5 * x = 5 + x - 5 = x$$

6: وجود العنصر النظير: ما أول كل عنصر x من Z فإن العنصر $x' = 10 - x$ هو نظير

$$x * x' = x * (10 - x) = x + 10 - x - 5 = 5$$

$$x' * x = (10 - x) * x = 10 - x + x - 5 = 5$$

مثلاً: (1) و (2) و (3) و (4) و (5) و (6) نجد أن $(Z, *)$ زمرة تبديلية.
 ملاحظة: جميع العناصر والأشكال الواردة في سلم التصحيح لها أسلوب طريقة
 واضحة للحد وجميعها تأخذ نفس العلامة الخاصة لاسم التصحيح
 لموسى في 11/11/2020
 مدرسة الفخر: أ. م. د. عاتكة علي صباه

المادة: البنى الجبرية (1)

اسم الطالب:

الدرجة العظمى: 90 درجة

امتحان الفصل الأول

السنة الثانية - رياضيات

المدة : ساعتان

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (30 درجة)

1- لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $N \times N$ بالشكل التالي:
 $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c \quad \forall (a,b),(c,d) \in N \times N$
برهن أن R علاقة تكافؤ و عين صف تكافؤ العنصر (7,8).

السؤال الثاني: (30 درجة)

لتكن $(Q - \{0\}, \cdot)$ زمرة الأعداد الكسرية بالنسبة لعملية الضرب العادية، أثبت أن مجموعة العناصر $H = \left\{ \frac{1+2n}{1+2m} \in Q - \{0\} ; n, m \in Z \right\}$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(Q - \{0\}, \cdot)$.

السؤال الثالث: (30 درجة)

أثبت أن $(Z, *)$ زمرة تبديلية، حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة و $(*)$ عملية جبرية معرفة على Z بالشكل التالي: $a * b = a + b - 1 ; \forall a, b \in Z$ و $(+)$ هي عملية الجمع العادية المعرفة في Z .

*****انتهت الأسئلة*****

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2025/2/17

بسم الله الرحمن الرحيم
 في كتاب الفصل الأول - العام الدراسي 1440 هـ - 1441 هـ

ص. (30 درجة)

أولاً: إثبات أن R علاقة تكافؤ على المجموعة $N \times N$

1- علاقة انعكاسية لأنه

$$\forall (a, b) \in N \times N : a + b = b + a \Leftrightarrow (a, b) R (a, b)$$

2- علاقة متبادلة لأنه

$$(a, b), (c, d) \in N \times N ; (a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow (c, d) R (a, b)$$

$$b + c = a + d \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c, d) R (a, b)$$

3- علاقة متعدية لأنه

$$\forall (a, b), (c, d), (e, t) \in N \times N ; (a, b) R (c, d) \text{ and } (c, d) R (e, t) \Leftrightarrow$$

$$(a, b) R (e, t) \Leftrightarrow (a + t = b + e) \Leftrightarrow (a + d + c + t = b + c + d + e) \Leftrightarrow (a + t = b + e)$$

$$(a + d + c + t = b + c + d + e) \Leftrightarrow (a + t = b + e) \Leftrightarrow (a, b) R (e, t)$$

من 1 و 2 و 3 يتبع أن R علاقة تكافؤ على المجموعة $N \times N$

ثانياً: إيجاد صف تكافؤ العنصر $(7, 8)$

$$\{ (a, b) \in N \times N ; (7, 8) R (a, b) \}$$

$$\{ (a, b) \in N \times N ; 7 + b = 8 + a \}$$

$$\{ (a, b) \in N \times N ; b = a + 1 \}$$

$$\{ (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), \dots \}$$

ص. (30 درجة)

إثبات أن H مجموعة جزئية من G

أولاً: إثبات أن H مجموعة

ثانياً: إثبات أن H مجموعة جزئية من G

ثالثاً: إثبات أن H مجموعة جزئية من G

رابعاً: إثبات أن H مجموعة جزئية من G

خامساً: إثبات أن H مجموعة جزئية من G

سادساً: إثبات أن H مجموعة جزئية من G

[2]

$$x \in H, x = \frac{1+2n}{1+2m} \text{ و } y = \frac{1+2n'}{1+2m'}$$

$$= \frac{1+2n}{1+2m} \cdot \frac{1+2n'}{1+2m'} = \frac{1+2(nm' + 2nn')}{1+2(m+m'+2mm')} = \frac{1+2n''}{1+2m''} \in H$$

$$n'' = nm' + 2nn' \in \mathbb{Z}$$

$$m'' = m + m' + 2mm' \in \mathbb{Z}$$

$$x \in H, x = \frac{1+2n}{1+2m}, x^{-1} = \frac{1+2m}{1+2n} \in H, n, m \in \mathbb{Z}$$

(Q - {0}, +) دالة ϕ من H إلى $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ (10)

بإثبات أن $(\mathbb{Z}, *)$ دالة ϕ من H إلى $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$

(1) $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ (5)

(2) $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+1 \in \mathbb{Z}$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z}, a * b = a + b - 1 \in \mathbb{Z}$ (5)

$a, b, c \in \mathbb{Z} : (a * b) * c = (a + b - 1) * c = (a + b - 1) + c - 1 = a + b + c - 2$
 $a * (b * c) = a * (b + c - 1) = a + b + c - 1 - 1 = a + b + c - 2$

$a, b, c \in \mathbb{Z} : a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z} : a * 1 = a + 1 - 1 = a$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z} : a * 1 = a + 1 - 1 = a$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z} : a * (2 - a) = a + 2 - a - 1 = 1$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z} : (2 - a) * a = 2 - a + a - 1 = 1$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z} : (2 - a) * a = 2 - a + a - 1 = 1$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z} : (2 - a) * a = 2 - a + a - 1 = 1$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z} : (2 - a) * a = 2 - a + a - 1 = 1$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z} : (2 - a) * a = 2 - a + a - 1 = 1$ (5)

$a, b \in \mathbb{Z} : (2 - a) * a = 2 - a + a - 1 = 1$ (5)

السؤال الأول: (50 درجة)

أولاً: وضح المفاهيم التالية:

الزمرة المنتهية ، رتبة الزمرة ، رتبة العنصر في زمرة ما ، العلاقة العكسية ، الزمرة الجزئية.

ثانياً: ليكن التبديل التالي: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، والمطلوب:

1- اذكر اسم الزمرة التي ينتمي إليها α ورتبتها 2- اكتب α على شكل جداء أحوار طولها 2 وبين نوع هذا التبديل 3- اوجد α^{-1} ودرجته.

ثالثاً: إذا كانت $A = \{1, 2, 3, \dots, 16\}$ وكانت R علاقة معرفة على المجموعة A بالشكل التالي: $xRy \Leftrightarrow$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة y على 4 بحيث أن $(x, y \in A)$ والمطلوب:

- 1- أثبت أن R علاقة تكافؤ على A .
- 2- أوجد صفوف تكافؤ العلاقة R .

السؤال الثاني: (40 درجة)

أولاً: لتكن $(G, *)$ زمرة تبديلية ما، ولتكن $(H, *)$ زمرة جزئية منها، ولتكن:

$$S(H) = \{x \in G; x * x \in H\}$$

برهن أن $(S(H), *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$.

ثانياً: لتكن المجموعة: $G_7 = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ والمطلوب أثبت أن $(G_7, +)$ تشكل زمرة تبديلية حيث العملية $+$ هي عملية الجمع العادي.

انتهت الأسئلة

مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صانمة



طرطوس في 204/7/24

اسم التصحيح طاعة العين الجبرية ١١ الطول ١٢
لديقات الفصل الثاني للعام الدراسي ١٤٤٢ - ١٤٤٣

المحاضرات الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤

(20 - 50) per

أولاً: الزمرة المتناهية. لكن $(G, *)$ زمرة ما. تدعى الزمرة $(G, *)$ زمرة

4) متبوعه اذونات اذونات ج فوه عدد منه في اقسام مختلف بعضه

نفرنا بأننا عدد عناصر المجموعة G هو زوجي. لنفرض $(G, *)$ مجموعة ما. نريد إثبات أن عدد عناصر المجموعة G هو زوجي. لنفرض $(G, *)$ مجموعة ما. نريد إثبات أن عدد عناصر المجموعة G هو زوجي. لنفرض $(G, *)$ مجموعة ما. نريد إثبات أن عدد عناصر المجموعة G هو زوجي.

G : گروه متناهی و n : عناصر G $|G| = n$ عنصر a $a^n = 1$

[2]

2) $d^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

نلاحظ أنه $\forall x \in A$ فإن باقي قسمة x على 4 هو أحد الأعداد

التالية: 0, 1, 2, 3

1- R علاقة تكافؤ على المجموعة A :

9. R انطوائية: لأنه $\forall x \in A$ فإن باقي قسمة x على 4 يساوي

3) باقي قسمة x على 4، وبالتالي $x R x$.

R تناظرية لأنه:

بأن قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة y على 4 $\Leftrightarrow x R y$ و $x, y \in A$

$\Leftrightarrow y R x$ $\Rightarrow R$ متبادلة: لأنه

$\Leftrightarrow (x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z$ $\Leftrightarrow$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة z على 4

$\Leftrightarrow x R z$ $\Rightarrow R$ انطوائية و تناظرية و متبادلة و بالتالي فهي علاقة تكافؤ على A .

2- إيجاد صفوف التكافؤ R :

$[1] = \bar{1} = \{x; x \in A \wedge x R 1\} = \{x; \text{باقي قسمة } x \text{ على } 4 = 1\}$
 $= \{1, 5, 9, 13\}$

$[2] = \bar{2} = \{x; x \in A \wedge x R 2\} = \{x; \text{باقي قسمة } x \text{ على } 4 = 2\}$
 $= \{2, 6, 10, 14\}$

$[3] = \bar{3} = \{x; x \in A \wedge x R 3\} = \{x; \text{باقي قسمة } x \text{ على } 4 = 3\}$
 $= \{3, 7, 11, 15\}$

$[4] = \bar{4} = \{x; x \in A \wedge x R 4\} = \{x; \text{باقي قسمة } x \text{ على } 4 = 0\}$
 $= \{4, 8, 12, 16\}$

مجموع (40 درجة)

أولاً: إذا كانت $(S(H), *)$ زمرة فرعية من $(G, *)$

ثانياً: $S(H) \in G$ حيث $S(H)$ هو مركز G ، إذاً $(G, *)$ زمرة
 أم بالتالي هو في مركز G ، ولكن e بالتالي e هو العنصر المحايد
 في $(H, *)$ لأن $(H, *)$ زمرة فرعية من $(G, *)$ و e هو العنصر المحايد

أب) خلية
 $\forall x, y \in S(H) \Rightarrow x, y \in G; x * x \in H \wedge y * y \in H (S(H))$
 وليكن $x * y \in S(H)$

لذلك $(H, *)$ زمرة
 $(x * y) * (x * y) = x * (y * x) * y = x * (x * y) * y$
 $= (x * x) * (y * y) \in H$

وبالتالي $x * y \in S(H)$
 $\forall x \in S(H)$ وليكن $x \in G$ وليكن $x^{-1} \in S(H)$

أب) خلية
 $x \in S(H) \Rightarrow x * x \in H; x \in G (S(H))$
 $\Rightarrow (x * x)^{-1} \in H$ وليكن $(x * x)^{-1} = x^{-1} * x^{-1}$

لذلك $x^{-1} \in S(H)$
 وليكن $x \in S(H); x^{-1} \in G$

أب) خلية
 $(S(H), *)$ زمرة خلية

ثانياً، إثبات أن $(G, +)$ زمرة خلية

أ: الخواص أن $G \neq \emptyset$

ب: الخواص + مغلقة على عناصر G وليكن

أب) خلية
 $\forall a_1 + b_1\sqrt{7}, a_2 + b_2\sqrt{7} \in G; a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$
 $(a_1 + b_1\sqrt{7}) + (a_2 + b_2\sqrt{7}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{7} \in G$

أب) خلية
 الخواص + الجمعية على عناصر G وليكن

أب) خلية
 $\forall a_1 + b_1\sqrt{7}, a_2 + b_2\sqrt{7}, a_3 + b_3\sqrt{7} \in G; a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$
 $((a_1 + b_1\sqrt{7}) + (a_2 + b_2\sqrt{7})) + (a_3 + b_3\sqrt{7}) = ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)\sqrt{7}$
 $= (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3))\sqrt{7}$
 $= (a_1 + b_1\sqrt{7}) + ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\sqrt{7})$
 $= (a_1 + b_1\sqrt{7}) + (0 + 0\sqrt{7}) \in G$

أب) خلية
 الخواص + الجمعية على عناصر G وليكن

أب) خلية
 $\forall a + b\sqrt{7} \in G \Rightarrow (a + b\sqrt{7}) + (0 + 0\sqrt{7}) = (a + 0) + (b + 0)\sqrt{7}$
 $= a + b\sqrt{7}$

6. دالة التمرير في G_7 : (1) : (2) :

أولاً نرى أن $a+b\sqrt{7} \in G_7$ إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ ، ونلاحظ أن $a+b\sqrt{7}$ في G_7 لأنه من صورة $a+b\sqrt{7}$:

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a, -b \in \mathbb{Z} \quad (\text{لأن } (z, +))$$

$$-a - b\sqrt{7} \in G_7$$

وبصورة أخرى فإن :

$$(a+b\sqrt{7}) + (-a-b\sqrt{7}) = (a+(-a)) + (b+(-b))\sqrt{7} = 0+0\sqrt{7}$$

$$(-a-b\sqrt{7}) + (a+b\sqrt{7}) = ((-a)+a) + ((-b)+b)\sqrt{7} = 0+0\sqrt{7}$$

أي أن $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, -1)$ هي عناصر $(G_7, +)$ ، و 0 هو العنصر المحايد.

ثانياً $a_1+b_1\sqrt{7}, a_2+b_2\sqrt{7} \in G_7$ ، $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ ،

$$(a_1+b_1\sqrt{7}) + (a_2+b_2\sqrt{7}) = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)\sqrt{7}$$

$$= (a_2+a_1) + (b_2+b_1)\sqrt{7} = (a_2+b_2\sqrt{7}) + (a_1+b_1\sqrt{7})$$

وبذلك نرى أن جميع العناصر في G_7 هي من الصورة $a+b\sqrt{7}$ ، حيث $a, b \in \mathbb{Z}$ ، وهذا هو المطلوب لإثبات أن G_7 هي مجموعة أبيلية تحت الجمع.

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a \in \mathbb{Z} \quad (\text{لأن } (z, +))$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن G_7 هي مجموعة أبيلية تحت الجمع.

السؤال الأول: (30 درجة)

الطلب الأول:

أولاً: عرف العلاقة القطرية وأعط مثال عليها.
ثانياً: عرف تجزئة مجموعة ما غير خالية A وأعط مثال عليها.
ثالثاً: لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Z بالشكل التالي:
 $aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b; \forall a, b \in Z$ ، والمطلوب:
أثبت أن R علاقة تكافؤ على Z ، ثم أوجد صف تكافؤ العنصر $a \in Z$ ثم العنصر 7.

الطلب الثاني: لتكن $(G, *)$ زمرة ما ولنعرّف المجموعة H بالشكل التالي:

$H = \{a : a \in G \text{ and } a * x = x * a ; \forall x \in G\}$ والمطلوب أثبت أن: $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$.

السؤال الثاني: (30 درجة)

أولاً: عرف باختصار S_3 ، ثم أوجد جدول كايلي لهذه الزمرة واستنتج منه ما هو e ومقلوب كل عنصر من عناصرها.
ثانياً: عرف رتبة زمرة ما G ، ثم أوجد رتبة الزمرة S_3 ، ثم انكر ما هي درجة كل عنصر من عناصرها.
ثالثاً: عرف رتبة عنصر ما a من زمرة ما $(G, *)$ ، ثم أوجد رتبة كل عنصر من عناصر الزمرة S_3 .

