كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

اسئلة دوراة محلولة

تحليل رياضي ٣

A 2 Z1 LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الدراسي الثاني 2024-2025
السنة الثانية رياضيات المادة: تحليل3

الاسم:
الدرجة:100
المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أدرس تقارب أو تباعد السلاسل الآتية: (20 درجة)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n.\ln(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

السؤال الثاني: أوجد مجال ونصف قطر التقارب للمتسلسلتين: (20 درجات)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(x+1)^n}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n.3^n}$$

السؤال الثالث : (20 درجات)

لتكن لدينا المتتالية (f_n) من الدوال المعرفة على المجال $]\ 1\ ,+\infty\ [$ بالشكل :

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

1- أدرس التقارب النقطي لـ $f_n(x)$.
2- علل التقارب المنتظم على المجال ؟
3- عين دالة التقارب إن وجدت .

السؤال الرابع : أوجد منشور تايلور حول النقطة x=0 للدالة : (20 درجات)

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

ثم استنتج منشور الدالة:

$$g(x)=\arctan x$$

حتى الدرجة الرابعة .

السؤال الخامس : (20 درجات)

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $]\ -\pi\ ,\pi\ [$ وتمتد بشكل دوري على $\mathbb{R}$ بدور 2π ،حيث :

$$f(x)=\begin{cases}1 & : 0<x<\pi\\ -1 & : -\pi<x<0\end{cases}$$

1- أوجد منشور فوريه للدالة $f(x)$.
2- ناقش تقارب المنشور عند النقطة x=0 .

انتهت الأسئلة *التمنيات بالنجاح* *مدرس المقرر: د. آصف المحمد*

الخميس 2025/8/21

A to Z

سلم تصحيح مادة التحليل 3 السنة الثانية

السؤال الأول : تقارب : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$ (2ن)

سلسلة متناوبة نستخدم اختبار ليبنتز : لتكن $a_n = \frac{1}{n \ln(n+1)}$ متناقصة (ن)

ونهايتها 0 إذن هي متقاربة شرطيا. (ن)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (ن)

هي سلسلة متقاربة لأن $p = \frac{3}{2} > 1$ (ن)

السؤال الثاني : ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\, 3^n}$ (2ن)

نستخدم اختبار النسبة : $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$ نصف القطع (ن)

مجال التقارب : $|x-2| < 3 \Rightarrow x \in]-1, 5[$ (ن)

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+1)^n}{n^n}$

نستخدم اختبار : $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$ (ن) $\Rightarrow R = e \Rightarrow]-1-e, -1+e[$

مجال التقارب : السلسلة متقاربة (ن)

السؤال الثالث : (2ن)

① $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ (ن)

② $\sup_{x \in [0,+\infty[} |f_n(x)| = \max_x \left| \frac{n}{1+n^2x^2} \right|$ (ن)

نشتق ونجد القيمة العظمى عند $x = \frac{1}{n}$

$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$ تقارب منتظم (ن)

دالة التقارب $f(x) = 0$ (ن)

السؤال الرابع : (2ن)

① $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ (ن)

② حتى الرتبة الرابعة : $f(x) \simeq 1 - x^2 + x^4$ (ن)

بما أن : $g(x) = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ (ن)

حتى الرتبة الثالثة : $g(x) \simeq x - \frac{x^3}{3}$

السؤال الخامس : (2ن)

① متسلسلة فورييه : الدالة فردية إذا المتسلسلة جيبية فقط معاملات الجيب.

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ (ن)

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1-(-1)^n}{n} \Rightarrow b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & n \text{ فردي} \\ 0 & n \text{ زوجي} \end{cases}$ (ن)

تقارب المتسلسلة عند $x = 0$ نقطة انفصال نستخدم قاعدة التقارب : (ن)

$= \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$

انتهى السؤال الخامس

$f(x) = \sum \frac{4}{\pi n} \sin nx$: $n = 2n-1$ فردي $\Rightarrow f(x) = \sum \frac{4}{\pi x(2n-1)} \sin(2n-1)x$

$x_2 = g_1(x_1, y_1) = (0.1)(8.128)^2 + (0.1)(8.1312) + 8 = 15.419558$: (تتمة س 1 - ج)

$y_2 = g_2(x_1, y_1) = (0.1)(8.128) + (0.1)(8.128)(8.1312)^2 + 8 = 61.697131$

إجابة السؤال الثاني : (1 (11) 21

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 4$

$y'_0 = -2$, $y'_1 = 1$, $y'_2 = 8$

$$H_3(x) = \begin{cases} H_1(x) : x \in [0,1] \\ H_2(x) : x \in [1,2] \end{cases}$$

$$H_1(x) = \sum_{j=0}^{1} \delta_j(x) y_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) y'_j$$

$$= \delta_0(x) y_0 + \delta_1(x) y_1 + R_0(x) y'_0 + R_1(x) y'_1$$

$$= \delta_0(x) - 2R_0(x) + R_1(x) \quad : x \in [0,1]$$

بالتعويض بـ :

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x - x_0) L'_0(x_0)] L_0^2(x)$$

حيث : $L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = 1 - x \Rightarrow L'_0(x) = -1$, $L_0^2(x) = (1-x)^2$

بالتعويض بـ :

