كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك فيزيائي٢

المحاضرة : مسائل /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

$$c_2 + Mgy_1 + mgL = 0$$

بالتالي :

$$V = -\cancel{M}\, g\, s \sin\alpha$$

ومنه تكامل الطاقة الكلية :

$$T+V=E$$

أو :

$$\frac{1}{2}Mx'^2 + \frac{1}{2}m(x'^2 + s'^2 + 2x's'\cos\alpha) - mgs\cdot\sin\alpha = E_0$$

في اللحظة الابتدائية الجملة موجودة في حالة سكون ، إذا كانت هذه الحالة توافق $s = 0$ سنملك $E = 0$، وعندها :

$$(M+m)x'^2 + m(s'^2 + 2x's'\cos\alpha) = 2mgs\cdot\sin\alpha \qquad (2)$$

المعادلتان (1) و (2) تحددان بشكل كامل حركة المجموعة بعلاقتها بتغير الوسيطين x و s . من هاتين المعادلتين نحصل على : (نضرب (1) بـ ... ونطرح من (2))

$$m(s'^2 + x's'\cos\alpha) = 2mgs\cdot\sin\alpha$$

بحذف x' من هنا ، نحصل على :

$$s'^2\cdot\left(\frac{M+m\sin^2\alpha}{M+m}\right) = 2\cdot g\cdot s\sin\alpha,$$

بالمكاملة نجد أن :

$$s = \frac{(M+m)g\cdot t^2\sin\alpha}{2(M+m\cdot\sin^2\alpha)}$$

بوضع هذه القيمة في المعادلة (1) ومكاملتها نجد :

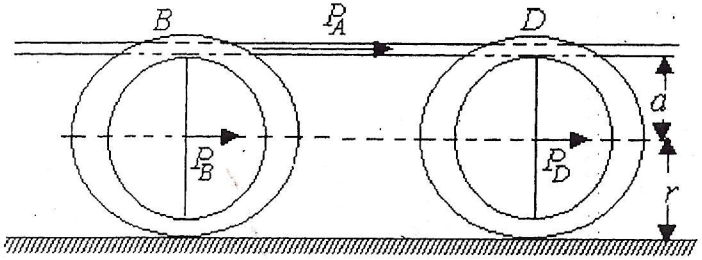
$$x = -\frac{m\cdot g\cdot\sin 2\alpha}{4(M+m\cdot\sin^2\alpha)}t^2$$

تمارين محلولة

٣-١١ مسائل انحفاظ وتغير كمية الحركة

مثال ١:

عارضة A كتلتها m_1 تزاح أفقياً بواسطة بكرتين B وD كتلة كل منهما m_2 ونصف قطرها r ، تتدحرجان على الأرض بدون احتكاك . سرعة مركز ثقل كل من البكرتين تساوي V .عيّن متجه كمية حركة المجموعة ، إذا علمت أن العارضة تبعد عن الأرض مسافة r+a .الشكل (3-4) .



الشكل (3-4)

الحل :

متجه كمية حركة المجموعة :

$$\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_D,$$

حيث $\vec{p}_A$ – كمية حركة العارضة A . $\vec{p}_B, \vec{p}_D$ متجها كمية حركة البكرتين D وB .

لدينا :

$$\vec{p}_A = m_1\vec{V}_A, \qquad \vec{p}_B = \vec{p}_D = m_2\vec{V}$$

المركز الآني للسرع o لكل من البكرتين يقع في نقطة تماس كل من البكرتين مع الأرض الشكل () وبالتالي نجد :

$$\vec{V}_A = \frac{r+a}{r}\vec{V}$$

ومنه :

$$\vec{p} = m_1\vec{V}_A + 2m_2\vec{V} = \left(\frac{r+a}{r}m_1 + 2m_2\right)\vec{V}$$