السؤال الثالث: (30 درجة)

برهن ما يلي:

- 1- إن اجتماع أسرة من الزمر الجزئية في زمرة ما ليس من الضروري أن يكون زمرة جزئية من هذه الزمرة.
 - 2- إن الزمرة $(\mathbb{Z}_n, \otimes)$ ليست زمرة في الحالة العامة.
 - 3- مقلوب (نظير) أي عنصر a في زمرة جزئية ما $(H, *)$ من زمرة ما $(G, *)$ هو نفسه مقلوب (نظير) a في الزمرة $(G, *)$.
 - 4- يوجد للمعادلة $a * x = b$ حل وحيد في الزمرة $(G, *)$ من أجل كل a و b من G .
- *****

انتهت الأسئلة

مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صانمة

طرطوس في 2024/2/5م

اسم التصحيح لمادة البنى الجبرية (1) الطلاب مسير لدقائق الفصل الأول للعام الدراسي 2020-2021

أخاه الأول (30 رجب)

الطالب: الطالب الأول

أدته: إذا كانت

مجموعة A غير فارغة عندئذ تعرف العلاقة R على A بالخط التالي
 $A \times A \ni (a, a), (a, c) \in R$

فإن في هذه الحالة $A = \{5, 10, 25\}$ حيث $A = \{5, 10, 25\}$

فإن R علاقة تكافؤ على A

التي هي اتحاد المجموعات الجزئية $\{T_i\}_{i \in I}$ من A بحيث

1- $T_i \cap T_j = \emptyset$ أو $T_i = T_j$

2- $A = \bigcup_{i \in I} T_i$

وهذا ما يسمى T على A بالبنية T

فإن في هذه الحالة $A = \{5, 8, 11, 14, 20\}$ حيث $A = \{5, 8, 11, 14, 20\}$

البنية T هي A وهي:

1- $A \neq \emptyset$ لأن

2- $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ و $T_1 \cap T_3 = \emptyset$ و $T_2 \cap T_3 = \emptyset$

3- $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{5, 11\} \cup \{8\} \cup \{14, 20\} = \{5, 8, 11, 14, 20\} = A$

4- $T_i \neq \emptyset$ و $i = 1, 2, 3$

نلاحظ أن R على A هي علاقة تكافؤ

أدته: R هي علاقة تكافؤ

نلاحظ أن R هي علاقة تكافؤ

نلاحظ أن R هي علاقة تكافؤ

نلاحظ أن R هي علاقة تكافؤ

نلاحظ أن R هي علاقة تكافؤ

نلاحظ أن R هي علاقة تكافؤ

نلاحظ أن R هي علاقة تكافؤ

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow aRa \Leftrightarrow a^2 - a^2 = a - a$$

$$a, b \in \mathbb{Z}; aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b$$

$$\Leftrightarrow b^2 - a^2 = b - a \Leftrightarrow bRa$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}; (aRb \wedge bRc) \Leftrightarrow (a^2 - b^2 = a - b) \wedge (b^2 - c^2 = b - c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + b^2 - c^2 = a - b + b - c \Leftrightarrow a^2 - c^2 = a - c \Leftrightarrow aRc$$

نلاحظ أن R هي علاقة تكافؤ

لنفرض $a \in \mathbb{Z}$. $\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} ; a \equiv b\} = \{b \in \mathbb{Z} ; a - b = a - b\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} ; (a - b)(a + b) = a - b\} = \{b \in \mathbb{Z} ; a + b = 1\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} ; b = 1 - a\} = \{a, 1 - a\}$

$\bar{7} = \{7, 1 - 7\} = \{7, -6\}$

طلب الثاني: برهان ان $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$

أولاً: من تعريف H لاخط H هو مجموعة جزئية من G اي $H \subseteq G$
كذلك برهان ان e العنصر المحايد في الزمرة G ينتمي الى H اي $e \in H$

$\forall x \in G, x * e = e * x = x$

$H \neq \emptyset$ اي $e \in H$

$H \subseteq G$

ثانياً: من تعريف H ان $a \in H$ لبرهان ان $a^{-1} \in H$

$\forall x \in G, x * a = a * x \wedge x * b = b * x$ اي $a, b \in H$

$(a * b) * x = a * (b * x) = a * (x * b) = (a * x) * b$

$= (x * a) * b = x * (a * b) \Rightarrow a * b \in H$

$a^{-1} \in H$ اي $a \in H$ لبرهان ان $a^{-1} \in H$

$a * x = x * a ; \forall x \in G \subseteq H$ اي $a \in H$

$a^{-1} * x = a^{-1} * x * e = a^{-1} * x * a * a^{-1} = a^{-1} * a * x * a^{-1} = x * a^{-1} \Rightarrow a^{-1} \in H$

البرهان الثاني: $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

أولاً: S_3 هي زمرة التماثل على المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ اي S_3 هي مجموعة كل التباديل على A

$d \in S_3$ اي $d \in A$

$\chi(i) = j, \forall i \in A, j = 1, 2, 3$

$\chi = (1 \ 2 \ 3 \over d(1) \ d(2) \ d(3))$

$\chi_1 = (1 \ 2 \ 3 \over 1 \ 2 \ 3) \chi_2 = (1 \ 2 \ 3 \over 1 \ 3 \ 2) \chi_3 = (1 \ 2 \ 3 \over 3 \ 2 \ 1) \chi_4 = (1 \ 2 \ 3 \over 2 \ 3 \ 1) \chi_5 = (1 \ 2 \ 3 \over 3 \ 1 \ 2) \chi_6 = (1 \ 2 \ 3 \over 2 \ 1 \ 3)$

$\chi_1 = (1 \ 2 \ 3 \over 1 \ 2 \ 3)$	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
$\chi_2 = (1 \ 2 \ 3 \over 1 \ 3 \ 2)$	χ_2	χ_1	χ_5	χ_6	χ_3	χ_{21}
$\chi_3 = (1 \ 2 \ 3 \over 3 \ 2 \ 1)$	χ_3	χ_6	χ_1	χ_5	χ_4	χ_2
$\chi_4 = (1 \ 2 \ 3 \over 2 \ 3 \ 1)$	χ_4	χ_5	χ_6	χ_1	χ_2	χ_3
$\chi_5 = (1 \ 2 \ 3 \over 2 \ 3 \ 1)$	χ_5	χ_4	χ_2	χ_3	χ_6	χ_1
$\chi_6 = (1 \ 2 \ 3 \over 3 \ 1 \ 2)$	χ_6	χ_3	χ_4	χ_2	χ_1	χ_5

اع آية في الزاوية الحرة واليسار الحرة يكون زرة حرة

زرة

هنا $n=4$ فبات $(\bar{2}_4^*, \otimes)$ والي جدول كالمين لاله

$(\otimes)$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

ليست زرة لأن العنصر $\bar{2} \in \bar{2}_4$ ليس له معكول بالنسبة

للعملية $(\otimes)$ وبالتالي لا يوجد لكل عنصر من $\bar{2}_4^*$ معكول بالنسبة

للعملية $(\otimes)$ كذلك $\bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{1} = \bar{0} \neq \bar{2}$ أي $\bar{2} \otimes \bar{2} \neq \bar{2}$ ليست معكولة عند نظام
 خصيصا عن نظام $\bar{2}_4^*$ ويوجد معكول بالنسبة لـ $(\otimes)$ $\bar{2}_4$ هو $\bar{2}$ $\bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{1}$
 أي $n=5$ فبات النهائية $(\bar{2}_5^*, \otimes)$ والي جدول كالمين لاله

$(\otimes)$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

فبات $\bar{2}_5^*$ زرة لأن $(\otimes)$ معكولة وكل عنصر على نظام $\bar{2}_5^*$

ويوجد عنصر هاتين $\bar{2}_5^*$ بالنسبة لـ $(\otimes)$ $\bar{2}_5^*$ هو $\bar{2}$ $\bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{1}$ ويوجد

لكل عنصر من $\bar{2}_5^*$ معكول كما هو موضح في الجدول التالي:

$(\otimes)$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

إدرا $(\bar{2}_n^*, \otimes)$ ليست زرة في الحالة العامة

الفرضيات $\otimes$ العنصر الحياتي في الزرة $(G, *)$

بفرضيات α' هو معكول α (نظير) العنصر α في H

$\alpha \otimes \alpha' = \alpha' \otimes \alpha = e$ $\alpha \otimes \alpha'' = \alpha'' \otimes \alpha = e$

عندئذ $\alpha \otimes \alpha' = \alpha' \otimes \alpha = e$ وبالتالي $\alpha \otimes \alpha'' = \alpha'' \otimes \alpha = e$

$$\alpha \otimes \alpha' = \alpha \otimes \alpha'' \Rightarrow \alpha' = \alpha''$$

$$\alpha \otimes x = b \Rightarrow \alpha^{-1} \otimes \alpha \otimes x = \alpha^{-1} \otimes b \Rightarrow x = \alpha^{-1} \otimes b \in G$$

لدينا $\alpha \otimes x = b$ $\alpha \otimes x' = b$ $\alpha \otimes x'' = b$ $\alpha \otimes x = b$ $\alpha \otimes x' = b$ $\alpha \otimes x'' = b$

$$\alpha \otimes x' = \alpha \otimes x'' \Rightarrow x' = x''$$

النتيجة: مجموعة G تحت العملية الثنائية $\otimes$ هي مجموعة لي
 بالخاصية الأولى والمجموعة تأخذ نفس العلامة المتخصصة لأي α في G

مجموعة لي G G G

مجموعة لي الأصل صالحة
 مجموعة لي صالحة

المادة: البنى الجبرية (1)

اسم الطالب:

الدرجة العظمى: 90 درجة

امتحان الفصل الثاني

السنة الثانية- رياضيات

المدة : ساعتان

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (30 درجة)

1- لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $N \times N$ بالشكل التالي:
 $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \quad \forall (a, b), (c, d) \in N \times N$
برهن أن R علاقة تكافؤ و
عين صف تكافؤ العنصر (7,8).

السؤال الثاني: (30 درجة)

لتكن $(Q - \{0\}, \cdot)$ زمرة الأعداد الكسرية بالنسبة لعملية الضرب العادية، أثبت أن مجموعة
العناصر $H = \left\{ \frac{1+2n}{1+2m} : n, m \in \mathbb{Z} \right\} \cap (Q - \{0\})$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة
 $(Q - \{0\}, \cdot)$.

السؤال الثالث: (30 درجة)

أثبت أن $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبديلية، حيث $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة و $(*)$ عملية جبرية معرفة
على $\mathbb{Z}$ بالشكل التالي: $a * b = a + b - 1 \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$ و $(+)$ هي عملية الجمع العادية
المعرفة في $\mathbb{Z}$.

***** انتهى الأسئلة *****

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمه

طرطوس في 2023/8/2م

م. د. محمد عبد الحليم
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠٢٠ - ٢٠٢١

١: (3 د. ١٠)

الـ ١- (R) علاقة انعكاسية:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b = b + a \Leftrightarrow (a, b) R (a, b)$$

٢- (R) علاقة تناظرية لأن:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d \Leftrightarrow b + c = a + d \Leftrightarrow (c, d) R (a, b)$$

٣- (R) علاقة متعدية لأن:

$$\forall (a, b), (c, d), (e, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a, b) R (c, d) \wedge (c, d) R (e, t) \Leftrightarrow a + d = b + c \wedge c + t = d + e \Leftrightarrow a + d + c + t = b + c + d + e \Leftrightarrow a + t = b + e \Leftrightarrow (a, b) R (e, t)$$

٣- (11), (12), (13) هي علاقات تكافؤ على المجموعة $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
أي أنها تحقق خواص (7, 8)

$$\begin{aligned} (7, 8) &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (7, 8) R (a, b)\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 7 + b = 8 + a\} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b = a + 1\} \\ &= \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), \dots\} \end{aligned}$$

٢: (3 د. ١٠)

١- إذا $H \subseteq \mathbb{Q} - \{0\}$ و H مغلقة تحت الجمع، و $1 \in H$ ، فإن $H = \mathbb{Q}$
بالملاحظة القياسية $\mathbb{Q} - \{0\}$ لأن:

$$H \neq \emptyset \text{ لأن } 1 \in H, n = m = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1+2 \cdot 0}{1+2 \cdot 0}$$

$$\phi \neq H \subseteq \mathbb{Q} - \{0\} \text{ لأن } 1 \in H$$

$$\forall x, y \in H : x = \frac{1+2n}{1+2m} \neq y = \frac{1+2n'}{1+2m'}$$

$$x \cdot y = \frac{1+2n}{1+2m} \cdot \frac{1+2n'}{1+2m'} = \frac{1+2(n+n'+2nn')}{1+2(m+m'+2mm')} = \frac{1+2n''}{1+2m''} \in H$$

$$n'' = n + n' + 2nn' \in \mathbb{Z}$$

$$m'' = m + m' + 2mm' \in \mathbb{Z}$$

(15)

[2]

$$\forall x \in H; x = \frac{1+2n}{1+2m} \Rightarrow x^{-1} = \frac{1+2m}{1+2n} \in H; n, m \in \mathbb{Z}$$

(7) $(H, \cdot)$ زمرة فرعية من الزمرة $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

الطلب: نتحقق أن $(\mathbb{Z}, *)$ تحقق شروط الزمرة، حيث $\mathbb{Z} \neq \emptyset$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a * b = a + b - 1 \in \mathbb{Z}$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a * b) * c = (a + b - 1) * c = (a + b - 1) + c - 1$$

$$= a + (b + c - 1) - 1 = a * (b + c - 1)$$

$$= a * (b * c)$$

ن: العملية $(+)$ شبه بديهية على $\mathbb{Z}$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a$$

كذلك نثبت أن $1 \in \mathbb{Z}$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Z}, *)$

$$a * 1 = a + 1 - 1 = a = 1 + a - 1 = 1 * a$$

لذلك $a' = 2 - a$ هو العنصر المعكوف للنظرية $\forall a \in \mathbb{Z}$

$$a * a' = a * (2 - a) = a + 2 - a - 1 = 1$$

$$a' * a = (2 - a) * a = 2 - a + a - 1 = 1$$

(9) (1) و (2) و (3) و (4) و (5) و (6) و (7) و (8) و (9) و (10) و (11) و (12) و (13) و (14) و (15) و (16) و (17) و (18) و (19) و (20) و (21) و (22) و (23) و (24) و (25) و (26) و (27) و (28) و (29) و (30) و (31) و (32) و (33) و (34) و (35) و (36) و (37) و (38) و (39) و (40) و (41) و (42) و (43) و (44) و (45) و (46) و (47) و (48) و (49) و (50) و (51) و (52) و (53) و (54) و (55) و (56) و (57) و (58) و (59) و (60) و (61) و (62) و (63) و (64) و (65) و (66) و (67) و (68) و (69) و (70) و (71) و (72) و (73) و (74) و (75) و (76) و (77) و (78) و (79) و (80) و (81) و (82) و (83) و (84) و (85) و (86) و (87) و (88) و (89) و (90) و (91) و (92) و (93) و (94) و (95) و (96) و (97) و (98) و (99) و (100)

ملاحظة: جميع التمارين السابقة لها أثر تربوي، بالتحديد في تنمية التفكير المنطقي والقدرة على التحليل والتبسيط.

ملاحظة أخرى: د. عائشة حاتم

طالبة في 1/1/2020

السؤال الأول: (30 درجة)

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Q^* بالشكل التالي:

$$aRb \Leftrightarrow a + \frac{1}{2a} = b + \frac{1}{2b}; \quad \forall a, b \in Q^*$$

1- ما هي المجموعة Q^* واكتب هذه المجموعة بشكل رياضي؟

2- أثبت أن R علاقة تكافؤ على Q^* ، ثم أوجد صف تكافؤ العنصر $a \in Q^*$ ثم العنصر 5.

