كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : العاشرة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

طريقة المؤثر العكسي.

حالات خاصة للطرف الثاني:

① $P(x)=e^{ax}$

$\varphi(D)y=P(x)$; $y_p=\frac{1}{\varphi(D)}P_x$

$y_p=\frac{1}{\varphi(D)}e^{ax}=\frac{1}{\varphi(a)}e^{ax}$

وهو شرط $\varphi(a)\neq 0$

(إذا لم يكن a جذر ; $\varphi(D)=0$)

ملاحظة:

إذا كانت a جذراً مكرراً k مرة:

$\varphi(D)=(D-a)^k H(D)$

$y_p=\frac{1}{\varphi(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^k}\cdot\frac{1}{H(D)}e^{ax}=\frac{1}{H(a)}e^{ax}\cdot\frac{1}{(D-a)^k}e^{ax}$ ← $H(a)\neq 0$ شرط

$=\frac{1}{H(a)}\cdot\frac{x^k}{k!}\cdot e^{ax}$

ملاحظة:

$(D-a)y=P(x)$ ... ① ; $y_p=\frac{1}{(D-a)}P(x)$ ... ②

عامل التكميل $\leftarrow M = e^{-\int dx}$

الحل الخاص: $\frac{1}{M}(C_1 + \int Mq)$

$\leftarrow$ الحل الخاص لـ ② هو

$e^{ax}\int e^{-ax} R(x)dx$

* y_p هو تأثير

$$\frac{1}{D-a} e^{ax} = e^{ax}\int e^{-ax} e^{ax} dx = e^{ax}\int dx = \frac{x^1}{1!} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{(D-a)^2} e^{ax} = \frac{1}{D-a}(xe^{ax}) = e^{ax}\int e^{-ax} \cdot x e^{ax} dx$$

$$= \int x e^{ax} dx = \frac{x^2}{2} e^{ax}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(D-a)^k} e^{ax} = \frac{x^k}{k!} e^{ax}$$

② الطرف الثاني تابع مثلثي:

$R(x) = \cos(ax+b)$ أو $\sin(ax+b)$

أو $A\cos(ax+b) + B\sin(ax+b)$

$$y_p = \frac{1}{\varphi(D^2)} \cos(ax+b) = \frac{\cos(ax+b)}{\varphi(-a^2)} \; ; \varphi(-a^2) \neq 0$$

ملاحظة: إذا كان $\pm ia$ جذراً للمعادلة المميزة $\varphi(D)=0$

أو إذا كان مؤثر كثير الحدود التفاضلي يحوي على أسس فردية بالنسبة لـ D عندها

نتخلص عن التوابع المثلثية بمساعدة أويلر:

$$\sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \; , \; \cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الخطوة الأولى لإيجاد حلّ المعادلة نطبق هذه الإجراءات حيث رتبها.

③. الطرف الثاني وكثير حدود من الدرجة n:

نرتب الطرف في $\varphi(D)$ هو عبارة عن كثير حدود D المتصاعدة أي

$$\varphi(D) = a_n + a_{n-1} + D + \dots + D^n$$

ونقوم بقسمة $\frac{1}{\varphi(D)}$ لنحصل على ناتج قسمة من الدرجة m وباقي قسمة أقل درجة فيه هي $m+1$

$$\frac{1}{\varphi(D)} = H(D) + \frac{R_1(D)}{\varphi(D)}$$

$$\frac{1}{\varphi(D)} P(x) = H(D)\, P(x)$$

إذا كان $a_n \neq 0$

أما إذا كان $a_n = 0$

$$\varphi(D) = a_{n-1} D + \dots + D^n = D(a_{n-1} + a_{n-2} D + \dots + D^{n-1})$$

$$\frac{1}{\varphi(D)} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{a_{n-1} + a_{n-2} D + \dots + D^{n-2}}$$

أمثلة:

مثال 1:

$$y^{(4)} + 4y'' = x^2 + x + 3.$$

حلّ المعادلة التفاضلية باستخدام طريقة المؤثر العكسي:

$$(D^4 + 4D^2)\, y = x^2 + x + 3$$

نوجد حلّ المعادلة المميزة.