58

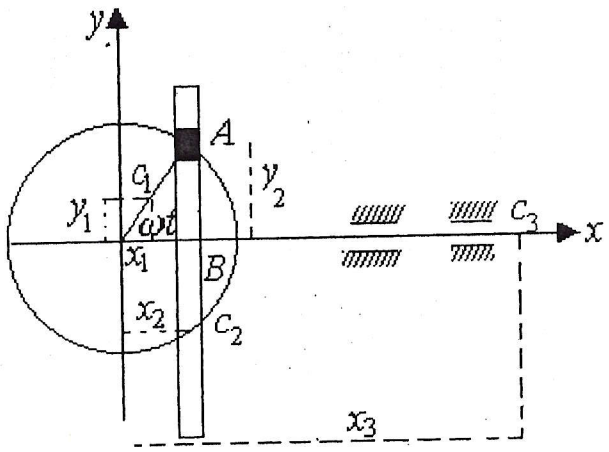
مثال ٢ :

لدينا الآلة الموضحة على الشكل (3-5) حيث وزن الذراع OA يساوي $\vec{p}_1$ ، ووزن الكتلة A يساوي $\vec{p}_2$ ، ووزن الوصلة والقضيب BD يساوي $\vec{p}_3$. يدور الذراع بسرعة زاوية ثابتة ω ، ونعده عصا رفيعة متجانسة . الكتلة A مهملة الأبعاد. مركز كتل الوصلة والقضيب متوضع في C_3 علاوة على ذلك $OA = \frac{1}{2}BC_3 = l$.

في اللحظة الابتدائية تشغل الكتلة A أقصى نقطة الى اليمين يمكن أن تصلها .

١- أوجد معادلة مسار مركز كتل وصلة الآلة .

٢- كمية الحركة لهذه الوصلة .



الشكل (4-5)

الحل :

نختار المحاور الإحداثية كما هو موضح في الشكل (3-5) وهي توافق وضعية وصلة الآلة في اللحظة t . بما أن الذراع يدور بسرعة زاوية ثابتة فإن زاوية الدوران ψ تساوي : $\angle BOA = \psi = \omega t$.

لإيجاد مركز كتل المجموعة C نستخدم تعريف مركز الكتل ونوجد الإحداثيين x_C, y_C :

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3 + y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

هنا الدليل 1- يعود إلى الذراع ، 2 – يعود للكتلة A ، 3 –للوصلة و القضيب .

كما هو واضح من الشكل :

$$x_1 = \frac{l}{2}\cos\omega t, \quad y_1 = \frac{l}{2}\sin\omega t, \quad x_2 = l\cos\omega t, \quad y_2 = l\sin\omega t,$$

$$x_3 = x_2 + BC_3 = l\cos\omega t + 2l = l(2 + \cos\omega t), \quad y_3 = 0.$$

نعوض $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ بالصيغ ($\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$) ونستبدل الكتل بالأوزان نحصل على :

$$x_C = \frac{p_1\frac{l}{2}\cos\omega t + p_2 l\cos\omega t + p_3 l(2 + \cos\omega t)}{p_1 + p_2 + p_3} = d + a\cos\omega t,$$

حيث :

$$d = \frac{2p_3 l}{p_1 + p_2 + p_3}, \quad a = \frac{p_1 + 2p_2 + 2p_3}{2(p_1 + p_2 + p_3)}l$$

$$y_C = \frac{p_1\frac{l}{2}\sin\omega t + p_2 l\sin\sin\omega t}{p_1 + p_2 + p_3} = b\sin\omega t,$$

حيث :

$$b = \frac{p_1 + 2p_2}{2(p_1 + p_2 + p_3)}l$$

لايجاد معادلة مسار مركز كتل المجموعة يجب حذف الزمن من هذه المعادلات . نحل هذه المعادلات بالنسبة لـ $\sin\omega t, \ \cos\omega t$ ونربعهم ونجمعهم نحصل على :

$$\frac{(x_C - d)^2}{a^2} + \frac{y_C^2}{b^2} = 1$$

وهكذا نجد أن مسار مركز الكتل هو عبارة عن قطع ناقص أنصاف أقطاره :

$$a = \frac{p_1 + 2p_2 + 2p_3}{2(p_1 + p_2 + p_3)}l \quad \text{و} \quad b = \frac{p_1 + 2p_2}{2(p_1 + p_2 + p_3)}l$$