السؤال الثاني: (30 درجة)

برهن صحة القضايا التالية:

1- العنصر الأصغري والعنصر الأعظمي في مجموعة الأجزاء $P(\Omega)$ لمجموعة ما غير خالية Ω

بالنسبة لعلاقة الترتيب $\subseteq$ المعرفة على $P(\Omega)$ ، هما وعلى الترتيب العنصران: ϕ و Ω .

2- العنصر المحايد في زمرة ما هو نفسه العنصر المحايد في أي زمرة جزئية منها.

3- يوجد للمعادلة $x * a = b$ حل وحيد في الزمرة $(G, *)$ من أجل كل a و b من G .

4- لتكن $(G, *)$ زمرة ما و $a_1, a_2, a_3, a_4 \in G$ عندئذ فإن:

$$(a_1 * a_2 * a_3 * a_4)^{-1} = a_4^{-1} * a_3^{-1} * a_2^{-1} * a_1^{-1}$$

السؤال الثالث: (30 درجة)

أولاً: عرف رتبة العنصر في زمرة ما، ثم أوجد رتبة كل من العنصرين 4، 7 في الزمرة $(\mathbb{Z}_7, \oplus)$ ثم أثبت أن هذه الزمرة دورية.

ثانياً: لتكن $(G_1, *)$ و $(G_2, \perp)$ زمرتين ما و e_1, e_2 العنصرين المحايدتين وعلى التوالي في هاتين الزمرتين، ولنعرف على مجموعة الجداء الديكارتي:

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \in G_1 \text{ و } g_2 \in G_2\}$$

$$(g_1, g_2) \Delta (g'_1, g'_2) = (g_1 * g'_1, g_2 \perp g'_2) ; \quad \forall (g_1, g_2), (g'_1, g'_2) \in G_1 \times G_2$$

والمطلوب:

1. برهن أن: $(G_1 \times G_2, \Delta)$ زمرة

2. عرف رتبة الزمرة ثم أوجد عدد عناصر الزمرة $(G_1 \times G_2, \Delta)$ ، إذا كان $|G_1| = n_1$ و $|G_2| = n_2$

3. برهن أن: $(G_1 \times \{e_2\}, \Delta)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G_1 \times G_2, \Delta)$.

*****انتهت الأسئلة*****

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة



طرطوس في 2023/1/30م

علم الأحياء - السبيل الجزيئي للطلاب مع ر
لحقان الفصل الأول - للعام الدراسي 2022 - 2023

مجم: (30 درجة)

المطلوب الأول: المجموعة العددية (الأسرية) غير المقيدة
ويعبر عنها رياضياً بالمثل التالي: $Q^* = \{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}^* \}$
المطلوب الثاني: أثبت أن R علاقة تكافؤ على Q^* .

(1) $\forall a \in Q^* : aRa \Leftrightarrow a + \frac{1}{2a} = a + \frac{1}{2a}$ R علاقة انعكاسية لذاته.

(2) $\forall a, b \in Q^* : aRb \Leftrightarrow a + \frac{1}{2a} = b + \frac{1}{2b} \Leftrightarrow b + \frac{1}{2b} = a + \frac{1}{2a}$ R تناظرية لذاته.

$\Leftrightarrow bRa$

(3) $\forall a, b, c \in Q^* : (aRb \wedge bRc) \Leftrightarrow (a + \frac{1}{2a} = b + \frac{1}{2b} \wedge b + \frac{1}{2b} = c + \frac{1}{2c})$ R استكاسية.

$\Leftrightarrow a + \frac{1}{2a} = c + \frac{1}{2c} \Leftrightarrow aRc$

تالياً: إيجاد كيف نظام الصف Q^* بالتالي من علاقة تكافؤ على Q^* .

$\bar{a} = \{ b \in Q^* : aRb \} = \{ b \in Q^* : a + \frac{1}{2a} = b + \frac{1}{2b} \}$
 $= \{ b \in Q^* : a - b = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a} \} = \{ b \in Q^* : a - b = \frac{a-b}{2ab} \}$
 $= \{ b \in Q^* : (a-b)(2ab-1) = 0 \} = \{ b \in Q^* : b = a \text{ or } b = \frac{1}{2a} \}$

$\bar{a} = \{ a, \frac{1}{2a} \}$

$\bar{5} = \{ 5, \frac{1}{10} \}$

مجم: (30 درجة)

المطلوب (1) الصف $\emptyset$ هو الصف الذي هو صف في $P(\Omega)$ بالنسبة لعلاقة الترتيب

$B \subseteq \emptyset \Rightarrow B = \emptyset \quad \forall B \in P(\Omega)$

أدركت فإن الصف Ω هو الصف الأعظم في $P(\Omega)$ بالنسبة لعلاقة الترتيب

$\Omega \subseteq B \Rightarrow B = \Omega \quad \forall B \in P(\Omega)$

المطلوب (2) لنفرض $(G, *)$ زمرة ما $(H, *)$ زمرة جزئية من G ونفرض $e \in H$

أدركت أن e هو العنصر المحايد في H حيث:

$e * e' = e' \quad \forall e' \in H \subseteq G$

$e' * e = e'$

$e * e' = e' * e \Rightarrow e = e'$

برهان (3) $\alpha * \alpha^{-1} = b * \alpha^{-1} \Rightarrow \alpha = b * \alpha^{-1}$

بالمسار α في G فلهذا $\alpha * \alpha^{-1} = b * \alpha^{-1} \Rightarrow \alpha = b * \alpha^{-1}$

نلاحظ مع طرف المساواة α طرفاً

بعض هذه المساواة $\alpha * \alpha^{-1} = b * \alpha^{-1}$ فنتيجة أن هذين الطرفين

$$\begin{aligned} x' * a = b & \\ x'' * a = b & \Rightarrow x' * a = x'' * a \Rightarrow x' = x'' \end{aligned}$$

رمان (4): بفرض e العنصر المحايد في الزمرة G فإن e هو صورة a لـ a^{-1} .

$$(a_1 * a_2 * a_3 * a_4) * (a_4^{-1} * a_3^{-1} * a_2^{-1} * a_1^{-1}) = a_1 * a_2 * a_3 * a_4 * a_4^{-1} * a_3^{-1} * a_2^{-1} * a_1^{-1}$$

$$= a_1 * a_2 * a_3 * a_3^{-1} * a_2^{-1} * a_1^{-1} = a_1 * a_2 * a_2^{-1} * a_1^{-1} = a_1 * a_1^{-1} = e$$

$$(a_4^{-1} * a_3^{-1} * a_2^{-1} * a_1^{-1}) * (a_1 * a_2 * a_3 * a_4) = a_4^{-1} * a_3^{-1} * a_2^{-1} * a_1^{-1} * a_1 * a_2 * a_3 * a_4$$

$$= a_4^{-1} * a_3^{-1} * a_2^{-1} * a_2 * a_3 * a_4 = a_4^{-1} * a_3^{-1} * a_3 * a_4 = a_4^{-1} * a_4 = e$$

وبالتالي نجد أن:

$$(a_1 * a_2 * a_3 * a_4)^{-1} = a_4^{-1} * a_3^{-1} * a_2^{-1} * a_1^{-1}$$

حساب: (30 و 31)

المسألة: نعرف رتبة عنصر a في زمرة G لتكون $O(a)$ زمرة a عظمى.
 بما أن G و e العنصر المحايد في الزمرة G . نعلم أن عدد صحيح موجب n تحقق $a^n = e$ رتبة العنصر a في الزمرة G ونرمز لها بـ $O(a)$ ونكتب $O(a) = n$ وفي حال لم يوجد مثل هذا العدد n قلنا أن رتبة العنصر a في الزمرة G غير منتهية وكنت $O(a) = \infty$
 مثال: $O(4) = 7$ و $O(7) = 1$ في الزمرة $(\mathbb{Z}_7, +)$ هي الزمرة الحرة في هذه الزمرة $O(4) = 7$ لأن $O(4) = 7$

$$7 \cdot 4 = 4 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28 = 0$$

$$1 \cdot 7 = 7 = 0$$

إثبات أن الزمرة $(\mathbb{Z}_7, +)$ دورية:

إن الزمرة $(\mathbb{Z}_7, +)$ دورية مولدة بالعنصر 1 أي $\mathbb{Z}_7 = \langle 1 \rangle$ لأن

$$1. \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}, 2. \bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2} \neq \bar{0}, 3. \bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{3} \neq \bar{0}$$

$$4. \bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{4} \neq \bar{0}, 5. \bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{5} \neq \bar{0}$$

$$6. \bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{6} \neq \bar{0}$$

$$7. \bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{7} = \bar{0} \Rightarrow O(\bar{1}) = 7 = O(\mathbb{Z}_7)$$

$$\Rightarrow \langle \bar{1} \rangle = \{1, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\} = \mathbb{Z}_7$$

نانياً: أثبت: برهان أن $(G_1 \times G_2, \Delta)$ زمرة

أولاً: $G_1 \times G_2 \neq \emptyset$ لأن $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$ لأن G_1 زمرة، G_2 زمرة

(4)

$$(g_1, e_2) \Delta (g_1^{-1}, e_2^{-1}) = (g_1 * g_1^{-1}, e_2 \perp e_2^{-1})$$

$$= (g_1 * g_1^{-1}, e_2) \in G_1 \times G_2 \text{ (نك كذا بمحاورة)}$$

صا (٩) و (ب) و (ج) و (د) (١٠) (١١) (١٢) (١٣) (١٤) (١٥) (١٦) (١٧) (١٨) (١٩) (٢٠) (٢١) (٢٢) (٢٣) (٢٤) (٢٥) (٢٦) (٢٧) (٢٨) (٢٩) (٣٠) (٣١) (٣٢) (٣٣) (٣٤) (٣٥) (٣٦) (٣٧) (٣٨) (٣٩) (٤٠) (٤١) (٤٢) (٤٣) (٤٤) (٤٥) (٤٦) (٤٧) (٤٨) (٤٩) (٥٠) (٥١) (٥٢) (٥٣) (٥٤) (٥٥) (٥٦) (٥٧) (٥٨) (٥٩) (٦٠) (٦١) (٦٢) (٦٣) (٦٤) (٦٥) (٦٦) (٦٧) (٦٨) (٦٩) (٧٠) (٧١) (٧٢) (٧٣) (٧٤) (٧٥) (٧٦) (٧٧) (٧٨) (٧٩) (٨٠) (٨١) (٨٢) (٨٣) (٨٤) (٨٥) (٨٦) (٨٧) (٨٨) (٨٩) (٩٠) (٩١) (٩٢) (٩٣) (٩٤) (٩٥) (٩٦) (٩٧) (٩٨) (٩٩) (١٠٠)

بداية ملحق، جميع التمارين واثباتها الواردة في اسم الدرس لا أكثر من طريقة رياضية حل وحجج تأخذ نفس القواعد المنهجية لاسم الدرس

لمؤس في 25 / 1 / 2023

مدرس المقرر : د. عائدة علي صبيحة

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح المفاهيم التالية:

$P(X)$ حيث X مجموعة ما غير خالية ، رتبة الزمرة ، رتبة العنصر في زمرة ما ، الزمرة الدورية ورتبتها ، الزمرة الجزئية.

ثانياً: برهن أن علاقة الاحتواء $\subseteq$ المعرفة على $P(X)$ حيث X مجموعة ما غير خالية هي علاقة ترتيب جزئي ، بينما العلاقة $\leq$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N هي علاقة ترتيب كلي .

السؤال الثاني: (25 درجة)

لتكن $(G,*)$ زمرة تبديلية ما، ولتكن $(H,*)$ زمرة جزئية منها، ولتكن:

$$S(H) = \{x \in G; x * x \in H\}$$

برهن أن $(S(H),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$.

السؤال الثالث: (25 درجة)

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ولتكن $G_n = \{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ والمطلوب أثبت أن $(G_n, +)$ تشكل زمرة تبديلية حيث العملية $+$ هي عملية الجمع العادي.

***** انتهى الأسئلة *****

مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2022/7/27م

الماتصحيح طاعة البني الجدية (11) الطلاب حسب ر
لد ثمان الفصل الثاني للعام الدراسي 2011 - 2012 م

اسم: (30 درجة)

أولاً: 1- $P(X)$ هي مجموعة ما يتخاليه X هي مجموعة أضرار المجموعة
غير الخالية X وله المجموعة المؤلفة من جميع المجموعات الجزئية من X أي:

$$P(X) = \{ A \mid A \subseteq X \}$$

2- رتبة الزمرة: لتكن $(G, *)$ زمرة ما. نرسم لرتبة الزمرة G بـ $O(G)$
ونفرض بأننا عدد عناصر الزمرة G المختلف بعضاً من بعضاً إذا كانت
زمرة منتهية وعدد عناصرها $|G| = n$ عندئذ نكتب: $|G| = n = O(G)$

3- رتبة العنصر في زمرة ما: إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما و a عنصرها
فنكتب $a^n = e$ رتبة العنصر a في الزمرة G ونكتب $O(a) = n$
وإذا لم يوجد العدد n الذي يحقق هذه الحالة فنكتب $O(a) = \infty$

4- الزمرة الدورية: إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما و a عنصرها
فنكتب $G = \langle a \rangle$ أي أن G هي المجموعة التي يولدها العنصر a في الزمرة G ونكتب
 $O(a) = O(G) = n$ عندئذ نكتب: $O(a) = O(G) = n$

5- الزمرة الجزئية: لتكن $(G, *)$ زمرة ما و H مجموعة
من G بحيث H زمرة جزئية من G ونكتب $(H, *)$ زمرة

6- إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما و H زمرة جزئية من G ونكتب $(H, *)$ زمرة

7- إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما و H زمرة جزئية من G ونكتب $(H, *)$ زمرة

[2]

كثافاً: أ. برهان أن علاقة الاصطوار $\subseteq$ المعرفة على $P(X)$ حيث X مجموعة ما غير خالية، هي علاقة ترتيب جزئي.

العلامة $\subseteq$ انعكاسية لأنه:

$$\forall A \in P(X) \Rightarrow A \subseteq A$$

ب. العلامة $\subseteq$ قياسية لأنه:

$$\forall A, B \in P(X) \quad A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

ج. العلامة $\subseteq$ متعديّة لأنه:

$$\forall A, B, C \in P(X) \quad A \subseteq B \text{ و } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

هذا (أ) و (ب) و (ج) يثبت أن $\subseteq$ يحدّث العلاقة $\subseteq$ هي علاقة ترتيب على $P(X)$.
ولمعرفة ترتيب جزئي لأنه إذا أخذنا $X = \{1, 2\}$ عنده

$$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$\text{فأذا طأنت } X = \{1, 2\} \text{ و } A = \{1\}, B = \{2\} \text{ عندهما } A \not\subseteq B \text{ و } B \not\subseteq A$$

إذاً ليست جميع عناصر $P(X)$ مرتبة وفق علاقة الترتيب $\subseteq$ وبالتالي فهي علاقة ترتيب جزئي.

ب. برهان أن العلاقة $\leq$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ هي علاقة ترتيب كلي.

العلامة $\leq$ انعكاسية لأنه:

$$\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq a$$

ث. العلامة $\leq$ قياسية لأنه:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \leq b \text{ و } b \leq a \Rightarrow a = b$$

ج. العلامة $\leq$ متعديّة لأنه:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad a \leq b \text{ و } b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

هذا (أ) و (ب) و (ج) يثبت أن العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب كلي على $\mathbb{N}$.
ولمعرفة ترتيب كلي لأنه: من أي عنصرين a, b من $\mathbb{N}$ فإنه إما $a \leq b$ أو $b \leq a$.

أي أي عنصرين من $\mathbb{N}$ مرتبان وفق علاقة الترتيب $\leq$.