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x-0)(-1)](1-x)^2 = (1+2x)(1-x)^2$$

$$R_0(x) = (x - x_0) L_0^2(x) = x(1-x)^2$$

$$R_1(x) = (x - x_1) L_1^2(x) \quad : L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x \ , \ L_1(x) = x^2$$

$$R_1(x) = (x-1) x^2$$

$$H_1(x) = (1+2x)(1-x)^2 - 2x(1-x)^2 + (x-1)x^2 = x^3 - 2x + 1$$

$$H_2(x) = \sum_{j=1}^{2} \delta_j(x) y_i + \sum_{j=1}^{2} R_j(x) y'_j \ , \quad x \in [1,2]$$

$$= \delta_1(x) y_1 + \delta_2(x) y_2 + R_1(x) y'_1 + R_2(x) y'_2$$

$$= 4\delta_2(x) + R_1(x) + 8R_2(x)$$

$$\delta_2(x) = [1 - 2(x - x_2) L'_2(x_2)] L_2^2(x) \ ; \ L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = x - 1$$

$$L'_2(x) = 1 \ , \ L_2^2(x) = (x-1)^2$$

A to Z

سلم توزيع الدرجات لفرض تحليل عددي 2 سنة 4 إنشاء، غرب: c.c2 / c.c0

(12) ep> 24

إجابة السؤال الأول: (1 لتوجد أولاً:

$P_1(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x)$;

حيث $T_0 = 1$, $T_1 = x$; وبالتالي:

$P_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} w(x) f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2}{\pi} = 0.63662$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} T_1(x) w(x) f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} x\,dx = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0.63662$$

لتوجد كثيرة حدود تشيشيف التربيعية

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2 T_2(x)$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} T_2(x) w(x) f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} (2x^2 - 1)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-4}{3\pi} = -0.42441$$

$$P_2(x) = 0.63662 - 0.424413(2x^2 - 1) = 1.06103 - 0.848826x^2$$

(2 لنكتب المعادلتين بالصيغة (12)

$$x = 0.1x^2 + 0.1y^2 + 8 = g_1(x,y)$$

$$y = 0.1x + 0.1xy^2 + 8 = g_2(x,y)$$

لنثبت أن الطريقة متقاربة وأن الاختيار موفق:

$$\left\{\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0)\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\right\}^2 < 1$$

$$\left\{\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0)\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\right\}^2 < 1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0.2x \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x} = (0.2)(0.8) = 0.16,\ \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0.2y \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial y} = (0.2)(0.8) = 0.16$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = 0.1 + 0.1y^2 \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0.1 + (0.1)(0.8)^2 = 0.164,\ \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0.2xy = (0.2)(0.8)(0.8) = 0.128$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| = 0.16 + 0.16 = 0.32 < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| = 0.164 + 0.128 = 0.292 < 1$$

$$x_{n+1} = g_1(x_n, y_n) \Rightarrow x_1 = g_1(x_0,y_0) = 0.1(0.8)^2 + 0.1(0.8)^2 + 8 = 8.128$$

$$y_{n+1} = g_2(x_n, y_n) \Rightarrow y_1 = g_2(x_0,y_0) = 0.1(0.8) + 0.1(0.8)(0.8)^2 + 8 = 8.1312$$

تتمة إجابة السؤال الثالث : (2

(12)

$f_1(t,y,z) = (y+z) - \sin t$

$f_2(t,y,z) = (z-y) - \cos t$

$f_1'(t,y,z) = (y'+z') - \cos t = [(y+z) - \sin t] + [(z-y) - \cos t] - \cos t = 2z - 2\cos t - \sin t$

$f_2'(t,y,z) = (z'-y') + \sin t = [z-y-\cos t] - [y+z-\sin t] + \sin t = -2y + 2\sin t - \cos t$

لإيجاد الحل العددي نطبق طريقة تايلور :

$$y_{n+1} = y_n + h f_1(t_n, y_n, z_n) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_n, y_n, z_n) \Rightarrow$$

$$z_{n+1} = z_n + h f_2(t_n, y_n, z_n) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_n, y_n, z_n) \Rightarrow$$

$$y_1 = y_0 + h[y_0 + z_0 - \sin t_0] + \frac{h^2}{2}[2z_0 - 2\cos(t_0) - \sin t_0]$$

$$= 0 + 0.1[0 + 1 - \sin(0)] + \frac{0.01}{2}[(2)(1) - 2\cos(0) - \sin(0)] = 0.1$$

$$z_1 = z_0 + h[z_0 - y_0 - \cos t_0] + \frac{h^2}{2}[-2y_0 + 2\sin t_0 - \cos t_0]$$

$$= 1 + 0.1[1 - 0 - \cos(0)] + \frac{0.01}{2}[(-2)(0) + 2\sin(0) - \cos(0)] = 0.995$$

لحساب الخطأ المطلق في الحل العددي :

$$\delta(y_1) = |y_1 - y(t_1)| = |0.1 - \sin(0.1)| = |0.1 - 0.0998334| = 1.666 \times 10^{-4}$$

$$\delta(z_1) = |z_1 - z(t_1)| = |0.995 - \cos(0.1)| = 4.16528 \times 10^{-6}$$

تتمة س 3 : 1 الصيغة الثالثة :

$$d_3(x,h)=\frac{1}{2h^3}[f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)]$$

$$d_3(1,0.1)=\frac{1}{2(0.1)^3}[f(1.2)-2f(1.1)+2f(0.9)-f(0.8)]=5.00249$$

الخطأ بالتقطيع :

$$E_T(1,0.1)=\frac{(0.1)^2}{2}f^{(5)}(c):c\in[0.8,1.2]$$

$$f^{(5)}=\cos(x-1)\Rightarrow|\max_{x\in[0.8,1.2]}f^{(5)}(x)|=1$$

$$E_T=(1,0.1)=\frac{h^2}{2}=\frac{(0.1)^2}{2}=0.005=5\times10^{-3}$$

$$\delta_h=|5-5.00249|=0.00249=2.49\times10^{-3}$$

جواب السؤال الثالث : 1) لـ $N=3$ من أجل (13)