$$D^4 + 4D^2 = 0 \Rightarrow m^4 + 4m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m^2 + 4) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$m_1 = m_2 = 0$

$m_3 = m_4 = \mp 2i$

$y_{h(x)} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$

$y_p = \frac{1}{4D^2 + D^4}(x^2 + x + 3) = \frac{1}{D^2}\left(\frac{1}{4 + D^2}\right)(x^2 + x + 3)$

نقسم قسمة اقليدية

$$\begin{array}{r|l} 4 + D^2 & 1 \\ \hline & \frac{1}{4} - \frac{1}{16}D^2 \\ \hline & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}D^2 \\ & -\frac{1}{4}D^2 \\ & -\frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{16}D^4 \\ & \frac{1}{16}D^4 \end{array}$$

$= \frac{1}{D^2}(1/4 - 1/16 D^2)(x^2 + x + 3)$

$= \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{D^2} - \frac{1}{16}\right)(x^2 + x + 3)$

بالكامل لـ $x^2 + x + 3$ مرتبة نجد:

$\frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2}\right) - \frac{1}{16}(x^2 + x + 3)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) = y_p$

$y_{(x)} = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال 2

$(D^2+9)y = \sin 2x$

$m^2+9=0 \Rightarrow m_1 = m_2 = \mp 3i$

$y_{h(x)} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$y_p = \frac{1}{D^2+9}(\sin 2x) = \frac{1}{-4+9}\sin 2x = \frac{1}{5}\sin 2x$

$y_{(x)} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{5}\sin 2x$

مثال 3

$(D^3-D^2)y = 2\cos x$

$m^3 - m^2 = 0$

$m^2(m-1)=0$

$m_1 = m_2 = 0, \quad m_3 = 1$

$y_{h(x)} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$

$y_p = 2\frac{1}{D^3-D^2}\cos x = 2\cdot\frac{1}{D^2}\cdot\frac{1(D+1)}{(D-1)(D+1)}\cos x$

$= \frac{2}{D^2}(D+1)\cdot\frac{1}{D^2-1}\cos x = 2(D+1)\cdot\frac{1}{(-1)(-1-1)}$

$= \boxed{-\sin x + \cos x = y_p}$

$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - \sin x + \cos x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال 4:

$(D^2+1)y = \cos x$

$m^2+1=0 \Rightarrow m_1 = m_2 = \mp i$

$y_{h(x)} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y_{p(x)} = \frac{1}{D^2+1}\cos x = \frac{1}{D^2+1}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(D-i)(D+i)}(e^{ix}+e^{-ix})$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{D-i}e^{ix} + \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{D+i}e^{-ix}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}xe^{ix} + \frac{1}{-2i}xe^{-ix}\right]$

$\frac{1}{2}\sin x = y_p = \frac{1}{2}x\sin x = y_p$

$y = y_h + y_p = c_1\cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}x\sin x.$

مثال 5:

$(D^2+2D-3)y = 42e^{4x}$

$m^2+2m-3=0$

$m_1 = 1,\ m_2 = -3$

$y_{h(x)} = c_1 e^x + c_2 e^{-3x},\quad y_p = \frac{42}{D^2+2D-3}e^{4x} = \frac{42}{21}e^{4x} = 2e^{4x}$

$y = y_{h(x)} + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + 2e^{4x}$

مثال 6:

$D^2(D-2)^3 y = 48e^{2x} \Rightarrow m^2(m-2)^3 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 0$

$m_3 = m_4 = m_5 = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2)e^{2x} = y_h$

$y_p = \frac{48}{(D-2)^3}\cdot\frac{1}{D^2}e^{2x} = \frac{48}{4}\cdot\frac{1}{(D-2)^3}e^{2x} = 12\cdot\frac{x^3}{3!}e^{2x} = 2x^3e^{2x}$

$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2)e^{2x} + 2x^3 e^{2x}.$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z