سبغ: (30 درجہ)

برہان اُن $(S(H), *)$ زمرة جزئية ماله $(G, *)$

من تعريف $S(H)$ نلاحظ ان $S(H)$ زمرة جزئية من G اذ $S(H) \subseteq G$
 مجموعة اخرى بما ان $(G, *)$ زمرة، وبالتالي يوجد فيها عنصر هياوية، وليكن e

وما ان $(H, *)$ زمرة جزئية ماله $(G, *)$ وبالتالي $e \in H$

$$\Rightarrow e * e \in H \text{ (اذن } (H, *) \text{ زمرة)} \Rightarrow e \in S(H) \Rightarrow S(H) \neq \emptyset$$

اذ ان $\emptyset \neq S(H) \subseteq G$

بما ان $\forall x, y \in S(H)$ وليزود ان $x * y \in S(H)$

بما ان $x, y \in S(H)$

$$x * x \in H \text{ و } y * y \in H$$

$$\begin{aligned} (x * y) * (x * y) &= x * (y * x) * y = x * (x * y) * y = (x * x) * (y * y) \in H \\ &\Rightarrow H \Rightarrow H \end{aligned}$$

وبالتالي $x * y \in S(H)$

بما ان $\forall x \in S(H)$ وليزود ان $x^{-1} \in S(H)$

$$\begin{aligned} (x * x)^{-1} \in H &\Leftrightarrow x * x \in H \Leftrightarrow x \in S(H) \\ x^{-1} * x^{-1} \in H &\text{ وبالتالي } (x * x)^{-1} = x^{-1} * x^{-1} \end{aligned}$$

من (أ)، (ب)، (ج) و (د) ان $(S(H), *)$ زمرة جزئية ماله $(G, *)$
 مع: (30 درجہ)

برهان اُن $(G_n, +)$ زمرة تبديلية

أ: ما الواضح ان $G_n \neq \emptyset$ حسب تعريف

العملية + مغلقة على عناصر G_n لانه:

$$\forall a_1 + b_1 \sqrt{n}, a_2 + b_2 \sqrt{n} \in G_n \text{ و } a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$(a_1 + b_1 \sqrt{n}) + (a_2 + b_2 \sqrt{n}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \sqrt{n} \in G_n$$

ب: العملية (+) تجميعية على عناصر G_n لانه $\mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ اذن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة

$$\forall a_1 + b_1 \sqrt{n}, a_2 + b_2 \sqrt{n}, a_3 + b_3 \sqrt{n} \in G_n \text{ و } a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$$

$$[(a_1 + b_1 \sqrt{n}) + (a_2 + b_2 \sqrt{n})] + (a_3 + b_3 \sqrt{n}) = [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \sqrt{n}] + a_3 + b_3 \sqrt{n}$$

$$= ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3) \sqrt{n}$$

$$= (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3)) \sqrt{n}$$

$$= (a_1 + b_1 \sqrt{n}) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) \sqrt{n}]$$

$$= (a_1 + b_1 \sqrt{n}) + [(a_2 + b_2 \sqrt{3}) + (a_3 + b_3 \sqrt{n})]$$

نريد ان نثبت ان $0 + 0\sqrt{n} \in G_n$ حيث $0 \in \mathbb{Z}$ هو العنصر المحايد في G_n بالجمع
لعملية $(+)$ لأنه:

$$\forall a + b\sqrt{n} \in G_n \Rightarrow$$

$$(a + b\sqrt{n}) + (0 + 0\sqrt{n}) = (a + 0) + (b + 0)\sqrt{n} = a + b\sqrt{n}$$

$$(0 + 0\sqrt{n}) + (a + b\sqrt{n}) = (0 + a) + (0 + b)\sqrt{n} = a + b\sqrt{n}$$

من اجل اي $a + b\sqrt{n} \in G_n$ بالجمعية لعملية $(+)$:
نريد ان نثبت ان $a + b\sqrt{n} \in G_n$ بالجمعية لعملية $(+)$ لأنه من اجل ان $a, b \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow -a, -b \in \mathbb{Z}$

$$-a - b\sqrt{n} \in G_n$$

$$(a + b\sqrt{n}) + (-a - b\sqrt{n}) = (a + (-a)) + (b + (-b))\sqrt{n} = 0 + 0\sqrt{n}$$

$$(-a - b\sqrt{n}) + (a + b\sqrt{n}) = ((-a) + a) + ((-b) + b)\sqrt{n} = 0 + 0\sqrt{n}$$

من اجل ان $a, b \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow -a, -b \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow -a - b\sqrt{n} \in G_n$
من اجل ان $a, b \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow -a, -b \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow -a - b\sqrt{n} \in G_n$

$$\forall a_1 + b_1\sqrt{n}, a_2 + b_2\sqrt{n} \in G_n:$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{n}) + (a_2 + b_2\sqrt{n}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{n}$$

$$= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\sqrt{n} = (a_2 + b_2\sqrt{n}) + (a_1 + b_1\sqrt{n})$$

من اجل ان $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{n} \in G_n$
من اجل ان $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{n} \in G_n$

$$(a_1 + b_1\sqrt{n}) + (a_2 + b_2\sqrt{n}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{n}$$

من اجل ان $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{n} \in G_n$

السؤال الأول (30 درجة)

أولاً: إذا كانت R علاقة ترتيب معرفة على المجموعة غير الخالية X فبرهن أن العلاقة العكسية R^{-1} هي علاقة ترتيب على X .

ثانياً: عرف العنصر الأول (الأصغر) والعنصر الأصغر في مجموعة ما A ، ثم أعط مثلاً عن كل منهما.

ثالثاً: عرف كلاً من الانقلاب و التبدل الزوجي والتبدل الفردي وأعط مثلاً عددياً عن كل منها.

السؤال الثاني: (30 درجة)

لتكن لدينا المجموعة $G = \{ (a, b) ; a \in Q \text{ and } b \in Q \}$ ولنعرّف على المجموعة G العملية الجبرية T بالشكل التالي: $(a, b)T(c, d) = (ac, bc + d) ; \forall (a, b), (c, d) \in G$ والمطلوب:

1. أثبت أن (G, T) زمرة.
2. أثبت أن مجموعة العناصر $H = \{ (1, b) ; b \in Q \}$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة (G, T) .

السؤال الثالث: (30 درجة)

إذا كانت (S_3, o) زمرة التباديل للمجموعة: $A = \{1, 2, 3\}$ وكانت (H, o) زمرة جزئية منها، حيث: $H = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ والمطلوب:

- 1- اكتب عناصر الزمرة S_3 ثم أوجد رتبته.
- 2- أوجد مولدات الزمرة الجزئية H ، ثم أثبت أن H زمرة جزئية دورية وأوجد رتبته.
- 2- عرف المجموعة M_R بشكل عام، ثم أوجد M_R للزمرة الجزئية H في الزمرة S_3 .

*****انتهت الأسئلة*****

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمه

طرطوس 2022/2/6م

اسم: لتصحيح مادة الجبرية (1) للطلاب /
لغات الفصل الأول - العام الدراسي 1411 - 1412 هـ

اسم: (أه 3 درجة) الطلب:

أولاً: الفرض: $X \neq \emptyset$ ، $R = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in X\}$ علاقة ترتيب على X ، $X \neq \emptyset$
الطلب: $\{ (x, y) \in R \mid (y, x) \in R \}$ علاقة ترتيب على X
البرهان: نتحقق أن R^{-1} تحقق شروط علاقة الترتيب.

1) R^{-1} انعكاسية لأنه:

$$\forall x \in X \Rightarrow x R x \Rightarrow x R^{-1} x \Rightarrow (x, x) \in R^{-1}$$

2) R^{-1} تآلفية لأنه:

$$\forall x, y \in X \text{ if } (x, y) \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

3) R^{-1} متعدية لأنه:

$$(y, x) \wedge (x, y) \in R^{-1} \Rightarrow y = x$$

$$\forall x, y, z \in X \wedge (x, y) \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

وبالتالي نثبت: R^{-1} متعدية.

$$(z, y) \wedge (y, x) \in R^{-1} \Rightarrow (z, x) \in R^{-1}$$

1) مما سبق نثبت أن R^{-1} انعكاسية، تآلفية ومتعدية وبالتالي فهي علاقة ترتيب على X .

ثانياً: تعريف العنصر الأول (الأصغر): لنكن A مجموعة مرتبة بالعلاقة R

نقول العنصر $a \in A$ عنصراً أولياً في A إذا كان:

$$a R x \text{ for } \forall x \in A$$

مثال: العنصر 0 هو العنصر الأول في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ المرتبة بالعلاقة $\leq$ لأن:

$$0 \leq x \text{ for } \forall x \in \mathbb{Z}^+$$

تعريف العنصر الأخير: لنكن A مجموعة مرتبة بالعلاقة R . نقول العنصر $b \in A$ عنصراً أخيراً في A إذا كان:

$$x R b \Rightarrow x = b \text{ for } \forall x \in A$$

[2]

ب. ا. ب. $b=0$ عندها α هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ المرتبة بالعددية $\leq$ لأنه :
 $\forall x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x=0 \Rightarrow x \leq 0$

ثالثاً تعريف الانقلاب : الانقلاب هو دالة α على $\mathbb{Z}^+$ التي تعكس الترتيب
 هو تبديل يبادل بين عنصرين فقط a و b في مجموعة العناصر ثابتة دون تغيير
 مثال :

تعريف التبديل الزوجي : نقول α تبديل زوجي $\alpha \in S_n$ أنه تبديل زوجي إذا كان
 يمكن كتابته على شكل جداء عدد زوجي من الانقلابات
 مثال :

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (14)$
 α تبديل زوجي لأنه يمكن كتابته على شكل جداء أربع انقلابات
 تعريف التبديل الفردي : نقول α تبديل فردي $\alpha \in S_n$ أنه تبديل فردي إذا كان
 يمكن كتابته على شكل جداء عدد فردي من الانقلابات
 مثال :

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1453) = (13)(15)(14)$
 α تبديل فردي لأنه يمكن كتابته على شكل جداء ثلاث انقلابات

جميع : (30 درجة) المسألة :

أولاً : G هي هياكل (G, T) زمرة :

نحقق أن (G, T) تحقق شروط الزمرة :

أ : $G \neq \emptyset$ لأن $(1,0) \in G$ وبالتالي $(1,0) \in G$

ب : (T) مغلقة على عناصر G لأنه :

$$\forall (a,b), (c,d) \in G : (a,b) T (c,d) = (ac, b \underbrace{c+d}_{\in \mathbb{Z}}) \in G$$

ج : (T) جمعية على عناصر G

$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in G$:

$$(a,b) T [(c,d) T (e,f)] = [(a,b) T (c,d)] T (e,f)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= (a,b) T [(c,d) T (e,f)] = (a,b) T (ce, de+f) \\ &= (ace, bce+de+f) \end{aligned}$$

[3]

$$\begin{aligned} p_2 &= [(a, b)T(c, d)]T(e, f) = (ac, bc + d)T(e, f) \\ &= (ace, (bc + d)e + f) = (ace, bce + de + f) \end{aligned}$$

$$(a, b)T[(c, d)T(e, f)] = [(a, b)T(c, d)]T(e, f)$$

وبالتالي T جمعية على عناصر G .

٤: وجود العنصر المحايد في G بالسيمة T :

العنصر $(1, 0)$ هو العنصر المحايد في G بالسيمة T لأنه من

جهة أولى فإن $(1, 0) \in G$ ومما يبره أخرى فإن:

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in G: (a, b)T(1, 0) &= (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (a, b) \\ (1, 0)T(a, b) &= (1 \cdot a, 0 \cdot a + b) = (a, b) \end{aligned}$$

٥: وجود العنصر النظير في G بالسيمة T : من أجل أي عنصر $(a, b) \in G$ فإن العنصر $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ هو نظير لهذا العنصر بالسيمة T في G :

لأنه مما يبره أولى فإن $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ وبالتالي $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) \in G$ ومما يبره أخرى فإن:

$$(a, b)T(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) = (\frac{1}{a} \cdot a, b \cdot \frac{1}{a} + (-\frac{b}{a})) = (1, 0)$$

$$(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})T(a, b) = (\frac{1}{a} \cdot a, -\frac{b}{a} \cdot a + b) = (1, 0)$$

٢) نجد من (1)، (2)، (3) أن (G, T) زمرة.
ثباتاً: برهنا أن (H, T) زمرة جزئية من (G, T)

أ: نلاحظ من تعريف H أن $H \subseteq G$ وأن

$$(1, 0) \in H \text{ أي أن } H \neq \emptyset$$

$$\phi \neq H \subseteq G$$

٤: لنتحقق الآن أن H مغلقة، ومما يبره أخرى:

$$\forall (1, b), (1, d) \in H: (1, b)T(1, d) =$$

$$(1, 1, b \cdot 1 + d) = (1, b + d) \in H$$

$\mathbb{Q} \Rightarrow$

ثانياً من أجل أي عنصر $(1, b) \in H$ فإن

$$(1, b)^{-1} = (\frac{1}{1}, -\frac{b}{1}) = (1, -b) \in H$$

$\mathbb{Q} \Rightarrow$

من (1) نجد أن (H, T)

4

الطلب الأول: (3 درجة)

الطلب الثاني: أيا د مولد الزمرة الجزئية H:

$$S_3 = \{ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \}$$

$$O(S_3) = |S_3| = 6$$

الطلب الثاني: أيا د مولد الزمرة الجزئية H:

مثال العنصر $\pi_1 \in H$ فإن $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$ والعنصر المحايد في H .
مثال العنصر $\pi_2 \in H$ فإن:

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq e$$

$$\pi_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \pi_3 \neq e$$

$$\pi_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$$O(\pi_2) = 3 = O(H) \text{ وبالتالي فإن:}$$

$$H = \langle \pi_2 \rangle = \{ \pi_2, \pi_2^2, \pi_2^3 \} = \{ \pi_2, \pi_3, \pi_1 \}$$

أي أن العنصر π_2 مولد للزمرة الجزئية H.
أما مثال العنصر $\pi_3 \in H$ فإن:

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq e$$

$$\pi_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \pi_2 \neq e$$

$$\pi_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$$O(\pi_3) = 3 = O(H) \text{ وبالتالي فإن:}$$

$$H = \langle \pi_3 \rangle = \{ \pi_3, \pi_3^2, \pi_3^3 \} = \{ \pi_3, \pi_2, \pi_1 \}$$

أي أن العنصر π_3 مولد للزمرة الجزئية H.
وبالتالي مولدات الزمرة الجزئية H: $\{ \pi_2, \pi_3 \}$

إثبات أن H زمرة جزئية دورية: ولقد نأمل أن H زمرة جزئية دورية.
مولد العنصر π_2 $\Rightarrow$

$$O(H) = 3$$

5

بالتالي تعريف المجموعة M_R : ازاكيات H زمرة فرعية من زمرة ما G
 تتكون من مجموعة جميع المرافقات البينية لـ H في G بالرمز
 M_R ونفرض بالمثل:
 $M_R = \{ H * a \mid a \in G \}$

يحدد M_R للزرة الخشنة H في الزرة S_3 :

مثال $\pi_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \in S_3$ حيث $\pi_1 \in H$ فإن:

$$H \circ \pi_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \right\} = H = \{ \pi_1, \pi_2, \pi_3 \}$$

مثال $\pi_2 \in S_3$ حيث $\pi_2 \notin H$ فإن:

$$H \circ \pi_2 = H$$

$$H \circ \pi_3 = H$$

كذلك مثال $\pi_3 \in S_3$ حيث $\pi_3 \notin H$ فإن:

الآن مثال $\pi_4 \in S_3$ حيث $\pi_4 \notin H$ فإن:

$$H \circ \pi_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \right\} = \{ \pi_4, \pi_5, \pi_6 \}$$

وكذلك مثال $\pi_5 \in S_3$ حيث $\pi_5 \notin H$ فإن:

$$H \circ \pi_4 = H \circ \pi_5$$

وأيضا مثال $\pi_6 \in S_3$ حيث $\pi_6 \notin H$ فإن:

$$H \circ \pi_4 = H \circ \pi_5 = H \circ \pi_6$$

لذلك نتوقف عند
 ملاحظات: $H \circ \pi_1 \cup H \circ \pi_4 = S_3$

وبالتالي فإن $H \circ \pi_1 \cap H \circ \pi_4 = \emptyset$ و $M_R = \{ H \circ \pi_1, H \circ \pi_4 \}$

ملاحظة: جميع التقاربات والاشكالية الواردة في سلم التقييم لها
 أكثر من طريقة، يا هبة لكل من يجربها تأخذ نفس العادة
 المنهجية لها في سلم التقييم

طريقك / 1 / 1 / 1 / 1

مدرس المادة: د. عائشة صبيح

السؤال الأول: (30 درجة) 1- عرف العنصر الجامد ، ثم برهن أنه إذا كانت $(A, +, \cdot)$ منطقة تكاملية و a, b عنصرين من A بحيث إن $a^5 = b^5$ & $a^7 = b^7$ فإن $a = b$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، ولتكن $C(R) = \{a \in R \mid ax = xa \quad \forall x \in R\}$. بين أن $C(R)$ حلقة جزئية من $(R, +, \cdot)$.