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{e^{2x}+1}=w_1f(t_1)+w_2f(t_2)+w_3f(t_3)$$

ص 25

نعيّن t_1,t_2,t_3 من كثيرة حدود ليجندر $L_3(t)$ بالصفر :

$$L_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t)=0$$

بالحل كمعادلة نجد :

$$t_1=-\sqrt{3/5},\ t_2=0,\ t_3=\sqrt{3/5}$$

وهي تمثل نقاط العقدة

أما الأوزان w_1,w_2,w_3 نحصل عليها من :

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\t_1&t_2&t_3\\t_1^2&t_2^2&t_3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2/3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\-\sqrt{3/5}&0&\sqrt{3/5}\\3/5&0&3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2/3\end{bmatrix}$$

$$w_1+w_2+w_3=2$$

$$-\sqrt{3/5}\,w_1+\sqrt{3/5}\,w_3=0$$

$$3/5\,w_1+3/5\,w_3=\frac{2}{3}$$

بحل جملة المعادلات الأخيرة بالتعويض نجد :

$$w_2=\frac{8}{9},\quad w_1=w_3=\frac{5}{9}$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{e^{2x}+1}=\frac{5}{9}f(-\sqrt{3/5})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\sqrt{3/5})$$

$$=\frac{5}{9}\left(\frac{1}{e^{-2\sqrt{3/5}}+1}\right)+\frac{8}{9}\left(\frac{1}{e^0+1}\right)+\frac{5}{9}\left(\frac{1}{e^{2\sqrt{3/5}}+1}\right)$$

$$=\frac{5}{9}(0.8247971)+\frac{8}{9}(0.5)+\frac{5}{9}(0.1752056)$$

$$=0.9999999$$

وحدة صالحة وربحة

A to Z

تتمة إجابة السؤال الثاني 1)

$$S_2(x) = [1 - 2(x-2)(1)](x-1)^2 = (5-2x)(x-1)^2$$

$$R_1(x) = (x-x_1)L_1^2(x), \quad L_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = 2-x \Rightarrow L_1^2(x) = (2-x)^2$$

$$R_1(x) = (x-1)(2-x)^2$$

$$R_2(x) = (x-x_2)L_2^2(x) \quad ; \quad L_2(x) = (x-1)$$

$$R_2(x) = (x-2)(x-1)^2$$

$$H_2(x) = 4(5-2x)(x-1)^2 + (x-1)(2-x)^2 + 8(x-2)(x-1)^2$$

$$H_2(x) = x^3 - x^2$$

$$H_3(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & ; \ x \in [0,1] \\ x^3 - x^2 & ; \ x \in [1,2] \end{cases}$$

(10)

إجابة السؤال الثاني : 2) الفرع الثاني :

$$d_2(1,h) = \frac{1}{h^2}[f(1+h) + f(1-h) - 2f(1)]$$

$$= \frac{1}{(0.1)^2}[\sin(1+0.1-1) + (1+0.1)^3 + \sin(1-0.1-1) + (1-0.1)^3 - 2\sin(1-1) + 1^3]$$

$$= 5.999$$

$$E(1,h) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) \ ; \ c \in [1-h, 1+h]$$

$$E(1,h) \leq -\frac{h^2}{12} M \ ; \ M = \max\{|f^{(4)}(1-h)|, |f^{(4)}(1+h)|\}$$

$$f(x) = \sin(x-1) + x^3 \Rightarrow f'(x) = \cos(x-1) + 3x^2, \ f''(x) = -\sin(x-1) + 6x$$

$$f'''(x) = -\cos(x-1) + 6, \ f^{(4)}(x) = \sin(x-1)$$

$$f^{(4)}(1-h) = \sin(-0.1) = -0.84147098, \ f^{(4)}(1+h) = \sin(0.1) = 0.0998334$$

$$E(1,h) \leq -\frac{(0.1)^2}{12}(0.84147098) = 0.00007012258$$

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الأول 2024-2025
السنة الثانية: رياضيات المادة: تحليل3

الاسم:
الدرجة:90
المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول : (30 درجة)

أدرس تقارب أو تباعد السلاسل الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\times 4\times 7\times \ldots\times(3n-2)}{3\times 6\times 9\times \ldots\times(3n)}\right]$$

السؤال الثاني : (20 درجة)

أوجد مجال ونصف قطر التقارب لكل من المتسلسلتين :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n.4^n.x^{n-1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n3^n}$$

السؤال الثالث : (20 درجة)

لتكن لدينا المتتالية (f_n) من الدوال المعرفة على المجال $[1\ ,\ +\infty[$ بالشكل :

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على المجال المذكور من دالة يطلب تعيينها.

السؤال الرابع : (10 درجات)

أدرس تقارب الجداء :

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$$

السؤال الخامس: (10 درجات)

لتكن f دالة دورية ودورها 2π معرفة على $\mathbb{R}$ ومساوية :

$$f(x)=x \quad : \quad]-\pi\ ,\pi[$$

أوجد منشور فوريه للدالة f .

