كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : تحليل عددي

المحاضرة: العاشرة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية

رانج_كوتا

عند استخدام طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية (أي حدين من منشور تايلور) نحصل على طريقة أولر، و عند استخدامها من المرتبة الثالثة (ثلاثة حدود من منشور تايلور) نحصل على طريقة أولر المعدلة .

لذلك سنستخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ مع الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ حيث $y \in [a, b]$، نقسم المجال $[a, b]$ إلى n جزء متساوٍ في الطول، طول كل منها $h = \frac{b-a}{n}$ ، و نكتب صيغة منشور تايلور لخمسة حدود حول x_0:

$$y_1 = y_0 + y'_0 h + y''_0 \frac{h^2}{2!} + y'''_0 \frac{h^3}{3!} + y^{(4)}_0 \frac{h^4}{4!}$$

و يعطى الحل وفقاً لهذه الطريقة بالصيغة التدريجية الآتية:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(K_1^{(n)} + 2\left(K_2^{(n)} + K_3^{(n)}\right) + K_4^{(n)}\right)$$

حيث: $K_1^{(n)} = h.f(x_n, y_n)$

$$K_2^{(n)} = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1^{(n)}}{2}\right)$$

$$K_3^{(n)} = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2^{(n)}}{2}\right)$$

$$K_4^{(n)} = h.f\left(x_n + h, y_n + K_3^{(n)}\right)$$

مثال: استخدم طريقة رونج _ كوتا من المرتبة الرابعة لإيجاد الحل التقريبي y_1 للمعادلة التفاضلية $y' = x - y$ علماً أن $y(0) = 2$ و $h = 0.1$.

الحل:

$$y_1 = y(0.1) = y_0 + \frac{1}{6}\left(K_1^{(0)} + 2\left(K_2^{(0)} + K_3^{(0)}\right) + K_4^{(0)}\right)$$

$$K_1^{(0)} = h.f(x_0, y_0) = 0.1(x_0 - y_0) = 0.1(0 - 2) = -0.2$$

$$K_2^{(0)} = h.f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) = 0.1\left(\frac{0.1}{2} - \left(2 + \frac{-0.2}{2}\right)\right) = -0.185$$

$$K_3^{(0)} = h.f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) = 0.1\left(\frac{0.1}{2} - \left(2 + \frac{-0.185}{2}\right)\right) = -0.18575$$

$$K_4^{(0)} = h.f\left(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}\right) = 0.1\left(0.1 - (2 - 0.18575)\right) = -0.171425$$

$$y_1 = y(0.1) = 2 + \frac{1}{6}(-0.2 + 2(-0.185 - 0.18575) - 0.171425) = 1.8145125$$

مثال: استخدم طريقة رونج _ كوتا من المرتبة الرابعة لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = x.y^{\frac{1}{3}}$ علماً أن $y(1) = 1$ و $h = 0.1$ عند النقطة $x = 1.1$.

الحل:

$$y_1 = y(1.1) = y_0 + \frac{1}{6}\left(K_1^{(0)} + 2\left(K_2^{(0)} + K_3^{(0)}\right) + K_4^{(0)}\right)$$

$$K_1^{(0)} = h.f(x_0, y_0) = 0.1(x_0 - y_0) = 0.1\left((1).\left(1^{\frac{1}{3}}\right)\right) = 0.1$$

$$K_2^{(0)} = h.f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) = (0.1)f(1.05,1.05) = 0.10672$$

$$K_3^{(0)} = h.f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) = (0.1).f(1.05,1.05336) = 0.10684$$

$$K_4^{(0)} = h.f\left(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}\right) = (0.1).f(1.1,1.10684) = 0.11378$$

$$y_1 = y(1.1) = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 2(0.10672 + 0.10684) + 0.11378) = 1.15681$$

مثال: استخدم طريقة رونج _ كوتا من المرتبة الرابعة لإيجاد الحل التقريبي y_1 للمعادلة التفاضلية $y' = x + y$ علماً أن $y(1) = 1$ و $h = 0.1$ عند النقطة $x = 1.2$.

الحل:

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

$$y_1 = y(1.1) = y_0 + \frac{1}{6}\left(K_1^{(0)} + 2\left(K_2^{(0)} + K_3^{(0)}\right) + K_4^{(0)}\right)$$

$$K_1^{(0)} = h.f(x_0, y_0) = 0.1(x_0 + y_0) = 0.1(1 + 1) = 0.2$$

$$K_2^{(0)} = h.f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) = 0.1(1.05 + 1.1) = 0.215$$

$$K_3^{(0)} = h.f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) = 0.1(1.05 + 1.1075) = 0.21575$$

$$K_4^{(0)} = h.f\left(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}\right) = 0.1(1.1 + 1.21575) = 0.23158$$

$$y_1 = y(1.1) = 1 + \frac{1}{6}(0.2 + 2(0.215 + 0.21575) + 0.23158) = 1.21551$$

$$(x_1, y_1) = (1.1,1.21551)$$

$$y_2 = y(1.2) = y_1 + \frac{1}{6}\left(K_1^{(1)} + 2\left(K_2^{(1)} + K_3^{(1)}\right) + K_4^{(1)}\right)$$

$$K_1^{(1)} = h.f(x_1, y_1) = 0.1(x_1 + y_1) = 0.1(1.1 + 1.21551) = 0.23155$$

$$K_2^{(1)} = h.f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2}\right) = 0.1(1.15 + 1.33128) = 0.24813$$

$$K_3^{(1)} = h.f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2}\right) = 0.1(1.15 + 1.33957) = 0.24896$$

$$K_4^{(1)} = h.f\left(x_1 + h, y_1 + K_3^{(1)}\right) = 0.1(1.2 + 1.46447) = 0.26645$$

$$y_2 = y(1.2) = 1.21551 + \frac{1}{6}(0.23155 + 2(0.24813 + 0.24896) + 0.26645) = 1.46421$$