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- عرف حلقة المثاليات الرئيسية، ثم برهن أنه إذا كان f هومومورفيزم لحلقة ما $(A, +, \cdot)$ في حلقة ما $(B, +, \cdot)$ ، فإن $(\text{Ker } f, +, \cdot)$ مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، ولتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولتكن I مثالية من R . بين أن:

$$A/(A \cap I) \cong (A + I)/I$$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة عنصر الوحدة فيها 1. برهن أن:

$$n < 0 \Leftrightarrow \text{char}(R) = n > 0 \quad \text{أصغر عدد صحيح موجب يحقق } n.1 = 0$$

2- عرف القاسم المشترك الأعظم d لعنصرين $a \neq 0, b \neq 0$ من حلقة تبديلية واحدة $(A, +, \cdot)$ ، ثم بين أنه إذا كان ε عنصر قابل للقلب في $(A, +, \cdot)$ فإن $d \cdot \varepsilon$ قاسم مشترك أعظم للعنصرين a, b .

3- لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة اقليدية، وليكن $a \neq 0$ و $b \neq 0$ عنصرين من A . إذا كان a قاسماً لـ b في A ، وإذا كان $\varphi(a) = \varphi(b)$ ، فبين أن a و b شريكان في A .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم



التمرين الأول [30]

1. $a^2 = a$ إذا كان a عنصرًا "طبيعيًا" في $(R, +, \cdot)$ 3

إذا كان $a = 0$ ، فإن $a^2 = 0 = a$ ، وإذا كان $a \neq 0$ ، فإن $a^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0$ 3

بما أن $a \neq 0$ ، فإن $a \neq 1$ ، إذن $a = 0$ أو $a = 1$.

$a^2 = a \Rightarrow a \cdot a = a \cdot 1 \Rightarrow a^2 = a$ (بما أن $a \neq 0$) 4

بما أن $a \neq 0$ ، فإن $a^2 \neq 0$ ، إذن $a^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0$ 5

$a^2 = a \Rightarrow a \cdot a = a \cdot 1 \Rightarrow a^2 = a$ (بما أن $a \neq 0$) 5

بما أن $a \neq 0$ ، فإن $a^2 \neq 0$ ، إذن $a^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0$ 6

$0x = x0$ ، $C(R) \neq \emptyset$ ، $C(R) \subseteq R$ ، $0 \in C(R)$ 3

$\forall a_1, a_2 \in C(R) \Rightarrow a_1 x = x a_1$ و $a_2 x = x a_2 \quad \forall x \in R$ 6

$\forall a_1, a_2 \in C(R) \Rightarrow a_1 x = x a_1$ و $a_2 x = x a_2 \quad \forall x \in R$ 6

عن (1) و (2) و (3) نجد أن $C(R)$ حلقة جزئية من $(R, +, \cdot)$ 6

1. إذا كانت $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة، فإننا نقول
عن الحلقة $(A, +, \cdot)$ أن الحلقة صالحة رئيسية إذا، و فقط إذا، كانت
كل مثالية في الحلقة $(A, +, \cdot)$ مثالية رئيسية فيها.

ن = ما دمج أن $\text{Ker } f \subseteq A$ و $\text{Ker } f \neq \emptyset$ لأن $f(0) = 0'$ ، وبالتالي $0 \in \text{Ker } f$
 $\forall x, y \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = f(y) = 0' \Rightarrow f(x - y) = f(x) - f(y) = 0' - 0' = 0' \Rightarrow x - y \in \text{Ker } f$
 $\forall a \in A, x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(ax) = f(a) * f(x) = f(a) * 0' = 0' \Rightarrow ax \in \text{Ker } f$
 $f(xa) = f(x) * f(a) = 0' * f(a) = 0' \Rightarrow xa \in \text{Ker } f$
 مع (1) و (2) و (3) نجد أن $\text{Ker } f$ مثالية في الحلقة $(A, +, \cdot)$.

لنعرف التطبيق:
 $f: A \rightarrow (A + I) / I$
 بآلية:

$$f(x) = x + I \quad \forall x \in A$$

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + I = (x_1 + I) + (x_2 + I) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot x_2 + I = (x_1 + I)(x_2 + I) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

(3) ليكن y عنصراً في $A + I$ فإنه يكتب بآلية:

$$y = a_1 + b \quad ; \quad a_1 \in A \quad \& \quad b \in I$$

$$\Rightarrow f(a_1) = a_1 + I = (a_1 + I) + I = (a_1 + I) + (b + I) = (a_1 + b) + I = y + I$$

$\Rightarrow \forall y + I \in (A + I) / I \Rightarrow \exists a_1 \in A ; f(a_1) = y + I$
 وهذا هو المطلوب.

كأن $\text{Ker } f = A \cap I$

$\forall z \in \text{Ker } f \Rightarrow \text{Ker } f \subseteq A \quad \& \quad f(z) = 0' = I$
 $\Rightarrow z \in A \quad \& \quad z + I = I$
 $\Rightarrow z \in A \quad \& \quad z \in I \Rightarrow z \in A \cap I$
 $\Rightarrow \text{Ker } f \subseteq A \cap I \dots (1)$

$$\forall z \in A \cap I \Rightarrow z \in A \text{ و } z \in I$$

$$\Rightarrow z \in A \text{ و } z + I = I \Rightarrow z \in A \text{ و } f(z) = I$$

$$\Rightarrow z \in \text{Ker } f \Rightarrow A \cap I \subseteq \text{Ker } f \quad \dots (2)$$

$$\text{Ker } f = A \cap I \quad \text{من (1) و (2) نجد أن}$$

في (1) و (2) و (3) نجد أن f هو صورة راسم خارجي من الحلقة

$(A, +, \cdot)$ إلى الحلقة $(A+I/I, +, \cdot)$ ونواة $A \cap I$ ، ومنه:

$$(A/A \cap I, +, \cdot) \cong (A+I/I, +, \cdot)$$

سؤال التالى:

1) ($\Leftarrow$) لنفرض أن $\text{Char}(R) = n > 0$ ، وبالنسبة لـ $na = 0$ في أمثلة

كل a من $(R, +, \cdot)$ ، ومنه $n \cdot 1 = 0$. لنفرض الآن أنه يوجد عدد

صحيح موجب m بحيث أن $0 < m < n$ ، وكيفية $m \cdot 1 = 0$ ، ومنه:

$$ma = m(1 \cdot a) = (m \cdot 1)a = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in R$$

وهذا تناقض مع كون $\text{Char}(R) = n$ ، وبالنسبة لـ n هو أصغر عدد

صحيح موجب يحقق العلاقة $n \cdot 1 = 0$.

($\Rightarrow$) لنفرض أن n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $n \cdot 1 = 0$

في أمثلة كل عنصر a في $(R, +, \cdot)$ ، فإن:

$$na = n(1 \cdot a) = (n \cdot 1)a = 0a = 0$$

ومنه $\text{Char}(R) = n$.

2) $\star$ نقول إن d قاسم مشترك لـ a و b في A إذا كانت:

$$\forall d \text{ قاسم لـ } a \text{ و } b \text{ في } A \text{ أى } a = d \cdot a' \text{ و } b = d \cdot b'$$

3) إذا وجد قاسم مشترك لـ a و b في A ، فإن d قاسم مشترك لـ a و b في A

$$\star \forall d \text{ قاسم مشترك لـ } a \text{ و } b \text{، بالنسبة لـ } c \in A \text{ : } a = cd$$

$$\Rightarrow a = c \cdot d \Rightarrow d \mid a \text{ و } d \mid b \Rightarrow d \mid (c \cdot d) = a$$

وبنفس الطريقة نجد $b = d \cdot b' \Rightarrow d \mid b$ ومنه $d \mid a$ و $d \mid b$

$$d = cd' \text{ ; } c \in A \Rightarrow d = c \cdot d' = (c \cdot d')$$

$$\Rightarrow d \mid d \text{ و } d \mid b \Rightarrow d \mid (d + b) = a + b$$

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم
امتحان البنى الجبرية (1)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
للدورة الأولى-2020-2021م
المدة: ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: (30 درجة)

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Z بالشكل التالي:

$$xRy \Leftrightarrow 6|x-y ; \forall x,y \in Z$$

والمطلوب:

- 1- أثبت أن R علاقة تكافؤ على Z ، ماذا ندعو علاقة التكافؤ هذه .
- 2- أوجد صفوف تكافؤ هذه العلاقة.

السؤال الثاني: (30 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

1. إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ هو:

$$1- \forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$$

$$2- \forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

2. لتكن $(G,*)$ زمرة تبديلية ما، ولتكن $(H,*)$ زمرة جزئية منها، ولتكن:

$$S(H) = \{x \in G; x*x \in H\}$$

برهن أن $(S(H),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$.

السؤال الثالث: (30 درجة)

أولاً: أثبت أن الزمرة $(\bar{Z}_6, \oplus)$ زمرة تبديلية منتهية (استعن بجدول كايلى).

ثانياً: أوجد جميع مولدات الزمرة $(\bar{Z}_6, \oplus)$ واستنتج أنها زمرة دورية.

ثالثاً: أوجد رتبة كل من العنصرين $\bar{5}$ و $\bar{5}^{-1}$ في هذه الزمرة.

*****انتهت الأسئلة*****

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2021/2/7م

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم
الامتحان البني الجبرية (١) المدة: ساعتان
لطلاب السنة الثانية رياضيات الدرجة العظمى: ٩٠ درجة
الفصل الثاني اسم الطالب:

السؤال الأول: (٣٠ درجة)

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $Z^+ \times Z^+$ بالشكل التالي:
 $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c \quad \forall (a,b),(c,d) \in Z^+ \times Z^+$
أثبت أن R علاقة تكافؤ على $Z^+ \times Z^+$ ، ثم أوجد صفّي تكافؤ العنصرين $(4,4)$ و $(4,6)$.

السؤال الثاني: (٣٠ درجة)

برهن صحة النظرية التالية:

إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ هو:
 $a * b^{-1} \in H; \forall a, b \in H$

السؤال الثالث: (٣٠ درجة)

أولاً: لنعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ العملية الثنائية $(*)$ بالشكل التالي:

$$\forall x, y \in R^+ : x * y = \frac{x \cdot y}{2}$$

ثانياً: إذا كانت $(G,.)$ زمرة، حيث $G = \{\pm 1, \pm a, \pm a^2\}$ و $a^3 = -1$ ، فأثبت أن الزمرة $(G,.)$ دورية، ثم أوجد جميع مولدات هذه الزمرة.

*****انتهت الأسئلة*****

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمه



طرطوس في ٢٠٢٠/٩/٢ م

[1]

جامعة طرابلس

كلية العلوم

م. لتصحيح طادة البين اليرية (1) لطلاب س.ر
للعام الدراسي 2019 - 2020 - فصل ثامن

س.ر (30 درجة)

أولاً: إثبات أن R علاقة تكافؤ:

1- R علاقة انعكاسية لأنه:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : a + b = b + a \Leftrightarrow (a, b) R (a, b)$$

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ ; (a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow$$

$$b + c = a + d \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c, d) R (a, b)$$

$$\forall (a, b), (c, d), (e, t) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ ; (a, b) R (c, d) \wedge (c, d) R (e, t) \Leftrightarrow$$

$$(a + d = b + c) \wedge (c + t = d + e) \Leftrightarrow a + t = b + e$$

$$a + d + c + t = b + c + d + e \Leftrightarrow (a, b) R (e, t)$$

ثانياً: إيجار مفهوم النظام R علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$

$$\overline{(4, 4)} = \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ ; (4, 4) R (a, b) \} = \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ ; 4 + b = 4 + a \}$$

$$= \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ ; a = b \} = \{ (a, a) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \}$$

$$= \{ (4, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots \}$$

$$\overline{(4, 6)} = \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ ; (4, 6) R (a, b) \} = \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ ; 4 + b = 6 + a \}$$

$$= \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ ; b = a + 2 \}$$

$$= \{ (4, 6), (5, 7), (1, 3), (2, 4), \dots \}$$

جميع: (30 درجة):
أولاً: لزوم الشرط: (H) ان مرتبة جزئية من الزمرة $(G, *)$

الطلب: صحة الشرط: $\forall a, b \in H ; a * b \in H$

البرهان: $\forall a, b \in H$ وبما أن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ 4 2

أيًا: كطية الشرط: الغرض: لتحقيق الشرط: 3

$\Rightarrow b^{-1} \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$

$\forall a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$ 3 المطلوب: $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$.

البرهان: (م) احب الشرط 6

$\forall a \in H \subseteq G \Rightarrow a * a^{-1} = e \in H$ بفرض e العنصر المحايد في الزمرة $(G, *)$

وبالتالي: $a, e \in H$ إذا احب الشرط فإن: $a^{-1} = e * a^{-1} \in H$ أي أنه:

(ب) احب القسم الأول (م) احب هذا البرهان 3

$\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$ 3

$\forall a, b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$ 3

$\Rightarrow a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$ 2

من (م) وان خدأت $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$.

مجم: (30 درجة)

أولاً: إثبات أن $(\mathbb{R}^+, *)$ زمرة تبديلية

م: نتحقق أولاً أن $(\mathbb{R}^+, +)$ تحقق شروط الزمرة:

أولاً: $(\mathbb{R}^+, +)$ مغلقة على عناصر $\mathbb{R}^+$ لأنه: 3

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+; x + y = \frac{x \cdot y}{2} \in \mathbb{R}^+$

ثانياً: $(\mathbb{R}^+, +)$ تجميعية على عناصر $\mathbb{R}^+$ لأنه:

$$\forall x, y, z; x * (y * z) = x * \left(\frac{y \cdot z}{2} \right) = \frac{x \cdot \left(\frac{y \cdot z}{2} \right)}{2} = \frac{x \cdot y \cdot z}{4}$$

$$(x * y) * z = \left(\frac{x \cdot y}{2} \right) * z = \frac{\frac{x \cdot y}{2} \cdot z}{2} = \frac{x \cdot y \cdot z}{4}$$

وبالتالي:

ثالثاً: وجود العنصر المحايد: $e = 2$ هو العنصر المحايد في $\mathbb{R}^+$ بالنسبة للعملية $(*)$ لأن $e \in \mathbb{R}^+$ وبما جوة أخرى بأن:

$x * 2 = \frac{x \cdot 2}{2} = x = \frac{2 \cdot x}{2} = 2 * x$ 3

رابعاً: وجود العنصر العكسي: معاً لكل عنصر x من $\mathbb{R}^+$ فإن العنصر $x^{-1} = \frac{4}{x}$ هو العنصر العكسي لـ x بالنسبة لـ $(*)$ 3

خاصية أخرى فان: $x^{-1} = \frac{4}{n} \in \mathbb{R}^+$ و خاصية أخرى فان: $x + x^{-1} = x + \frac{4}{n} = \frac{n \cdot \frac{4}{n}}{2} = 2$ و $x^{-1} \cdot x = \frac{4}{n} \cdot x = \frac{4}{2} = 2$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x \star y = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{y \cdot x}{2} = y \star x$$

لدينا $6 = 0(6)$ ونكتب القوى المختلفة لـ a .

$$a^1 = a, a^2 = a^2, a^3 = -1, a^4 = a^3 \cdot a = -a, a^5 = a^3 \cdot a^2 = -a^2,$$

$$a^6 = a^3 \cdot a^3 = (-1)(-1) = 1 \Rightarrow 0(a) = +6$$

$G = \langle a \rangle = \{ a, +a^2, -1, -a, -a^2, +1 = e \}$
 حساب المولدات الأخرى للزرة الدورية G :
 ونكتب القوى المختلفة لـ a :

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$
 G

إثبات: $0(-a) = 3 \neq 0(G)$ $-a$ ليس عوّلًا لـ G

وبالتالي ١- ليس مولدًا لـ G .