انتهت الأسئلة .... التمنيات بالنجاح

مدرس المقرر: د. آصف المحمد

A to Z

الدورة العادية — ثانية رياضيات — فرض محروس في مادة الجبر — 3 سا
2025 - 2024

الفصل الأول :

السؤال الأول : 30

① $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ متقاربة

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{4^n \cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4\,n^n}{(n+1)^n} = \frac{4}{e} > 1$ متباعدة

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)}{3\times6\times\cdots\times 3n}$; $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^2 - 1\right) = \frac{12n^2+8n}{9n^2+6n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{12n^2+8n}{9n^2+6n+1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > 1$ متقاربة

السؤال الثاني : نضع $x-2 = y$ لنتقارب

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\,3^n} = \sum \frac{y^n}{n\,3^n}$: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\,3^n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = 3 \Rightarrow y \in]-3,3[$ 20

$\Rightarrow x \in]-1,5[$

عندما $x=-1$ نحصل على متقاربة
عندما $x=5$ نحصل على متباعدة

إذا مجال التقارب هو $]-1,5[$

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot 4^n \cdot x^{n-1}$;

$\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 4 \Rightarrow r = \frac{1}{4} \Rightarrow]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ مجال التقارب

السؤال الثالث : 20

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ دالة معرفة على $[1,+\infty[$ ، نتقارب بانتظام

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$: f الدالة المتقاربة معها $f(x)=0$

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx} < \frac{1}{n} \Rightarrow \sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} \to 0$ $n\to+\infty$

إذا المتتالية متقاربة بانتظام نحو $f(x)=0$

السؤال الرابع : 10

$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$: تقارب أم تباعد ؟

$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(2^2-1)(3^2-1)\cdots(n^2-1)}{2^2\cdot 3^2\cdots n^2}$

$= \frac{(n-1)!\,(n+1)!}{2\,(n!)^2} = \frac{1}{2}\frac{(n-1)!\,(n+1)}{n\,(n-1)!} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{2} \neq 0$

إذا السلسلة متباعدة.

السؤال الخامس : 10

نشور متسلسلة فورييه للدالة $f(x)=x$ على $]-\pi,\pi[$

الدالة فردية $\Leftarrow a_0 = a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}x\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos nx\,dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$

انتهى السلم

حظ أوفر

A to Z

جامعة طرطوس امتحان الدورة التكميلية 2023-2024 الاسم:
كلية العلوم السنة الثانية رياضيات المادة: تحليل3 الدرجة:90
قسم الرياضيات المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول : (20 درجة)

أدرس تقارب أو تباعد السلاسل الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

السؤال الثاني : أوجد مجال ونصف قطر التقارب لكل من المتسلسلتين : (20 درجات)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n.2^n.x^{n-1} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$$

السؤال الثالث : (20 درجات)

لتكن لدينا المتتالية (f_n) من الدوال المعرفة على المجال $[1\ ,\ +\infty[$ بالشكل :

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على المجال المذكور من دالة يطلب تعيينها

السؤال الرابع : (10 درجات)

أوجد منشور ماكلوران وفق متسلسلة قوى مولدة بالدالة:

$$f(x)=\ln(1+x)$$

السؤال الخامس: (20 درجات)

لتكن f دالة دورية ودورها 2π معرفة على $\mathbb{R}$ ومساوية :

$$f(x)=x \quad : \quad]-\pi\ ,\pi[$$

أوجد منشور فوريه للدالة f .

انتهت الأسئلة .... التمنيات بالنجاح في 2024/9/16 مدرس المقرر: د. آصف المهد

A to Z

سلم تصحيح تحليل 3 تكميلية الدورة 1

(1) متقاربة لسلسلة : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ (1ن)

(2ن) متقاربة.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{5^n \cdot n!} = \frac{5^{n+1}(n+1)n!\, n^n}{(n+1)(n+1)^n 5^n \cdot n!} = 5\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{5}{e} > 1$

متباعدة

(2) مجال وضعف تقارب :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$: $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 2} = \frac{1}{2}$; $d = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 2$

(2ن) عندما $x = -2$ نحصل على $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة ، $x = 2$ نحصل على $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة

مجال التقارب هو $[-2, 2[$.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot 2^n x^{n-1}$: $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 2 = d \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

مجال التقارب $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

(3) التقارب المنتظم.

(2ن) $f_n(x)$ متقاربة نقطيا نحو $f(x) = 0$ على $]1, +\infty[$

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx} < \frac{1}{n}$ ، $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

إذن التقارب منتظم على $]1, +\infty[$.

(4) منشور ماكلورن :

(1ن) $f(x) = \ln(1+x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

$f(x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$

(5) منشور فورييه :

(2ن) الدالة فردية : $a_0 = 0 \Leftarrow$

$a_n = 0$

$f(x) = x$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{n} x \cos nx\right)_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos nx\, dx\right]$

$= \frac{2}{\pi}\left(\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi - 0\right) + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\left(\sin nx\right)_0^{\pi}\right) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx$

A to Z

د. أوصيف محمد

انتهى السلم

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الدراسي الثاني 2023-2024
السنة الثانية رياضيات المادة: تحليل3

الاسم:
الدرجة:90
المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول : أدرس تقارب الجداء : (10 درجة)

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$$

السؤال الثاني: أدرس تقارب أو تباعد السلاسل الآتية: (20 درجة)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$$

السؤال الثالث: أوجد مجال ونصف قطر التقارب للسلسلة: (20 درجات)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-2)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$$

السؤال الرابع : (15 درجات)

لتكن لدينا المتتالية (f_n) من الدوال المعرفة على المجال $[\,0\ ,\ 1\,]$ بالشكل :

$$f_n(x)=\frac{ne^{-x}}{2n+x}$$

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على المجال المذكور من دالة يطلب تعيينها.