يقع مركز القطع على المحور X وعلى بعد عن مبدأ الإحداثيات O يساوي :

$$d = \frac{2p_3 l}{p_1 + p_2 + p_3},$$

تعطى مساقط كمية الحركة على المحاور الإحداثية بالصيغ :

$$p_x = M\dot{x}_C, \quad p_y = M\dot{y}_C$$

حيث $$M = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{g}$$

وبالتالي $$\dot{x}_C = -a\omega \sin \omega t \quad \text{و} \quad \dot{y}_C = b\omega \cos \omega t$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

والزاوية التي يصنعها p مع المحور x :

$$\cos(x, p) = \frac{p_x}{p} .$$

مثال ٣:

جسم ثقيل وزنه $\vec{p}$ يبدأ حركته من السكون على سطح أفقي خشن تحت تأثير القوة $\vec{F} = \vec{a}t$ ، حيث $\vec{a}$ متجه ثابت . عين سرعة الجسم بدلالة الزمن اذا علمت أن عامل احتكاك الحركة يساوي f.

الحل :

القوى المؤثرة في الجسم هي وزنه $\vec{p}$ ، القوة المحركة $\vec{F} = \vec{a}t$ ، مركبة رد الفعل الناظمية $\vec{R}$ ، و أخيراً مركبة قوة الاحتكاك المماسية $\vec{F}_\tau = f\vec{p}$ وتتجه بعكس اتجاه الحركة . بما أن اتجاه القوة المحركة ثابت، وبدأ الجسم حركته من السكون ، فإن حركة هذا الجسم تكون مستقيمة ، ولنأخذ المحور X باتجاه الحركة .

إن نظرية كمية الحركة لمجموعة مادية بمسقطها على هذا المحور تعطي :

$$p_x - p_{ox} = s_x$$

وحسب شروط البدء يكون $p_0 = 0$ وبالتالي $p_{ox} = 0$. وبملاحظة أن مسقطي $\vec{p}$ و $\vec{R}$ على X معدوما يكون لدينا:

$$s_x = \int_0^t (F - fp)dt = \int_0^t (at - fp)dt = \frac{1}{2}at^2 - fpt.$$

(59)

وبالتالي اعتماداً على مسقط كمية الحركة على المحور X نجد :

$$p_x = \frac{p}{g}v_x = \frac{1}{2}at^2 - fpt$$

ومنه نجد سرعة الجسم بدلالة الزمن :

$$v_x = g(\frac{at^2}{2p} - ft) .$$

مثال ٤:

يقف شخص في النقطة A على أحد طرفي قارب ، بإهمال قوى الاحتكاك مع الماء . عين المسافة التي يتحركها القارب عندما ينتقل الشخص إلى نهاية القارب الثانية في النقطة B .إذا علمت أن وزن الشخص p ، ووزن القارب Q وطول القارب $AB=2l$.

الحل :

يمكن اعتبار المجموعة مكونة من نقطتين ماديتين ، إحداهما يعدّ الشخص و الأخرى القارب .إذا فرضنا كتلة الشخص $m_1 = \frac{p}{g}$ ، وكتلة القارب $m_2 = \frac{Q}{g}$.نوجه المحور AX على طول المستقيم AB.