3! : $O(G) = 6 \neq O(a^2) = 3$ ، والصنف a^2 ليس مولدًا لـ G .

$$\begin{aligned} (-a^2)^1 &= -a^2, (-a^2)^2 = a^4 = a^3 \cdot a = -a \\ (-a^2)^3 &= -a^6 = -(a^3)^2 = -1, (-a^2)^4 = a^8 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^2 = a^2 \end{aligned}$$

$$(-a^2)^5 = -a^{10} = -(a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^1)^{\boxed{4}} = a$$

$$(-a^2)^6 = a^{12} = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = 1 \Rightarrow \theta(-a^2) = 6$$

$$\underline{\text{الملاحظة 3:}} \quad O(-a^2) = O(G) = 6 \quad \text{مولدة الزمرة } G \text{ } (-a^2)$$

في التالي مولدات الزمرة الدورية G هي: $\{a, -a^2\}$

ملاحظة: جميع العناصر الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة، بالهيئة
للحل وبجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لاجابة سلم التصحيح

طوطون في ٩/٩/٢٠٢٠

مدرس المقرر : د. عائدة علي هاشم

ع

السؤال الأول: (22 درجة)

أكمل العبارات التالية:

- 1- التبديل المطابق في S_7 هو ----- ، 2- عدد التباديل الفردية في الزمرة S_7 هو ----- ،
- 3- رتبة الزمرة الدورية تساوي ----- ، 4- إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة دورية G عندئذ فإن H ----- ، 5- ----- ، $(abcd)^{-1} =$ ----- ، 6- تعرف رتبة العنصر a من الزمرة $(G, +)$ بأنها ----- ، 7- إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة ما G عندئذ فإن $x * H = H * x$ ؛ $\forall x \in G$ إذا كانت ----- ، 8- إذا كانت $a \in G$ ؛ $G = (a)$ و $O(G) = 12$ عندئذ فإن عناصر G هي ----- ، 9- النظام الجبري $(S_3/H, 0)$ يكون زمرة قسمة إذا تحقق الشرط: ----- .

السؤال الثاني: (48 درجة)

أولاً: لتكن S علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $R \times R$ بالشكل التالي:
 $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \times R$ ، $(x_1, y_1) S (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ ، أثبت أن S علاقة تكافؤ على $R \times R$ ، ثم أوجد صفى تكافؤ العنصرين $(\frac{5}{6}, -3)$ و $(8, 8)$.

ثانياً: لتكن $(G, *)$ و $(G', \perp)$ زمرتان و e و e' وعلى التوالي العنصرين المحايدين في هاتين الزمرتين ، وليكن $f: G \rightarrow G'$ هومومورفيزم والمطلوب أثبت أن: 1- $f(e) = e'$ ، 2- $(\ker f, *)$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $(G, *)$.

ثالثاً: إذا كانت $(H, *)$ زمرة جزئية من زمرة ما $(G, *)$ و x, y عنصران من G والمطلوب أثبت أن: 1- $\forall x \in G$ فإن $x \in x * H$. 2- إما $x * H = y * H$ أو $x * H \cap y * H = \emptyset$.

السؤال الثالث (20 درجة)

لتكن $(G, *)$ زمرة ما و e عنصرها المحايد وليكن b عنصراً ما من G .
 ولنعرّف على G العملية الجبرية T بالشكل التالي: $\forall x, y \in G$: $x T y = x * b * y$.

- 1- أثبت أن النظام الجبري (G, T) زمرة .
- 2- أثبت أن التطبيق $f: (G, *) \rightarrow (G, T)$ المعرف بالشكل التالي:
 $\forall x \in G$: $f(x) = x * b^{-1}$ أيزومورفيزم زمرة .

***** انتهت الأسئلة *****

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس 2020/2/2م

$$(8, 8) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; 8 \cdot 8 = x \cdot y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} , 64 = x \cdot y\}$$

$$= \{(8, 8), (-8, -8), (64, 1), (-64, -1), (1, 64), (-1, -64), (2, 32), (-2, -32), (32, 2), (-32, -2), (16, 4), (-16, -4), (4, -16), (-4, 16)\}$$

$$\forall g \in G \Rightarrow f(g) \perp e' = f(g) = f(g * e) = f(g) \perp f(e) \quad \text{أثبت (1)}$$

$$\Rightarrow f(e) = e' \quad \text{أثبت (2): لنثبت أولاً أن } \ker(f) \text{ مجموعة جزئية من } G$$

$$\ker(f) \neq \emptyset \quad \text{أثبت (3): } e \in \ker(f) \Leftarrow f(e) = e' \quad \text{أثبت (4)}$$

$$x * y^{-1} \in \ker(f) \quad \text{أثبت (5): } \forall x, y \in \ker(f), \text{ لنثبت أن } \phi \neq \ker(f) \subseteq G$$

$$\text{لـ } x, y \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = f(y) = e'$$

$$f(x * y^{-1}) = f(x) \perp f(y^{-1}) = f(x) \perp (f(y))^{-1} = e' \perp e'^{-1} = e' \perp e' = e'$$

$$\Rightarrow x * y^{-1} \in \ker(f)$$

$$\text{أثبت (6): } \ker(f) \text{ مجموعة جزئية من } G \quad \text{أثبت (7): لنثبت أن المجموعة الجزئية } \ker(f) \text{ مغلقة في } G \text{ لنثبت أن}$$

$$\forall g \in G : g^{-1} * \ker(f) * g \subseteq \ker(f)$$

$$\forall x_2 \in g^{-1} * \ker(f) * g \Rightarrow x_2 = g^{-1} * x_1 * g ; x_1 \in \ker(f)$$

$$f(x_1) = e' \quad \text{وبالتالي } x_1 \in \ker(f)$$

$$\Rightarrow f(x_2) = f(g^{-1} * x_1 * g) = f(g^{-1}) \perp f(x_1) \perp f(g)$$

$$= [f(g)]^{-1} \perp e' \perp f(g) = [f(g)]^{-1} \perp f(g) = e' \Rightarrow$$

$$x_2 \in \ker(f) \Rightarrow g^{-1} * \ker(f) * g \subseteq \ker(f)$$

$$\text{وبالتالي } \ker(f) \text{ مجموعة جزئية مغلقة في } G$$

$$\text{أثبت (8): } \ker(f) \text{ مجموعة جزئية مغلقة في } G \quad \text{أثبت (9): } \ker(f) \text{ مجموعة جزئية مغلقة في } G \text{ وبمجموعة العناصر المحايدة في } G$$

$$\text{أثبت (10): } \ker(f) \text{ مجموعة جزئية مغلقة في } G \quad \text{أثبت (11): } \ker(f) \text{ مجموعة جزئية مغلقة في } G$$

$$a \in x * H \cap y * H$$

$$\Rightarrow a \in x * H \text{ و } a \in y * H \Rightarrow a = x * h_1 \text{ و } a = y * h_2 ; h_1, h_2 \in H$$

$$\Rightarrow x * h_1 = y * h_2 \Rightarrow x = y * h_2 * h_1^{-1} \Rightarrow x * H = y * (h_2 * h_1^{-1}) * H$$

$$= y * H$$

$$x * H = y * H \quad \text{أثبت (12):}$$

3

أثبت أن (G, T) زمرة

لأن G مجموعة غير خالية تحت T

$\forall x, y \in G : xTy = x * b * y \in G$

أي أن T مغلقة على عناصر G

$\forall x, y, z \in G : (xTy)Tz = xT(yTz)$

$(xTy)Tz = (x * b * y)Tz = (x * b * y) * b * z$
 $= x * b * (y * b * z) = xT(yTz)$

أي أن T جمعية على عناصر G
 - يوجد $e \in G$ عنصر محايد بالترتيب T هو b^{-1} حيث b هو أول ثابت

$\forall x \in G : xTb^{-1} = x * b * b^{-1} = x * e = x$

$b^{-1}Tx = b^{-1} * b * x = e * x = x$

أي أن b^{-1} هو العنصر المحايد بالترتيب T لأن $x' = (b * x * b)^{-1} = b^{-1} * x * b^{-1}$ وهذا هو المطلوب
 $x' \in G$ حيث $x' = (b * x * b)^{-1}$

$x'Tx = (b * x * b)^{-1}Tx = (b * x * b)^{-1} * b * x = b^{-1} * x * b^{-1} * b * x = b^{-1} * x * x = b^{-1}$

$xTx' = xT(b * x * b)^{-1} = x * b * b^{-1} * x^{-1} * b^{-1} = x * e * x^{-1} * b^{-1} = x * x^{-1} * b^{-1} = b^{-1}$

أي أن (G, T) زمرة

الطلب الثاني: f إيزومورفزم: f - f هو مورفزم: يجب أن نثبت أنه

$\forall x, y \in G : f(xTy) = f(x)Tf(y)$

$f(xTy) = f(x * b * y) = (x * b * y) * b^{-1}$
 $f(x)Tf(y) = (x * b^{-1})T(y * b^{-1}) = (x * b^{-1}) * b * (y * b^{-1})$
 $= x * (b^{-1} * b) * y * b^{-1} = (x * y) * b^{-1}$

$\Rightarrow f(xTy) = f(x)Tf(y) \Rightarrow$

$f(x) = f(y) \Rightarrow x * b^{-1} = y * b^{-1} \Rightarrow x = y$

$\forall x \in G \Rightarrow \exists x * b \in G : x = x * b * b^{-1} = f(x * b)$

أي أن f إيزومورفزم

ملحوظة: جميع التمارين الواردة في سلم التحصيل لا تكون طريقة رياضية للحل

و يجب أن تأخذ في الاعتبار الملاحظة الأخيرة لا يسلم التحصيل

طهوس في 2020/2/2

مدرس المقرر : د. عائدة عبد الحاميد

الجمهورية العربية السورية امتحان البنى الجبرية (1) المدة: ساعتان
جامعة طرطوس لطلاب السنة الثانية رياضيات الدرجة العظمى: 90 درجة
كلية العلوم الدورة الثالثة للعام الدراسي 2018-2019 اسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة)

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Z بالشكل التالي:

$$xRy \Leftrightarrow 5|x-y; \forall x, y \in Z$$

والمطلوب:

- 1- أثبت أن R علاقة تكافؤ على Z ، ماذا ندعو علاقة التكافؤ هذه؟
- 2- أوجد صفوف تكافؤ هذه العلاقة.

السؤال الثاني: (30 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

1. إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ هو:

$$a * b^{-1} \in H; \forall a, b \in H$$

2. لتكن $(G, *)$ زمرة ما، ولتكن $\{A_\alpha, *\}_{\alpha \in I}$ أسرة غير خالية من الزمر الجزئية الناعمية من هذه الزمرة والمطلوب برهن أن الزمرة الجزئية $(D = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha, *)$ زمرة جزئية ناعمية من الزمرة $(G, *)$.

السؤال الثالث: (30 درجة)

- أولاً: أثبت أن $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ زمرة تبديلية منتهية (استعن بجدول كايلى).
- ثانياً: أوجد جميع مولدات الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ و استنتج أنها زمرة دورية.
- ثالثاً: أوجد رتبة كل من العنصرين 4 و 4^{-1} في هذه الزمرة.

*****انتهت الأسئلة*****

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2019/8/6م

س: (30 درجة) لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Z بالكلية

$$x R y \Leftrightarrow 5 | x - y ; \forall x, y \in Z$$

والمطلوب: أ. أثبت أن R علاقة تكافؤ على Z ما ذا ندعو علاقة R ؟
ب. أوجد خصائص تكافؤ لهذه العلاقة.

الحل: الطلب الأول: إثبات أن R علاقة تكافؤ على Z :

(5) أريد: R انعكاسية لأنه: $x R x \Leftrightarrow 5 | x - x \Leftrightarrow 5 | 0 \Leftrightarrow x R x \quad \forall x \in Z$

(5) ثانياً: R تناظرية لأنه: $x R y \Leftrightarrow 5 | x - y \Leftrightarrow 5 | y - x \Leftrightarrow y R x$

(5) ثالثاً: R متعدية لأنه: $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

(6) $x R y \wedge y R z \Rightarrow 5 | x - y \wedge 5 | y - z \Rightarrow 5 | (x - y) + (y - z) \Rightarrow 5 | x - z \Rightarrow x R z$

(2) R انعكاسية و تناظرية و متعدية على Z علاقة تكافؤ على Z .

ندعو علاقة التكافؤ هذه بعلاقة التوافق على Z بالقياس 5

الطلب الثاني: اصفوف نظام هذه العلاقة

(2) $\{y \in Z ; 5 | x - y\} = \{y \in Z ; 5 | x - y\}$

(2) $\{y \in Z ; 5 | 0 - y\} = \{y \in Z ; 5 | -y\}$

(1) $\{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots \}$

(1) $\{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots \}$

(1) $\{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots \}$

(1) $\{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots \}$

(1) $\{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots \}$

س: (30 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

ا- إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G عندئذ فإن H الزم والطاني حتى تكون $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ هو

$$a * b^{-1} \in H \quad \forall a, b \in H$$

ب- لتكن $(G, *)$ زمرة ما ولتكن $\{A_\alpha, *\}$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ لزمنا أن الزمرة الجزئية

الناظمية من هذه الزمرة، والمطلوب برهن أن الزمرة الجزئية $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha, *$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $(G, *)$

الحل: أولاً: لنفرض: الفرض $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

الطلب: ثبوت: $\forall a, b \in H : a * b^{-1} \in H$

البرهان: $\forall a, b \in H$ وبما أن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

كتابة الشرط: الفرض: تحقق الشرط: $a^{-1} \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$

الطلب: $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

البرهان: $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

حيث e العنصر المحايد في الزمرة $(G, *)$

وبالتالي: $a^{-1} = e * a^{-1} \in H$ و $a, e \in H$

أي أن: $a^{-1} \in H$

$a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

$b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$

$a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$

من (1) و (2) نجد أن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

ثانياً: قد نجد أن D زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

لأن D زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

$g^{-1} * D * g \subseteq D$

$\Rightarrow g^{-1} * D * g \subseteq D$

وبالتالي الزمرة الجزئية $(D, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

سأج: (أ) درجة

أولاً: أثبت أن $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ زمرة تبديلية متناهية

الحل: الطلب الأول: نوجد أدلة جدول كايي للبنية البرية $(\mathbb{Z}_7^*, \otimes)$:

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
2	4	6	1	3	5
3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3
5	3	1	6	4	2
6	5	4	3	2	1

نلاحظ من الجدول أنه:

أ: العملية $(\otimes)$ مغلقة - من عناصر $\mathbb{Z}_7^*$ لأنه:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_7^* : \bar{x} \otimes \bar{y} \in \mathbb{Z}_7^* \quad (1)$$

ب: العملية $(\otimes)$ تبديلية على عناصر $\mathbb{Z}_7^*$ لأنه:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_7^* : \bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{y} \otimes \bar{x} \quad (2)$$

ولأن عناصر مجموعة جدول كايي المطابقة بالبنية للقطر الرئيسي متساوية:

ج: العملية $(\otimes)$ تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}_7^*$ لأنه:

$$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_7^* : (\bar{x} \otimes \bar{y}) \otimes \bar{z} = \bar{x} \otimes (\bar{y} \otimes \bar{z}) \quad (3)$$