السؤال الخامس : أوجد منشور تايلور حول النقطة x=1 وفق متسلسلة قوى مولدة بالدالة: (10 درجات)

$$f(x)=\sin x$$

السؤال السادس : (15 درجات)

لتكن f دالة دورية ودورها π معرفة على $\mathbb{R}$ ومساوية :

$$f(x)=x \quad : \quad]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

أوجد منشور فوريه للدالة f .

انتهت الأسئلة .... التمنيات بالنجاح في 2024/7/17 مدرس المقرر: د. آصف المحمد

مكتبة A to Z

سلم تصحيح مادة تكامل 2 سنة ثانية رياضيات

تمرين 1 :

1- تقارب $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$: (10)

$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}$ (5)

$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{2}$ (5)

ومنه الجداء متقارب.

2- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3}$: (10)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{(n+1)^3}\times\frac{n^3}{2n+1}$ (5) $\Rightarrow \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2n^3}{2n^3} = 1$

$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim n\left(\frac{(n+1)^3(2n)}{(2n+1)^3(2n+1)}-1\right)$ (5) $= +\infty > 1$

(a_n) متقارنة

أو أي اختبار آخر يعطي النتيجة نفسها حيث يمكن

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$: (10)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ (5)

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1$ (5) متباعدة.

A to Z

تمرين 2 : (15)

$f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{x+n^2}$: لدينا

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{2} = f(x)$ (5)

ولدينا (f_n) متقاربة نقطيا على $[0,1]$ نحو f.

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}: \forall x\in[0,1], \forall n\geq N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| = \frac{x e^{-nx}}{(n+n^2)^2} \leq \frac{1}{n^3} < \varepsilon$ (5)

$n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ (5) ولدينا (f_n) متقاربة بانتظام نحو $f(x)=\frac{e^{-x}}{2}$

تمرين 3 : (20)

$\sum n!(x-2)^n$; $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim (n+1) = +\infty$ (5)

$r=0$ و $d=+\infty$ (5) $\Rightarrow$ السلسلة متباعدة إلا عندما $x=2$.

$\sum \frac{(x-1)^n}{n\,2^n}$. $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n\,2^n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 2} = \frac{1}{2}$ (5)

$r=2 \Rightarrow d=2$ (5) السلسلة متقاربة على $]-1,3[$

$-1 < x < 3 \Leftarrow -2 < x-1 < 2$ ، إذن تتقارب

عندما $x=-1$ تصبح $\sum \frac{(-2)^n}{n(2^n)} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة

عندما $x=3$ تصبح $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة $\Rightarrow$ مجال التقارب هو $[-1,3[$

تمرين 4 : (15)

نعتبر : $f(x) = x$ دورية دورها π ومعرفة على $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ بـ

$a_0 = a_n = 0$ (5)

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2nx\,dx$: $u=x \Rightarrow du=dx$

$dv=\sin 2nx\,dx \Rightarrow v=-\frac{1}{2n}\cos 2nx$ (5)

$= \frac{4}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{2n}x\cos 2nx\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2n}\cos 2nx\,dx\right] = \frac{4}{\pi}\left[\frac{-\pi}{4n}\cos n\pi - 0\right] = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin 2nx$ (5)

وأضعا ~~[illegible]~~ $\Leftarrow$ ~~[illegible]~~ -

السؤال كامل : متسلسلة تايلور حول $x=1$

$f(x)=\sin x$
$f'(x)=\cos x$
$f''(x)=-\sin x$
$f'''(x)=-\cos x$

$$f(x)=\sin x = f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \quad (5)$$
$$+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\cdots \quad (5)$$
$$=\sin 1+\frac{\cos 1}{1!}(x-1)-\frac{\sin 1}{2!}(x-1)^2+\cdots$$

انتهى بنجاح

(10)

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الدراسي الأول 2023-2024
السنة الثانية رياضيات المادة: تحليل3
المدة: ساعتان

الاسم:
الدرجة:90

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول : (20 درجة)

1- أثبت أن المتتالية $(\sqrt[n]{n})$ متقاربة من العدد 1 .

2- أثبت أن المتتالية : (u_n) متتالية كوشي حيث :

$$u_n = \frac{\sin 1}{3} + \frac{\sin 2}{3^2} + \cdots + \frac{\sin n}{3^n}$$

السؤال الثاني: (20 درجة)

أدرس تقارب أو تباعد المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \times 4 \times 7 \times \ldots \times (3n-2)}{3 \times 6 \times 9 \times \ldots \times (3n)}\right] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

السؤال الثالث: أدرس تقارب الجداء : (10 درجة)

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$$

السؤال الرابع : أدرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال : $(f_n(x))$ المعرفة على المجال [0 , 1] بالشكل : (20 درجة)

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{2n+x}$$

من دالة يطلب تعيينها . ثم أحسب النهاية :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{2n+x} dx$$

السؤال الخامس : أوجد نصف قطر تقارب ومجال التقارب ومجموع المتسلسلة : (10 درجات)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n.2^n.x^{n-1}$$

السؤال السادس : أوجد منشور فوريه للدالة f الدورية المعرفة بالشكل: (10 درجات)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : -3 < x < 0 \\ 2 & : 0 < x < 3 \end{cases}$$

انتهت الأسئلة .... التمنيات بالنجاح في 2024/1/22 مدرس المقرر: د. آصف المحمد

مكتبة A to Z

2024 - 2023 فرض الأول — سلم تصحيح مادة التحليل 3
د/ أمين أحمد — السنة الثانية رياضيات