ونعد مبدأ الإحداثيات النقطة A . القوى الخارجية هنا تعد قوى الثقالة p و Q . وقوة رد الفعل العمودي للماء $\vec{N}$.هذه القوة شاقولية لذلك مجموع مساقط القوى الخارجية على المحور AX معدوم ، أي أن :

$$\sum_{i=1}^{N} F_{ix}^{ext} = 0$$

من هنا نجد أن :

$$M\ddot{x}_c = 0 \Rightarrow \ddot{x}_c = 0 \Rightarrow \dot{x}_c = c_1$$

حيث $M = m_1 + m_2$ ، x_c – احداثي مركز كتل المجموعة ، c_1 – ثابت التكامل وهذا الثابت معدوم لأنه في لحظة بدء الحركة كانت المجموعة ساكنة . وبالتالي $\dot{x}_c = 0$ ومنه :

$$\dot{x}_c = \frac{dx_c}{dt} = 0 \Rightarrow \quad x_c = c_2 - x_c(0) = x_{0c}$$

أي أن إحداثيات مركز كتل المجموعة لا يتغير . علاوة على ذلك فإن القيمة الابتدائية لإحداثي مركز الكتل X يعبر عنه من خلال إحداثيات مراكز كتل نقط المجموعة :

$$x_{oc} = \frac{m_1 x_{o1} + m_2 x_{o2}}{m_1 + m_2}$$

نأخذ بالاعتبار أن : $x_{o2} = l, x_{o1} = x_A = 0$ نجد :

$$x_{oc} = \frac{Ql}{p+Q}$$

عندما يتحرك القارب مسافة S فإن إحداثيات الشخص و القارب تصبح :

$$x_1 = x_B = 2l - s, \qquad x_2 = l - s$$

ومنه:

$$x_c = \frac{p(2l-s) + Q(l-s)}{p+Q}$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار أن $x_c = x_{oc}$ نحصل بسهولة على أن :

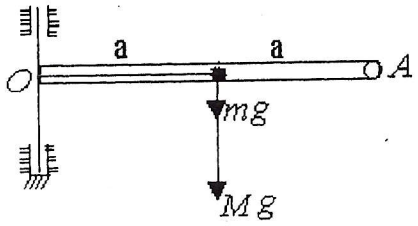
$$Ql = Q(l-s) + p(2l-s) \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2pl}{p+Q}$$

٣-١٢ مسائل انحفاظ وتغير العزم الحركي

مثال ٥ :

أنبوبة أفقية oA وزنها Mg وطولها 2a ، يوجد داخلها كرة على بعد a من نهايتها o ، مربوطة بوساطة خيط إلى هذه النهاية .تدور أولاً حول محور شاقولي يمر من o بسرعة زاوية ثابتة ω_0 . بعد ذلك ينقطع الخيط ، أوجد السرعة الزاوية

لدوران الأنبوبة في نفس اللحظة الزمنية، عندما تطير الكرة منها ،إذا كانت كتلة الكرة m الشكل (3-6) .



الشكل (3-6)

الحـــل :

بما أن المجموعة يمكنها الدوران حول محور ثابت ، يمكن استخدام نظرية تغير العزم الحركي بالنسبة لهذا المحور . و بما أن عزوم القوى الخارجية معدومة فالعزم الحركي يساوي مقداراً ثابتاً $L = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm = \int r^2 \omega\, dm$

$$G_z = G_{1z} + G_{2z} = I_z\omega_0 + m\omega_0 a^2 = \text{const}$$

$I_z = \frac{4}{3}Ma^2$ – عزم عطالة الأنبوبة بالنسبة للمحور الشاقولي .

تحدد قيمة الثابت من الشروط الابتدائية، وهو يساوي العزم الحركي في اللحظة الابتدائية:

$$I_z\omega_0 + m\omega_0 a^2 = \text{const}$$

وبالتالي

$$(\frac{4}{3}Ma^2 + mx^2)\omega = (\frac{4}{3}Ma^2 + ma^2)\omega_0$$

و منه عندما x=2a نجد :

$$\omega = \frac{4M + 3m}{4M + 12m}\omega_0$$

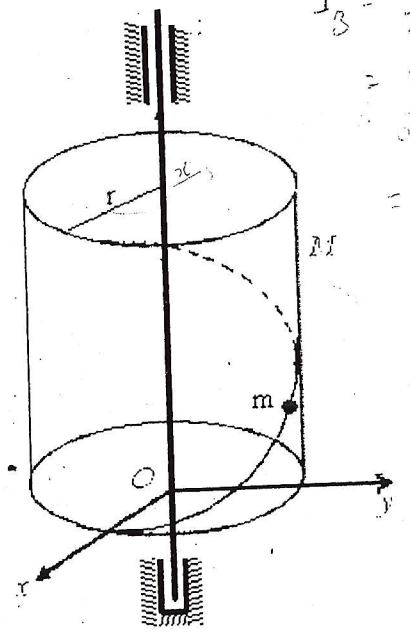
مثال (6)