د: من الجدول نلاحظ أن $\bar{1} \in \mathbb{Z}_7^*$ هو العنصر المحايد في $\mathbb{Z}_7^*$ بالبنية $(\otimes)$ وهو يحقق:

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_7^* : \bar{x} \otimes \bar{1} = \bar{x} \quad (4)$$

ه: لكل عنصر في $\mathbb{Z}_7^*$ مقلوب بالنسبة للعملية $(\otimes)$ كما في الجدول التالي:

العنصر	1	2	3	4	5	6
المقلوب	1	4	5	2	3	6

وهو يحقق:

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_7^* : \exists \bar{x}^{-1} \in \mathbb{Z}_7^* : \bar{x} \otimes \bar{x}^{-1} = \bar{1} \quad (5)$$

وبالتالي $(\mathbb{Z}_7^*, \otimes)$ مجموعة بيلية وله مثنوية لأنه:

$$0(\mathbb{Z}_7^*) = 6 \neq 0(\mathbb{Z}_7^*) = 6 \quad (6)$$

أما حسب نجد أنه:

الطلب الثاني: لحيث مولدات الزمرة $(\mathbb{Z}_7^*, \otimes)$:

لدينا $0(\mathbb{Z}_7^*) = 6$ والعنصر المحايد في هذه الزمرة هو $\bar{1}$:

$$\text{أما } \bar{1} \in \mathbb{Z}_7^* \text{ ليس مولداً لهذه الزمرة لأنه: } 0(\mathbb{Z}_7^*) = 6 \neq 1 \quad (7)$$

كذلك $\bar{2} \in \mathbb{Z}_7^*$ ليس مولداً لهذه الزمرة لأنه:

$$\bar{2}^2 = \bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{4}, \bar{2}^3 = \bar{2} \otimes \bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{8} = \bar{1} \Rightarrow 0(\bar{2}) = 3 \neq 0(\mathbb{Z}_7^*) = 6$$

أيضاً فإن $\bar{4} \in \mathbb{Z}_7^*$ ليس مولداً لأنه:

$$\bar{4}^2 = \bar{4} \otimes \bar{4} = \bar{2}, \bar{4}^3 = \bar{4} \otimes \bar{4} \otimes \bar{4} = \bar{64} = \bar{1} \Rightarrow 0(\bar{4}) = 3 \neq 0(\mathbb{Z}_7^*) = 6$$

$$(4) = 3 \neq 0(\mathbb{Z}_7^*) = 6$$

ولذلك فإن $\bar{6} \in \mathbb{Z}_7^*$ ليس مولداً لهذه الزمرة لأنه:

$$\bar{6}^2 = \bar{6} \otimes \bar{6} = \bar{36} = \bar{1} \Rightarrow 0(\bar{6}) = 2 \neq 0(\mathbb{Z}_7^*) = 6 \quad (8)$$

وبالتالي العنصر $\bar{5}$ هو مولد لهذه الزمرة:

[4]

بينما $\bar{3} \in \bar{Z}_7^*$ مولدًا لهذه الزمرة لأن: $\bar{3}^1 = \bar{3}, \bar{3}^2 = \bar{2}, \bar{3}^3 = \bar{6}, \bar{3}^4 = \bar{4}, \bar{3}^5 = \bar{5}, \bar{3}^6 = \bar{1} \Rightarrow$ (2)

$$O(\bar{3}) = 6 = O(\bar{Z}_7^*)$$

كذلك فإن $\bar{5} \in \bar{Z}_7^*$ مولدًا لهذه الزمرة لأن:

$$\bar{5}^1 = \bar{5}, \bar{5}^2 = \bar{4}, \bar{5}^3 = \bar{6}, \bar{5}^4 = \bar{2}, \bar{5}^5 = \bar{3}, \bar{5}^6 = \bar{1} \Rightarrow$$
 (2)

$$O(\bar{5}) = 6 = O(\bar{Z}_7^*)$$

إذا مولدات الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ هي: $\{\bar{3}, \bar{5}\}$ (2)

الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ زمرة دورية لأن:

$$O(\bar{3}) = 6 = O(\bar{Z}_7^*)$$
 (1)

$$\bar{Z}_7^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\} = \{\bar{3}^1, \bar{3}^2, \bar{3}^3, \bar{3}^4, \bar{3}^5, \bar{3}^6\}$$

وبالتالي الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ دورية مولدها العنصر $\bar{3}$

الطلب الثالث: إثبات $O(\bar{4}) = 3$ لأن:

$$\bar{4}^3 = \bar{4} \otimes \bar{4} \otimes \bar{4} = \bar{64} = \bar{1}$$

حيث $\bar{4}$ العنصر البادئ في الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$

$$\bar{4}^{-1} = \bar{2} \quad \text{وكذلك فإن} \quad \bar{4} \otimes \bar{2} = \bar{8} = \bar{1}$$

$$\text{وبالتالي:} \quad O(\bar{4}) = O(\bar{2}) = 3 \quad (1)$$

$$\bar{2}^3 = \bar{2} \otimes \bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{8} = \bar{1}$$

ملاحظة: جميع القاسمات الواردة في سلم التمهيد لها أكثر من طريقة رياضية للحل ولجميعها تأخذ نفس الخدمة المتمثلة في سلم التمهيد

طرابلس في 6/8/2019

عبد الحليم الطعور: د. عائشة هاشم

عبد المبرك: د. عائشة هاشم

السؤال الأول: (20 درجة)

لتكن S علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $R \times R$ بالشكل التالي:
 $(a,b)S(c,d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \quad \forall (a,b), (c,d) \in R \times R$
أثبت أن S علاقة تكافؤ على $R \times R$ ، ثم أوجد صفتي تكافؤ العنصرين $(\frac{5}{6}, -3)$ و $(8,8)$.

السؤال الثاني: (25 درجة)

لتكن $(G, *)$ و $(H, \perp)$ زميرتين ما، ونعرف على مجموعة الجداء الديكارتي:
 $G \times H = \{(g, h) : g \in G \text{ و } h \in H\}$
بالشكل التالي:
 $(g_1, h_1) \Delta (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \perp h_2) \quad \forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$
والمطلوب:

1. برهن أن: $(G \times H, \Delta)$ زمرة.
2. أوجد عدد عناصر الزمرة $(G \times H, \Delta)$ ، إذا كان $|G| = n$ و $|H| = m$.
3. ما هو الشرط اللازم والكافي حتى تكون الزمرة $(G \times H, \Delta)$ تبديلية.

السؤال الثالث: (20 درجة)

أولاً: أوجد الزمرة الجزئية من الزمرة $(\mathbb{Z}_{20}, \oplus)$ المولدة بالعنصر 25، ثم أوجد رتبة هذا العنصر.

ثانياً: لتكن $(Q^*, \cdot)$ زمرة، حيث $(\cdot)$ عملية الضرب العادية، وليكن التطبيق:

$$f: Q^* \rightarrow Q^* \text{ معرف بالشكل: } f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in Q^* \text{ والمطلوب:}$$

1. أثبت أن التطبيق f هو مورفيزم للزمرة $(Q^*, \cdot)$ في نفسها.

2. أوجد $\ker f$.

السؤال الرابع: (25 درجة)

إذا كانت $(S_3, \circ)$ زمرة التباديل للمجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ وكانت $(H, \circ)$ زمرة جزئية من الزمرة S_3 ، حيث

$$H = \{x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$$

1. اذكر الشرط الذي يجب أن يحققه النظام الجبري $(S_3/H, \circ)$ حتى يكون زمرة قسمة، ثم

برهن هذا الشرط.

2. أوجد جميع عناصر زمرة القسمة S_3/H ، ثم أثبت أن هذه الزمرة دورية.

3. أوجد $(S_3 : H)$.

***** انتهى الإجابة *****

مع تلميذاتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس 2019/1/21

علم التجميع طارة النين الجبرية (11)

نظمت سبيل للفصل الثالث

للعام الدراسي 2018-2019

السؤال الأول (20 درجة)

لتكن S علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $R \times R$ بالشكل التالي:

$(a, b) S (c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 ; \forall (a, b), (c, d) \in R \times R$
 علاقة تكافؤ على $R \times R$ ثم أوجد جميع تكافؤ العنصرين $(\frac{5}{6}, -3)$ و $(8, 8)$

الحل: أولاً: S علاقة تكافؤ على $R \times R$:أ: S علاقة انعكاسية لأنه:

$$\forall (a, b) \in R \times R : a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a, b) S (a, b) \quad (4)$$

$$\forall (a, b), (c, d) \in R \times R : (a, b) S (c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Leftrightarrow c^2 + d^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (c, d) S (a, b) \quad (5)$$

ب: S متعدية لأنه:

$$\forall (a, b), (c, d), (f, g) \in R \times R : ((a, b) S (c, d)) \wedge ((c, d) S (f, g)) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 = c^2 + d^2) \wedge (c^2 + d^2 = f^2 + g^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = f^2 + g^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = f^2 + g^2 \Leftrightarrow (a, b) S (f, g) \quad (6)$$

ج: انعكاسية ومتعدية وبالتالي S علاقة تكافؤ على $R \times R$
 ثانياً: إيجاد جميع تكافؤ العنصرين $(\frac{5}{6}, -3)$ و $(8, 8)$.

$$\overline{(a, b)} = \{(c, d) \in R \times R ; (a, b) S (c, d)\} = \{(c, d) \in R \times R ; a^2 + b^2 = c^2 + d^2\} \quad (7)$$

$$\overline{(\frac{5}{6}, -3)} = \{(c, d) \in R \times R ; (\frac{5}{6})^2 + (-3)^2 = c^2 + d^2\}$$

$$= \{(\frac{5}{6}, -3), (\frac{5}{6}, 3), (-\frac{5}{6}, -3), (-\frac{5}{6}, 3), (3, \frac{5}{6}), (3, -\frac{5}{6}), (-3, -\frac{5}{6}), (-3, \frac{5}{6}) \} \quad (8)$$

$$\overline{(8, 8)} = \{(c, d) \in R \times R ; (8)^2 + (8)^2 = c^2 + d^2\} = \{(8, 8), (-8, -8), (-8, 8), (8, -8)\} \quad (9)$$

لتكن $(G, *)$ و $(H, \perp)$ زمينتين ولنفرض على مجموعة الجدار الديكارتي :

$$G \times H = \{(g, h) : g \in G \text{ و } h \in H\}$$

$$(g_1, h_1) \Delta (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \perp h_2) ; \forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$$

و المطلوب : أ، برهن أن $(G \times H, \Delta)$ زمرة. ب، أوجد عدد عناصر الزمرة $(G \times H, \Delta)$

إذا كانت $|G| = n$ و $|H| = m$ ، فالهوالترتيب اللازم والطيف من تكون الزمرة $(G \times H, \Delta)$ بتدليعية .

الحل : الخط الأول : $(G \times H, \Delta)$ زمرة :

أ، برهن أن $G \times H \neq \emptyset$ لأن $G \neq \emptyset$ و $H \neq \emptyset$ (بافتراض أن G و H زمينتان من المفروض)

ب، مغلقة على عناصر $G \times H$ لأنه :

$$\forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H : (g_1, h_1) \Delta (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \perp h_2) \in G \times H$$

(3)

ب، تجسسية على عناصر $G \times H$ لأنه :

$$\forall (g_1, h_1), (g_2, h_2), (g_3, h_3) \in G \times H :$$

$$\begin{aligned} & ((g_1, h_1) \Delta (g_2, h_2)) \Delta (g_3, h_3) = (g_1 * g_2, h_1 \perp h_2) \Delta (g_3, h_3) \\ & = ((g_1 * g_2) * g_3, (h_1 \perp h_2) \perp h_3) = (g_1 * (g_2 * g_3), h_1 \perp (h_2 \perp h_3)) \\ & = (g_1, h_1) \Delta (g_2 * g_3, h_2 \perp h_3) = (g_1, h_1) \Delta ((g_2, h_2) \Delta (g_3, h_3)) \end{aligned}$$

ب، وجود العنصر المحايد في $G \times H$ بالتدليعية Δ :

بدون أن e_1 هو العنصر المحايد في الزمرة $(G, *)$ و e_2 هو العنصر المحايد في الزمرة $(H, \perp)$ فإن العنصر (e_1, e_2) هو العنصر المحايد في $G \times H$ بالتدليعية Δ لأنه من جهة أولى فإن :

$$(e_1, e_2) \Delta (g, h) = (e_1 * g, e_2 \perp h) = (g, h)$$

$$(g, h) \Delta (e_1, e_2) = (g * e_1, h \perp e_2) = (g, h)$$

(2)

ب، وجود العنصر النظير : من أجل أي عنصر $(g, h) \in G \times H$ فإن العنصر :

$$(g^{-1}, h^{-1}) \Delta (g, h) = (g^{-1} * g, h^{-1} \perp h) = (e_1, e_2)$$

و h^{-1} هو نظير العنصر h في H بالتدليعية $\perp$ هو نظير العنصر (g, h) في $G \times H$ بالتدليعية Δ لأنه من جهة أخرى فإن :

$$(g, h) \Delta (g^{-1}, h^{-1}) = (g * g^{-1}, h \perp h^{-1}) = (e_1, e_2)$$

من جهة ثانية عليك : $(g, h) \Delta (g^{-1}, h^{-1}) = (g * g^{-1}, h \perp h^{-1}) = (e_1, e_2)$ (2)
 $(g^{-1}, h^{-1}) \Delta (g, h) = (g^{-1} * g, h^{-1} \perp h) = (e_1, e_2)$
 من (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نجد أن $(G \times H, \Delta)$ زمرة.

الطلب الثاني : عدد عناصر الزمرة $G \times H$ هو : $|G \times H| = n.m$ (4)
 الطلب الثالث : الشرط اللازم والعكفي من كونه الزمرة $(G \times H, \Delta)$ تبعية لخاصية التماثل
 تكون كلتا الزمرتين $(G, *)$ و $(H, \perp)$ تبديليتين (2)

$$(g_1 * g_2, h_1 \perp h_2) = (g_2 * g_1, h_2 \perp h_1) \Leftrightarrow (g_1, h_1) \Delta (g_2, h_2) = (g_2, h_2) \Delta (g_1, h_1)$$

سؤال الثالث : (20 درجة)

أولاً : أوجد الزمرة الجزئية من الزمرة $(\mathbb{Z}_{30}, +)$ المولدة بالعنصر 25 في $\mathbb{Z}_{30}$ أريد رتبة هذا العنصر
 ثانياً : لكن $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ زمرة حيث $\cdot$ عملية الضرب العادية و $\mathbb{Q}^*$ هو مجموعة الأعداد العقلية :

1) أجب أ ه التطبيق $f: \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$ معرف بالنظام : $f(x) = |x|$ $\forall x \in \mathbb{Q}^*$: المطلوب :
 اكتب أولئك ، لكنك عاين الزمرة $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ هو صورتي زمرة لآلة (2) أجب $\ker f$

ولدينا الزمرة الجزئية $(\mathbb{Z}_{25})$ من الزمرة $(\mathbb{Z}_{30}, +)$ مع العلم أن العنصر المحايد في الزمرة هو 0

نفس قدر العنصر 25 من أجل الوصول لرتبته حسب : $0(25) = 0(125) : 0(25) = 0$
 $2 \cdot 25 = 25 + 25 = 50 = 20 \neq 0$, $3 \cdot 25 = 25 + 25 + 25 = 75 = 15 \neq 0$
 $5 \cdot 25 = 125 = 5 \neq 0$, $6 \cdot 25 = 150 = 0 \Rightarrow$

$$0(25) = 6 = 0(125) \quad (3)$$

ويكون لدينا :

$$(\mathbb{Z}_{25}) = \{25, 20, 15, 10, 5, 0\} \quad (2)$$

ثانياً : 1) هو صورتي زمرة لآلة $f: \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$ معرف بالنظام : $f(x, y) = |x| \cdot |y| = |x| \cdot |y| = f(x) \cdot f(y)$ (3)
 2) اتمام $\ker f$

$$\ker f = \{x \in \mathbb{Q}^* : f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{Q}^* : |x| = 1\} = \{1, -1\} \quad (1)$$

السؤال الرابع : (25 درجة)

إذا كانت $(H, \circ)$ زمرة التباديل للجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ ، طالت $(H, \circ)$

زمرة جزئية من الزمرة S_3 كحسب :
 $H = \{x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$

و المطلوب :

أفكر الشرط الذي يجب أن يحققه النظام الجبري $(S_3/H, 0)$ حتى يكون
نمرة قسمة $\mathbb{Z}$ بـ H لهذا الشرط .

