كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الرابعة**

المادة : فيزياء البلازما

المحاضرة : الثامنة/نظري/ كتابة

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

تمرين:

يطبق مجال مغناطيسي $\vec{B}(0,0,B)$ مركباته ثابت ومنتظم في منطقة محددة من الفراغ خالية من المجال والتيار الكهربائيين $(\vec{E}=\vec{J}=0)$، بفرض أن جسيماً شحنته q وكتلته m تتحرك من مبدأ الاحداثيات لهذا المجال بسرعة $v_0 \ll c$ في الاتجاه الموجب للمحور x، والمطلوب:

برهن أن مركبات حركة هذا الجسيم وفق محاور الاحداثيات الديكارتية تعطى بالصيغة التالية:

$$x = \frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t \quad , \quad y = \frac{v_0}{\omega_c}\left(\cos\omega_c t - 1\right) \quad , \quad z = 0$$

ما هو شكل مسار هذا الجسيم

الحل:

تعطى معادلة حركة الجسيم في هذه الحالة بالصيغة:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \quad \ldots (1)$$

نحسب أولاً:

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$$

$$= B v_y \vec{e}_x - B v_x \vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z$$

بالتعويض في معادلة الحركة (1) :

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} m\frac{d}{dt}\left(v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z\right)=q\left(Bv_y\vec{e}_x-Bv_x\vec{e}_y+0\vec{e}_z\right)$$

ينتج من المطابقة بين أمثال $\vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z$ بين الطرفين أن :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt}&=qBv_y\\ m\frac{dv_y}{dt}&=-qBv_x\\ m\frac{dv_z}{dt}&=0\end{aligned}\right\}\cdots(2)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow}\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=\frac{q}{m}Bv_y=w_c v_y\\ \frac{dv_y}{dt}&=-w_c v_x\\ \frac{dv_z}{dt}&=0\end{aligned}\right\} \text{و } w_c=\frac{qB}{m}$$

نجد من المعادلة الثالثة في (2) أن :

$$\frac{dv_z}{dt}=0 \Longrightarrow dv_z=0 \Longrightarrow v_z=C_1$$

بما أن الجسم تحرك في اللحظة $t=0$ بسرعة ابتدائية v_0 موجهة باتجاه المحور x بالتالي فإن :

$$v_z(0)=0 \Longrightarrow v_z(0)=0=C_1$$

نعين كذلك C_2 من الشرط الابتدائي:

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow dz = 0 \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} z = C_2$$

في اللحظة $t=0$ انطلق الجسم من مبدأ الاحداثيات، أي أن:

$$z(0) = 0 = C_2$$

لإيجاد x, y نلجأ للمعادلة الأولى والثانية في (2) حيث نشتق المعادلة الأولى في (2) بالنسبة للزمن

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = w_c \frac{d v_y}{dt}$$

بالاستفادة من المعادلة الثانية في (2) نحصل على:

$$\Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -w_c^2 v_x \quad \ldots (3)$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة لهزاز توافقي بتردد w_c لها الحل التالي:

$$v_x(t) = v_0 \sin(w_c t + \theta_0) \quad \ldots (4)$$

θ_0: ثابت تكامل يعتمد على العلاقة بين السرعة الابتدائية وفق المحور x و y أي بين $v_x(0)$ و $v_y(0)$ وفق العلاقة:

$$\tan\theta_0 = \frac{v_x(0)}{v_y(0)}$$

ولتعيين $v_y(t)$ نعوض من (4) في المعادلة الأولى في (2) وذلك باشتقاق (4) بالنسبة للزمن

$$v_0 w_c \cos(w_c t + \theta_0) = w_c v_y$$

$$\Rightarrow v_y = v_0 \cos(w_c t + \theta_0) \quad \ldots (5)$$

نعين θ_0 من الشروط الابتدائية للمسألة حيث أن الجسيم تحرك في اللحظة $t=0$
من مبدأ الاحداثيات بسرعة v باتجاه المحور x أي أن:

$$t=0 \ , \ v_x(0)=v \ , \ v_y(0)=0$$

$$\Rightarrow \tan\theta_0 = \frac{v_x(0)}{v_y(0)} = \frac{v}{0} = \infty \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

نعوض عن θ_0 في (4) و (5)

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \sin\left(w_c t + \frac{\pi}{2}\right) = v_0 \cos(w_c t) \\ v_y(t) &= v_0 \cos\left(w_c t + \frac{\pi}{2}\right) = -v_0 \sin w_c t \end{aligned}\right\} \ldots(6)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned}\right\}$$ للحفظ

ولإيجاد معادلة المسار نكامل المعادلتين في (6)

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= \frac{v_0}{w_c} \sin w_c t + x_0 \\ y(t) &= \frac{v_0}{w_c} \cos(w_c t) + y_0 \end{aligned}\right\} \ldots(7)$$

نعين x_0 و y_0 من الشروط الابتدائية بالمسألة:

$$t=0 \Rightarrow x(0)=0=\frac{v_0}{w_c}\sin(0)+x_0$$

$$0+x_0=0 \Rightarrow x_0=0$$

$$t = 0 \Rightarrow y(0) = 0 = \frac{v_0}{\omega_c}\cos(0) + y_0$$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{v_0}{\omega_c}$$

تصبح معادلات المسار بالصيغة النهائية الآتية:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{v_0}{\omega_c}\left(\cos(\omega_c t) - 1\right)$$

$$Z(t) = 0 \qquad \ldots (8)$$

ولإيجاد شكل المسار نربع المعادلات في (8) ثم بالجمع
دائرة منزاحة مركزها عن المحور y