اسطوانة دورا نية متجانسة نصف قطرها r وكتلتها M ، يمكنها الدوران بدون احتكاك حول محور شاقولي z . يوجد على الاسطوانة قناة على شكل خط حلزوني ،

في هذه القناة يوجد كرة صغيرة (نقطة مادية) كتلتها m . في البدء كانت الجملة ساكنة ، ثم بدأت الكرة بالحركة في القناة الحلزونية تحت تأثير ثقلها . ونتيجة ذلك بدأت الاسطوانة بالدوران حول محورها بالاتجاه المعاكس . ماهي الزاوية التي تدور بها الاسطوانة ، خلال الزمن الذي تسقط فيه الكرة مسافة تساوي خطوة اللولب h . كما في الشكل (3-7) .

الحل :

القوى الخارجية المؤثرة في جملة الكرة الاسطوانة ، هي قوة ثقلهما .وردود فعل نقطتي استناد محور دوران الاسطوانة Z . بما أن عزوم هذه القوى بالنسبة للمحور Z معدومة ، وبما أنه في اللحظة الابتدائية كانت الجملة ساكنة ، فإن $G_z = 0$ العزم الحركي للمجموعة بالنسبة للمحور Z .



الشكل (3-7)

العزم الحركي لدوران الاسطوانة حول المحور Z يساوي :

$$I_z.\omega = -\frac{Mr^2}{2}\omega, \qquad (1)$$

حيث ω السرعة الزاوية لدوران الاسطوانة (إشارة الناقص على اعتبار أن الاسطوانة تدور مع اتجاه دوران عقارب الساعة ،اذا نظرنا بالاتجاه الموجب للمحور Z) . إذا رمزنا للسرعة النسبية للكرة بـــ v_r وهي مماسية لخط الحلزون ورمزنا لزاوية السرع مع المحور Z بـــ γ ، فإن المركبة الأفقية للسرعة النسبية والمماسية للاسطوانة ، تساوي بالطويلة $v_r \sin\gamma$. السرعة الجزية $\vec{v}_e$ للكرة (السرعة نتيجة الحركة الدورانية للاسطوانة حول المحور Z) موجه بعكس المركبة الأفقية للسرعة النسبية وطويلتها $r\omega$. لذلك تساوي المركبة الأفقية للسرعة المطلقة $v_r \sin\gamma - r\omega$ ، وعزم كمية حركة الكرة بالنسبة للمحور Z يساوي :

$$m(v_r \sin\gamma - r\omega)r$$

وبالتالي :

$$G_z = -\frac{Mr^2\omega}{2} + mr(v_r \sin\gamma - r\omega), \qquad (2)$$

وحيث أن $G_z = 0$ فإن :

$$-\frac{Mr^2\omega}{2} + mr(v_r \sin\gamma - r\omega) = 0,$$

أو :

$$(\frac{M}{2} + m)r\omega = mv_r \sin\gamma. \qquad (3)$$

إذا كانت زاوية دوران الاسطوانة ψ ، فإن :

$$\omega = \frac{d\psi}{dt},$$

يساوي مسقط السرعة المطلقة على المحور Z الى $v_z = -v_r \cos\gamma$ ولذلك :

$$\frac{dz}{dt} = v_z = -v_r \cos\gamma$$

و

$$v_r \sin\gamma = v_r \cos\gamma\, tg\gamma = -tg\gamma \frac{dz}{dt}.$$

وبالتالي تأخذ المعادلة (3) الشكل :