أوجد جميع عناصر زمرة القسمة H/S_3 برسمها على هذه الزمرة دورية.
 أوجد (S_3, H) .

الطلب الأول: الشرط هو أن تكون الزمرة H ثابتة على الزمرة S_3 .

ولفتنا أن الزمرة الجبرية H ناهية في K يجب أن نبرهن الشرط الثاني:

و لكي حصل ذلك لنكتب عناصر الزمرة $\leq_3$: $x_i \in \leq_3$: $x_i \circ H \circ x_i^{-1} = H$ $i = 1, 2, \dots, 6$

$$S_3 = \{x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\};$$

$$x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \}$$

الذرات H, H_2, H_3 مع H والذرات H_2, H_3

100% H C 2)

② $x_i \circ H \circ x_i^{-1} = H$; $i = 1, 2, 3$

$x_4 \in S_3$ در مثال ۱
 $x_4 \circ H x_4^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} = +1$$

$$\text{Or } \chi_5 \circ H \circ \chi_5^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} = H$$

$\chi_6 \circ \psi \circ \chi_6^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} = H$$

صاحب السيف محمد بن عبد الله

$$\forall x_i \in S_3: x_i \circ H \circ x_i^{-1} = H; i=1, 2, \dots, 6$$

عصفق وبالتالي الزرة المزججة (H, σ) ناظية في W .

$$G_3/H = \{x_i \circ H; x_i \in S_3\} \quad (2)$$

الآن من أجل $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in H$ حيث $x_1 \in H$ حيث

$$x_{10} H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$



5

من أجل $s_4 \in S_3$ حيث $s_4 \notin H$ نجد أن:

$$\kappa_4 \circ H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{ \kappa_4, \kappa_6, \kappa_5 \}$$

$$\kappa_{10} \circ H \cup \kappa_4 \circ H = S_3 \quad \text{و} \quad \kappa_{10} \circ H \cap \kappa_4 \circ H = \emptyset$$

$$S_3/H = \{ \kappa_{10} \circ H, \kappa_4 \circ H \}$$

كذلك فإن رتبة القسمة $(S_3/H, \circ)$ مرة دورية مولدة بالعنصر $\kappa_4 \circ H$ أي أن $S_3/H = \langle \kappa_4 \circ H \rangle$ وذلك لأنه ببساطة القوى الطولية للعنصر $\kappa_4 \circ H$ هي $(\kappa_4 \circ H)^2 = (\kappa_4 \circ H) \circ (\kappa_4 \circ H) = (\kappa_4 \circ \kappa_4) \circ H = \kappa_{10} \circ H$ (حيث κ_{10} العنصر المحايد في الرتبة S_3/H)

$$(\kappa_4 \circ H)^3 = \kappa_4 \circ H \wedge (\kappa_4 \circ H)^2 = (\kappa_4 \circ H) \circ (\kappa_4 \circ H) = (\kappa_4 \circ \kappa_4) \circ H = \kappa_{10} \circ H$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ H = \kappa_{10} \circ H$$

$$O(S_3/H) = O(\kappa_4 \circ H) = 2$$

$$\text{Card } M_L = 2 \quad \text{و} \quad S_3/H = M_L$$

$$|S_3/H| = \text{Card } M_L = 2$$

ملاحظة: جميع الأُسُس الواردة في سلم التجميع لها أكثر من طريقة، يا صبيحة الحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المنهجية لا في سلم التجميع.

طرق من $1/a$ إلى $19/c$

مدرسة الطهر: و. عائرة صابحة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
المدة : ساعتان
امتحان الفصل الثاني
السنة الثانية - رياضيات
الدرجة العظمى : 90 درجة
المادة : البنى الجبرية (1)
اسم الطالب : ميسر إبراهيم

(15) السؤال الأول : (15 درجة)

لقول عن علاقة R المعرفة على المجموعة غير الخالية X أنها دائرية فيما إذا حققت:
 $xRy \wedge yRz \Rightarrow zRx \quad \forall x, y, z \in X$
برهن أنه إذا كانت R علاقة انعكاسية دائرية
فإنها تكون علاقة تكافؤ وبالعكس كل علاقة تكافؤ هي علاقة دائرية.

(20) السؤال الثاني : (20 درجة)

لنأخذ S_8 في التباديل $\alpha = (1 \ 3)(2 \ 7)(4 \ 5 \ 6)(8)$ ، $\beta = (1 \ 2 \ 3 \ 7)(6 \ 4 \ 8 \ 5)$
1- عرف كلا من S_8 والدور 2- اكتب $\alpha \circ \beta$.
والمطلوب :

(10) السؤال الثالث : (10 درجات)

أوجد رتبة العنصر (1) في الزمرة $(\mathbb{Z}_6, +)$ ثم أثبت أن أي عنصر مختلف عن الصفر في هذه
الزمرة يملك رتبة لانهاية.

(25) السؤال الرابع : (15 درجة)

لنكن $R_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \wedge (a.d - b.c) \neq 0 \right\}$ حيث $(R_{2 \times 2}, \times)$ زمرة و $(\times)$ هي
عملية ضرب المصفوفات أثبت أن مجموعة العناصر $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in R \right\}$ تشكل زمرة
جزئية من الزمرة $(R_{2 \times 2}, \times)$.

(20) السؤال الخامس : (20 درجة)

برهن أن $(G, +)$ زمرة تبديلية. $G = \{x + y\sqrt{3} + z\sqrt{9} : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$

***** انتهى الأسئلة *****

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة



طرطوس 3 / 1 / 2018

اسم الطالب: طاعة النين المبرية ١١
لطلاب سبيل الفضل الثاني العام الدراسي ٢٠١٢ - ٢٠١٨

السؤال الأول (١٥ درجة)

نقول عن علاقة R المبنية على المجموعة X بأنها دائرية فيما إذا حققت:

$$x \in X, y, z \in X \Rightarrow x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$$

والتي هنا تكون علاقة تكافؤ وبالعكس كل علاقة تكافؤ هي علاقة دائرية.

المطلوب: أثبت أن الطلب R علاقة تكافؤ.

$$x R x \quad \forall x \in X \quad \text{حيث } x R x$$

١) انعكاسية: من الواضح أن $x R x$ حيث $x \in X$.

$$x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z \quad \forall x, y, z \in X$$

٢) انتقالية: من المطلوب R علاقة تكافؤ وبالتالي إذا كان لدينا:

$$x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z \quad \forall x, y, z \in X$$

لأن R علاقة تكافؤ. لأن R علاقة دائرية.

٣) ما سبقه بأن R علاقة تكافؤ.

٤) بالعكس: المطلوب R علاقة دائرية.

بأن R علاقة تكافؤ هنا تكون انعكاسية، انتقالية، ومسدية أي أن:

$$x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z \quad \forall x, y, z \in X$$

لأن R علاقة تكافؤ. لأن R مسدية.

السؤال الثاني: (20 درجة)

المطلوب: S التبديلي:

$$\alpha = (13)(27)(456)(8)$$

$$\beta = (1237)(6485)$$

ج - اكتب $\alpha \circ \beta$

١) ما هي دورة التباديل للعبوة المتبقية $\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ ونوعها

٢) ما هي دورة التباديل α من S له طول:

$$\alpha = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8)$$

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)$$

السؤال الثالث: ما هي دورة التباديل α من S له طول:

١) ما هي دورة التباديل α من S له طول:

2

نفس العنصر بعد تطبيقه عددًا من المرات عند التالي.

$$\alpha \circ \beta = (13)(27)(456)(8)(1237)(6485) \\ = (1732)(4865)$$

السؤال الثالث: (10 درجات)

أوجد رتبة العنصر (1) في الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ ثم أثبت أن أي عنصر مختلف عن العنصر (0) هذه الزمرة يمتلك رتبة لانهائية.

الحل: $1 \in \mathbb{Z}$ ونعلم أن رتبة العنصر (1) هي أصغر عدد طبيعي n يحقق $n \cdot 1 = 0$.
ولكن في الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ فإن $n \cdot 1 \neq 0$ وبالتالي لا يوجد عدد طبيعي n يحقق
الخاصة السابقة وبالتالي رتبة العنصر (1) لانهائية.

وكذلك إذا كان $t \in \mathbb{Z}$ حيث $t \neq 0$ العنصر هو العنصر المحايد في الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ فإن له رتبة محدودة لأنه لا يوجد عدد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث يكون $n \cdot t = 0$ إلا العنصر نفسه.

السؤال الرابع: (25 درجات)

لتكن $R_{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \cdot d - b \cdot c \neq 0 \right\}$ حيث $(R_{2 \times 2}, \cdot)$ زمرة
و (X) هي عملية ضرب المصفوفات. أثبت أن مجموعة العناصر

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$$

التي $(H, \cdot)$ هي زمرة فرعية من الزمرة $(R_{2 \times 2}, \cdot)$ هي مجموعة جزئية من المجموعة $R_{2 \times 2}$ حيث $H \neq \emptyset$ أي $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$ ومجموعة أخرى فإن H هي مجموعة جزئية من المجموعة $R_{2 \times 2}$.

$$H \neq \emptyset \text{ أي } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H \text{ ومجموعة أخرى فإن } H \text{ هي مجموعة جزئية من المجموعة } R_{2 \times 2}$$

$$\forall A, B \in H \text{ حيث } A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H \text{ و } a+b \in \mathbb{R}$$

وبالتالي فإن $(H, \cdot)$ زمرة فرعية من الزمرة $(R_{2 \times 2}, \cdot)$ (3)

السؤال الخامس: (20 درجة)

برهن أن: $G = \{ x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9} : x, y, z \in \mathbb{Q} \}$ زمرة تبديلية.

الحل: أ. في الواقع أن $G \neq \emptyset$

ب. (+) مغلقة لأنه:

$$\forall x', x'' \in G, x' = x_1 + y_1\sqrt[3]{3} + z_1\sqrt[3]{9} \\ x'' = x_2 + y_2\sqrt[3]{3} + z_2\sqrt[3]{9}$$

$$x' + x'' = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt[3]{3} + (z_1 + z_2)\sqrt[3]{9} \in G$$

$$(x_1 + x_2) \in \mathbb{Q} + (y_1 + y_2) \in \mathbb{Q} + (z_1 + z_2) \in \mathbb{Q}$$

3

8: العملية (+) جمعية على عناصر G لأنه:

5

$$x' = x_1 + y_1 \sqrt[3]{3} + z_1 \sqrt[3]{9}; x'' = x_2 + y_2 \sqrt[3]{3} + z_2 \sqrt[3]{9}; x''' = x_3 + y_3 \sqrt[3]{3} + z_3 \sqrt[3]{9}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Q}$$

بيان:

$$(x' + x'') + x''' = [(x_1 + y_1 \sqrt[3]{3} + z_1 \sqrt[3]{9}) + (x_2 + y_2 \sqrt[3]{3} + z_2 \sqrt[3]{9})] + (x_3 + y_3 \sqrt[3]{3} + z_3 \sqrt[3]{9})$$

$$= [(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \sqrt[3]{3} + (z_1 + z_2) \sqrt[3]{9}] + (x_3 + y_3 \sqrt[3]{3} + z_3 \sqrt[3]{9})$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) \sqrt[3]{3} + (z_1 + z_2 + z_3) \sqrt[3]{9}$$

$$= (x_1 + y_1 \sqrt[3]{3} + z_1 \sqrt[3]{9}) + [(x_2 + y_2 \sqrt[3]{3} + z_2 \sqrt[3]{9}) + (x_3 + y_3 \sqrt[3]{3} + z_3 \sqrt[3]{9})]$$

$$= (x_1 + y_1 \sqrt[3]{3} + z_1 \sqrt[3]{9}) + (x_2 + x_3 + y_2 \sqrt[3]{3} + y_3 \sqrt[3]{3} + z_2 \sqrt[3]{9} + z_3 \sqrt[3]{9})$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) \sqrt[3]{3} + (z_1 + z_2 + z_3) \sqrt[3]{9}$$

بيان:

$$(x' + x'') + x''' = x' + (x'' + x'''); \forall x', x'', x''' \in G$$

وبالتالي العملية (+) جمعية على عناصر G.

9: العملية (+) تبديلية على عناصر G لأنه:

3

$$\forall x', x'' \in G; x' = x_1 + y_1 \sqrt[3]{3} + z_1 \sqrt[3]{9}; x'' = x_2 + y_2 \sqrt[3]{3} + z_2 \sqrt[3]{9}$$

$$x' + x'' = (x_1 + y_1 \sqrt[3]{3} + z_1 \sqrt[3]{9}) + (x_2 + y_2 \sqrt[3]{3} + z_2 \sqrt[3]{9})$$

$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \sqrt[3]{3} + (z_1 + z_2) \sqrt[3]{9}$$

$$= (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1) \sqrt[3]{3} + (z_2 + z_1) \sqrt[3]{9}$$

$$= (x_2 + y_2 \sqrt[3]{3} + z_2 \sqrt[3]{9}) + (x_1 + y_1 \sqrt[3]{3} + z_1 \sqrt[3]{9}) = x'' + x'$$

حيث:

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Q}$$

10: إن العنصر 0 هو العنصر المحايد و $0 \in G$ و $0 = 0 + 0 \sqrt[3]{3} + 0 \sqrt[3]{9}$

11: في G بالنسبة العملية (+) العنصر المحايد هو 0 و $0 \in G$ و $0 = 0 + 0 \sqrt[3]{3} + 0 \sqrt[3]{9}$

$$x' + 0 = (x + y \sqrt[3]{3} + z \sqrt[3]{9}) + (0 + 0 \sqrt[3]{3} + 0 \sqrt[3]{9}) =$$

$$(x + 0) + (y + 0) \sqrt[3]{3} + (z + 0) \sqrt[3]{9} = x + y \sqrt[3]{3} + z \sqrt[3]{9} = 0 + x' = x'$$

$$x, y, z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x' = x + y \sqrt[3]{3} + z \sqrt[3]{9} \quad \forall x' \in G$$

وبالتالي وجود العنصر المحايد:

$$\forall x' = x + y \sqrt[3]{3} + z \sqrt[3]{9} \in G$$

$$x^* = (-x') = -(x + y \sqrt[3]{3} + z \sqrt[3]{9})$$

$$= (-x) + (-y) \sqrt[3]{3} + (-z) \sqrt[3]{9} \in G; -x, -y, -z \in \mathbb{Q}$$

$$x' + x^* = x' + (-x') = (x + y \sqrt[3]{3} + z \sqrt[3]{9}) + (-x - y \sqrt[3]{3} - z \sqrt[3]{9})$$

$$= (x + (-x)) + (y + (-y)) \sqrt[3]{3} + (z + (-z)) \sqrt[3]{9} = 0 + 0 \sqrt[3]{3} + 0 \sqrt[3]{9} = 0 = x^* + x'$$

وبالتالي لكل $x' \in G$ يوجد العنصر $x^* \in G$ هو نظير العنصر x'

من (P) و (A) و (I) و (J) نجد أن

(1) مجموعة تبديلية.

(G, *)

ملحوظة: جميع الناريين الواردة في سلم التصحيح لها أُلزَمَ طريقة رياضية للحل
و جميعها تأخذ نفس العلامة المهمة لها في سلم التصحيح.

طرحوس في ٣ / ٧ / ١٨ - ٢٠١٨

مدرسة الطوار: د. عائشة صائغ

أفاق
العلماء