السؤال الأول: [1] نأخذ $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \in]0, +\infty[$ ومنه $(1+x_n)^n = n$ (5)

$1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 + \dots + x_n^n = n \Rightarrow n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$ (20)

$x_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow 0 < x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (5)

$\left| x_{p+q} - x_p \right| = \left| \sum_{k=1}^{q} \frac{\sin(p+k)}{3^{p+k}} \right| \leq \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{3^{p+k}} = \frac{1}{3^p} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^p} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^q}{1 - \frac{1}{3}}$ (5) (2)

$< \frac{1}{2 \cdot 3^p} \left(1 - (\frac{1}{3})^q\right) < \frac{1}{2 \cdot 3^p} < \varepsilon \Rightarrow 3^p > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow p > \frac{-\ln 2\varepsilon}{\ln 3}$ (5)

ومنه يكفي أخذ $N_\varepsilon > \frac{-\ln 2\varepsilon}{\ln 3}$ حيث يتحقق شرط كوشي.

السؤال الثاني: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$ (5)

متقاربة (20)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n-2)}{3 \times 6 \times 9 \times \dots \times 3n}$: $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{(3n+3)^2}{(3n+1)^2} - 1\right]$ (5)

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{12n^2 + 8n}{9n^2 + 6n + 1} = \frac{4}{3} > 1$ (5) متقاربة

السؤال الثالث: تقارب الجداء: $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ (10)

$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(2^2-1)(3^2-1)\dots(n^2-1)}{2^2 \cdot 3^2 \dots \cdot n^2}$ (5)

$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\dots(n-1)(n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \dots \cdot n^2} = \frac{(n-1)!(n+1)!}{2 \cdot (n!)^2} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{2}$ (5) بالتالي متقاربة ونهايتها $\frac{1}{2}$

السؤال الرابع: المتتالية متقاربة نقطياً من الدالة $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{2} = f(x)$

$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\frac{n e^{-x}}{2n+x} - \frac{e^{-x}}{2}\right| = \frac{x}{4ne^x + xe^x} \leq \frac{1}{4n} < \varepsilon$ (5) (20)

ومنه متقاربة بانتظام في $[0,1]$ $\Leftarrow n > \frac{1}{4\varepsilon}$ يوجد عدد طبيعي $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right] + 1$ حيث $n > N_\varepsilon$

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n e^{-x}}{2n+x} = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{n e^{-x}}{2n+x} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ (5)

مكتبة A to Z

تصحيح تحليلي 3 . 2 . تصحيح السلم

السؤال الأول :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot 2^n \cdot x^{n-1}$$

(10)

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n \cdot 2^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \cdot 2 = 2 \times 1 = 2 = d^{-1}$$

$\Leftarrow$ نصف قطر التقارب هو $R = \frac{1}{d^{-1}} = \frac{1}{2}$ (5)

فإذا رمزنا بحرف $f(x)$ لمجموع المتسلسلة، فإن :

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot 2^n \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2x)^n$$

$$= -2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n = -2x \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$$ (3)

تكون متقاربة عندما $-1 < -2x < 1 \Leftarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ وحيث مجموعها

$$f(x) = -2x \frac{1}{1-(-2x)} = \frac{-2x}{1+2x} \quad \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$ (2)

$$\Rightarrow f'(x) = f'(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2} \quad \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$ (3)

السؤال الثاني : تابع دوري ودوره 6 .

$$2T = 6 \Rightarrow T = 3$$

(10)

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} 2\,dx\right) = \frac{1}{3}\left[2x\right]_0^3 = 2$$ (2)

$$a_n = \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0} 0 \cos\frac{n\pi}{3}x\,dx + \int_{0}^{3} 2\cos\frac{n\pi}{3}x\,dx\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{3}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{3}x\right]_0^3$$

$$= \frac{2}{3}[0] = 0$$ (3)

$$b_n = \frac{1}{3}\left(0 + \int_0^3 2\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx\right) = \frac{1}{3}\left[-\frac{6}{n\pi}\cos n\pi + 1\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$ (3)

n فردي : $\frac{2}{n\pi}(1+1) = \frac{4}{n\pi}$

n زوجي : 0

نضع $n = 2n-1$

$$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin\frac{(2n-1)\pi}{3}x$$ (2)

انتهى السلم

د. أبو الخير

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الدراسي الثاني للعام 2022-2023
السنة الثانية رياضيات المادة: تحليل3

الاسم:
الدرجة:90
المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول : (20 درجة)

أدرس تقارب التكاملات المعتلة الآتية :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{t}\right) dt \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$$

السؤال الثاني: (30 درجة)

أدرس تقارب أو تباعد السلاسل الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+2}{n^2+1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

السؤال الثالث: أوجد مجال ونصف قطر التقارب للسلسلة: (10 درجات)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$$

السؤال الرابع : (10 درجات)

لتكن لدينا المتتالية (f_n) من الدوال المعرفة على المجال $[\ 1\ ,\ +\infty\ [$ بالشكل :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على المجال المذكور من دالة يطلب تعيينها.

السؤال الخامس : أوجد منشور ماكلوران وفق متسلسلة قوى مولدة بالدالة: (10 درجات)

$$f(x) = \ln(1+x)$$

السؤال السادس : (10 درجات)

لتكن f دالة دورية ودورها 2π معرفة على $\mathbb{R}$ ومساوية :

$$f(x) = x \quad : \quad]-\pi\ ,\pi[$$

أوجد منشور فوريه للدالة f .