حركة الجسيم المشحون في المجالات الكهرومغناطيسية المتغيرة مع الزمن:

مقدمة:

ندرس في هذا الفصل تحليل حركة الجسيمات المشحونة بوجود المجالات المتغيرة مع الزمن

تغير المجال الكهربائي بشكل بطيء مع الزمن (نعتبر في كل هذه الفقرة أن الحقل المغناطيسي ثابت ومنتظم):

سنفترض لفترة أن المقياس الزمني لتغير المجال الكهربائي أكبر بكثير من الدور السيكلتروني للجسيم $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$

تعطى مركبة الحركة للجسيم المشحون باتجاه خطوط المجال المغناطيسي بوساطة المعادلة

$$m\frac{dv_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel}$$

يمكننا منها كتابة معادلة السرعة بالصيغة التالية:

$$\vec{v}_{\parallel}(t) - v_{\parallel}(0) = \frac{q}{m}\int_0^t \vec{E}_{\parallel}(t')\,dt' \quad \ldots(1)$$

ومع ذلك لا تؤدي هذه النتيجة إلى أية معلومات مثيرة للاهتمام.

بما أن المجال $\vec{E}$ يتغير بشكل بطيء مع الزمن فإن مركبة الحركة (السرعة) عبر خطوط المجال المغناطيسي يتوقع أن لا تكون مختلفة عن تلك التي للمجال الكهربائي الثابت $\vec{E}$ لذلك من المناسب البحث عن الحل بكتابة السرعة $\vec{v}_{\perp}$ بصيغة مشابهة لما مر في الفقرات السابقة مع إضافة حد ناتج عن تغير المجال الكهربائي مع الزمن

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_{\perp}' + \vec{v}_D + \vec{v}_p \quad \ldots(2)$$

حيث $\vec{v}_D = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$ وهي سرعة انجراف البلازما الكهرومغناطيسية

نلاحظ أن $\vec{v}_{\perp}$ تتغير بشكل بطيء مع الزمن لأن $\vec{E}$ يتغير بشكل بطيء مع الزمن والذي يدخل بعبارة $\vec{v}_D$

بتعويض من (2) في معادلة المركبة العمودية للحركة $\left[m\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_{\perp}\times\vec{B})\right]$ فتصبح المعادلة:

$$\cancel{m\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{\perp}' + \frac{\vec{E}_{\perp}\times\vec{B}}{B^2} + \vec{v}_p\right) =}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\perp' + \frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2} + \vec{v}_p\right) = q\left[\vec{E}_\perp + \left(\vec{v}_\perp' + \frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2} + \vec{v}_p\right)\times \vec{B}\right]$$

$$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}_\perp'}{dt} + m\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}\right) + m\frac{d\vec{v}_p}{dt} = q\vec{E}_\perp + q\vec{v}_\perp' \times \vec{B} +$$

$$+ q\frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2}\times\vec{B} + q\vec{v}_p \times \vec{B} \quad \ldots (3)$$

سؤال :

أثبت أن الحد الثالث من الطرف اليمين يساوي الحد الأول في نفس الطرف ويعاكسه بالإشارة ؟

الحل :

$$q\frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2}\times\vec{B} = \frac{q}{B^2}\left[(\vec{E}_\perp \times \vec{B})\times\vec{B}\right]$$

$$= -\frac{q}{B^2}\left[\vec{B}\times(\vec{E}_\perp \times \vec{B})\right]$$

$$= -\frac{q}{B^2}\left[\vec{E}_\perp(\vec{B}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{E}_\perp\cdot\vec{B})\right]$$

$$= -\frac{q}{\cancel{B^2}}\left(\vec{E}_\perp \cancel{B^2}\right) = -q\vec{E}_\perp$$

لأنهما متساويان ومتعاكسان بالإشارة

لذلك يمكن اختصار هذين الحدين وتصبح المعادلة (3) مساوية إلى :

$$m\frac{d\vec{v}_\perp'}{dt} + m\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2}\right) + m\frac{d\vec{v}_p}{dt} = q\vec{v}_\perp' \wedge \vec{B} + q\vec{v}_p \times \vec{B} \quad (4)$$

إذا فرضنا أن $m\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2}\right) = q\vec{v}_p \times \vec{B}$ ... (*) فيمكننا أن نستنتج أن

أثبت ذلك ؟ $\vec{v}_p = \frac{m}{qB^2}\left(\frac{\partial \vec{E}_\perp}{\partial t}\right)$ ....(5)

الإثبات :

نضرب طرفي العلاقة (*) من اليسار ب $\vec{B}$ خارجياً فيكون

$$\frac{m}{qB^2}\frac{d}{dt}\left(\vec{B}\times(\vec{E}_\perp\times\vec{B})\right)=\vec{B}\times(\vec{v}_p\times\vec{B})$$

$$\frac{m}{qB^2}\frac{d}{dt}\left[\vec{E}_\perp(B^2)-\vec{B}\underbrace{(\vec{E}_\perp\cdot\vec{B})}_{=0}\right]$$

$$=\vec{v}_p(B^2)-\vec{B}\underbrace{(\vec{v}_p\cdot\vec{B})}_{=0}$$ لأن $\vec{v}_p\perp\vec{B}$

سرعة الاستقطاب

$$\vec{v}_p=\frac{m}{qB^2}\frac{d\vec{E}_\perp}{dt}$$

وهو المطلوب

انتهت المحاضرة