انتهت الأسئلة .... التمنيات بالنجاح في 2023/7/26

مدرس المقرر: د. آصف المحمد

A to Z

فرض تأليفي مادة التحليل 3 — سنة ثانية رياضيات — 2022-2023 — فصل ثاني — المدة: 1h30

السؤال الأول: (20)

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{t}\right) dt$$

بما أن: $\lim_{t\to 0} t^2\left(1-\cos\frac{2}{t}\right) = \lim_{t\to 0} t^2\left(2\sin^2\frac{1}{t}\right)$

$$= \lim_{t\to 0} 2\left(\frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right)^2 = 2 = K$$

حسب معيار التكامل: $\lambda = 2 > 1$، $k = 2$

فالتكامل متقارب

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \lim_{x\to+\infty} 2\int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{x\to+\infty} 2[\arctan t]_0^x = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

فالتكامل متقارب.

السؤال الثاني: (30)

① $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$

لدينا $\ln\frac{n^2+2}{n^2+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) \le \frac{1}{n^2+1}$

بما أن السلسلة $\sum \frac{1}{n^2+1}$ متقاربة فالسلسلة المعطاة متقاربة.

② $\sum \frac{1}{n^2+c^2}$ سلسلة متقاربة لأن $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة، لأن:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2+c^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 \neq 0$$

والسلسلة من طبيعة واحدة فالسلسلة الثانية متقاربة.

③ $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

نستعمل اختبار كوشي:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

حالة شك

وبتطبيق اختبار: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$

فالسلسلة متباعدة.

(لدينا الشرط اللازم لتقارب السلسلة هو أن نهاية حدها العام U_n تؤول إلى 0)

A to Z

مادة العلوم تحليل 2 رياضيات سنة ثانية

تمرين السؤال الثاني : (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{e^n . n!} = \frac{e^n . e\,(n+1)\,n!\,n^n}{(n+1)^n (n+1) e^n n!}$$

(5)

$$= \frac{e\,n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

(5)

ن متسلسلة متباعدة .

السؤال الثالث : (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,(2)^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\,2^n}\right|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$ (4)

$d = \frac{1}{2}$ ⇐ $r = 2$ نصف قطر التقارب .

عندما $x = -2$ فإن السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\,(2)^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

وهي سلسلة متباينة .

عندما $x = 2$ فإن السلسلة : (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ توافقية متباعدة

⇐ مجال التقارب $[-2, 2[$

السؤال الرابع : (10)

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

المتتالية $(f_n(x))$ متقاربة نقطيا من الدالة المعرفة بـ $f(x) = 0$ على $[1, +\infty[$

وبالتالي إذا كانت $x \in [1, +\infty[$ فإن :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx} < \frac{1}{n}$$ (5)

$$\Rightarrow \sup_{x \in [1,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

وبما أن $\frac{1}{n} \to 0$ عندما $n \to +\infty$ (5)

فإن التقارب المنتظم محقق على $[1, +\infty[$

A to Z

تمت بسلام قبل 3 :

السؤال الخامس : منشور ماكلورين :

$f(x) = \ln(1+x)$

$f(0) = 0$ ، $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ، $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

10

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ 3

$f'(0) = 1$ ، $f''(0) = -1$ ، $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$f(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n + \dots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ 3

السؤال السادس : منشور فورية للدالة $f(x) = x$ على $]-\pi, \pi[$

10

الدالة فردية ومنه $a_0 = a_n = 0$:

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin\frac{2n\pi}{2\pi} x \, dx$ 3

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$

بالتجزئة :

$u = x \longrightarrow du = dx$

$dv = \sin nx \, dx \longrightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nx$

$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{n} x \cos nx \right)_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n} \cos nx \, dx \right]$

$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n - 0 + \frac{1}{n^2} \left[\sin nx \right]_0^{\pi} \right]$ 3

$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$

انتهى بسلام

آخر سؤال

A to Z

جامعة طرطوس — امتحان الفصل الدراسي الأول 2022-2023 — الاسم:

كلية العلوم — السنة الثانية رياضيات — المادة: تحليل3 — الدرجة:90

قسم الرياضيات — المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول : أدرس تقارب التكاملات المعتلة الآتية : **(20 درجة)**

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^s x} \quad : \quad s \in \mathbb{R} \qquad . \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-\cos t}}\, dt$$

السؤال الثاني: أدرس تقارب أو تباعد السلاسل الآتية: **(20 درجة)**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1.4.7\ldots.(3n-2)}{3.6.9\ldots.(3n)}\right]^2$$

السؤال الثالث: أوجد مجال ونصف قطر التقارب للسلسلة: **(10 درجات)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

السؤال الرابع : لتكن لدينا المتتالية (f_n) من الدوال المعرفة على المجال $[\,0\ ,\ 1\,]$ بالشكل : **(20 درجة)**

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{2n+x}$$

1- أثبت أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على المجال المذكور من دالة يطلب تعيينها.

2- أحسب التكامل:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{2n+x}\, dx$$

السؤال الخامس : أوجد منشور ماكلوران وفق متسلسلة قوى مولدة بالدالة: **(10 درجات)**

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

واستنتج منشور الدالة: $\arctan t$.

السؤال السادس : لتكن f دالة دورية ودورها 2π معرفة على $\mathbb{R}$ ومساوية : **(10 درجات)**

$$f(x) = |x| \qquad , \qquad [-\pi\ ,+\pi\,]$$

أوجد منشور فوريه للدالة f .

انتهت الأسئلة .... التمنيات بالنجاح — *مدرس المقرر: د. آصف المحمد*

سلم تصحيح مادة التحليل 3 الدرجة: 90

السنة الثالثة رياضيات - الاثنين: 2023/1/16

السؤال الأول:

$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^s x}$:

(2d) ① عندما $s=1$ تكون:

$$\int_2^A \frac{dx}{x \ln x} = [\ln \ln x]_2^A = \ln\ln A - \ln\ln 2 \longrightarrow +\infty \quad (5)$$

$A \longrightarrow +\infty$

وتكون متباعدة.

② عندما $s \neq 1$ تكون:

$$\int_2^A \frac{dx}{x} \ln^{-s} x = \left[\frac{\ln^{-s+1} x}{-s+1} \right]_2^A \quad (3)$$

$$= \frac{\ln A^{-s+1}}{-s+1} - \frac{\ln_2^{-s+1}}{-s+1}$$

عندما $s>1$: $\frac{\ln_2^{-s+1}}{-s+1} < 0$; k ، لتقارب متقاربة

$+\infty$ (2) عندما $s<1$ ، لتكن متباعدة.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-\cos t}} dt$$

$$\lim_{t \to 0} (t-0) \frac{e^t}{\sqrt{1-\cos t}} = \lim_{t \to 0} \frac{t e^t}{\sqrt{2} \sin \frac{t}{2}} \quad (3) = \lim_{t \to 0} \frac{2 \frac{t}{2} e^t}{\sqrt{2} \sin \frac{t}{2}} = \sqrt{2} \quad (2)$$

$\lambda = 1$ ، $k = \sqrt{2} \neq 0$ ، فالتكامل متباعد.

السؤال الثاني:

(2-1) نعم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

نستخدم اختبار كوشي:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{2^n . n!} \quad (5)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2 n^n (n+1) n!}{(n+1)(n+1)^n . 2^n . n!} \quad (3) = \lim_{n \to +\infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \to +\infty} 2 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n = \frac{2}{e} < 1 \quad (2)$$

والسلسلة متقاربة.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)} \right]^2$$

نستخدم اختبار رابب

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \to +\infty} n \left\{ \left(\frac{3n+3}{3n+1} \right)^2 - 1 \right\} \quad (5)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{12n^2 + 8n}{9n^2 + 6n + 1} \quad (3) = \frac{4}{3} > 1$$

والسلسلة متقاربة. (2)

السؤال الثالث :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$ نفرض $y = x-2$ فنكون

(10) نصف طريق

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1 = d \Rightarrow r = \frac{1}{d} = 1$ (5)

نضع نظ التقارب. (3)

وإذا تقارب السلسلة عندما $-1 < y < 1 \Leftarrow -1 < x-2 < 1$

$1 < x < 3$ (2) وعندما $x = 1$ نحصل على سلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$

وهي سلسلة متقاربة بما أن السلسلة المطلقة متقاربة.

وعندما $x = 3$ نحصل على سلسلة $\sum \left(\frac{1}{n^2}\right)$ وهي متقاربة.

وإذا مجال التقارب $[1, 3]$.

السؤال الرابع :

(20) نعتبر $f_n(x) = \frac{n e^{-x}}{2n+x}$ على $[0, 1]$

1- نلاحظ أن على المجال $[0,1]$ نكون :

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ (5)

أي أن (f_n) متقاربة نقطيا نحو الدالة $f(x) = \frac{e^{-x}}{2}$

وأيضا $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon : \forall x \in [0,1], n > N_\varepsilon, n \in \mathbb{N}$

لدينا :

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n e^{-x}}{2n+x} - \frac{e^{-x}}{2} \right|$ (5)

$= \left| \frac{2nx e^{-x} - (2n+x) e^{-x}}{2(2n+x)} \right| = \frac{x e^{-x}}{2(2n+x)} = \frac{2}{4n e^x + x e^x} \leq \frac{1}{4n} < \varepsilon$

$\Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon}$ (5) نضع $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right] + 1$

حيث تحقق الشرط . فالمتتالية متقاربة بانتظام.

2- بما أن الدوال f_n مستمرة على $[0,1]$ ومتقاربة بانتظام فإن :

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{n e^{-x}}{2n+x}\,dx = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} \frac{n e^{-x}}{2n+x}\,dx$ (5)

$= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2}\,dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

تصحيح التحليل 3

السؤال الخامس: منشور ماكلوران للدالة: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ — 10 درجات

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

(5)
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad ; \quad |x| < 1$$

(3)
$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots \in \quad x = t^2$$ نفرض

بالمكاملة نجد:

(2)
$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

السؤال الثاني: منشور فوريه للدالة: $f(x) = |x|$ على $[-\pi, \pi]$ — 10 درجات

الدالة f دالة زوجية، ومنه: $b_n = 0$ ،

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$$

نفرض $u = x \to du = dx$

$dv = \cos nx \, dx \to v = \frac{1}{n} \sin nx$

(5)
$$= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(0 + \left[\frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{n^2} \right)$$

(3)
$$= \frac{2}{n^2 \pi} \left((-1)^n - 1 \right)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$ (2)

$$\Rightarrow \quad |x| \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 \pi} \left((-1)^n + 1 \right) \cos nx$$

نلاحظ أنه عندما $n = 2p$ عدد زوجي فإن قيمة الحدود $= 0$

وعندما $n = 2p+1$ فردي تكون النتيجة:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-4}{\pi (2p+1)^2} \cos(2p+1)x$$

انتهت الإجابة.

د. أحمد

الاثنين 2023/1/16