$$(\frac{M}{2} + m) r \frac{d\psi}{dt} = -mtg\gamma \frac{dz}{dt},$$

أو:

$$(\frac{M}{2} + m) r d\psi = -mtg.dz.$$

نكامل هذه المعادلة مع الأخذ بعين الاعتبار أن $\psi_0 = 0, \quad z_0 = 0$ في لحظة البدء نحصل على :

$$(\frac{M}{2} + m) r \psi = -m.tg\gamma.z$$

وحسب شروط المسألة بوضع $z = -h$ نجد زاوية دوران الاسطوانة :

$$\psi = \frac{m.tg\gamma.h}{(\frac{M}{2} + m) r}.$$

وحيث أنه يوجد علاقة بين زاوية انحراف خط الحلزون γ ، وخطوة الحلزون h وهي $tg\gamma = \frac{2\pi r}{h}$ فإن $\psi = 2\pi m / (\frac{M}{2} + m)$. مثلاً اذا كانت $M = 6m$ فإن الاسطوانة تدور 90° .

٣-١٣ مسائل انحفاظ وتغير طاقة مجموعة

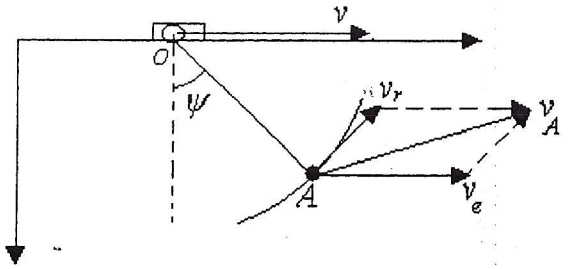
مثال ٧:

يتحرك مكعب بسرعة v على مستوٍ أفقي ، كتلة المكعب M . ربط مع المكعب في محوره نواس رياضي كتلته m و طول خيط تعليقه l .احسب الطاقة الحركية لجملة

النقط ،مع الفرض أن قانون حركة النواس $\psi = \psi(t)$ (متجه السرعة يقع في مستوي انزياح النواس) الشكل (3-8) .

الحـــل :

المجموعة المادية مؤلفة من المكعب و النقطة المادية A و بالتالي الطاقة الحركية تساوي مجموع الطاقات الحركية: $T = T_1 + T_2$ حيث T_1 – الطاقة الحركية للمكعب ، T_2 – الطاقة الحركية للنقطة المادية .



الشكل (3-8)

المكعب يتحرك حركة انسحابية لذلك $T_1 = \frac{1}{2}Mv^2$ ،الطاقة الحركية للنقطة A هي : $T_2 = \frac{1}{2}mv_A^2$ حيث v_A السرعة المطلقة للنقطة A . تقوم النقطة بحركة مركبة، حركة جرية مع المكعب و حركة نسبية بالنسبة للمكعب ، أي أن $v_e = v$ $v_r = l\dot{\psi}$ (ψ زاوية دوران النواس) . و بالتالي فإن

$$\vec{v}_A = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

برسم متوازي الأضلاع للسرع نجد أن

$$v_A^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\psi,$$

بتبديل قيم v_r و v_e نجد أن

$$v_A^2 = v^2 + l^2\dot{\psi}^2 + 2l\dot{\psi}v\cos\psi,$$

وبالتالي

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}m(v^2 + l^2\dot{\psi}^2 + 2l\dot{\psi}v\cos\psi)$$

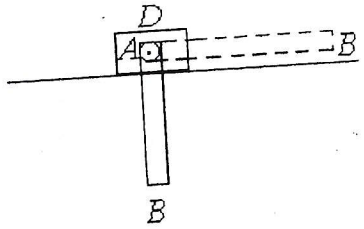
وبالتالي فإن :

$$T=\frac{1}{2}(M+m)v^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\psi}^2+ml\dot{\psi}v\cos\psi)$$

ننوه بأن الطاقة الحركية للمجموعة المعطاة لا ترتبط فقط بسرعة النقط، ولكن ترتبط أيضاً بوضعية (مواضع) نقط المجموعة (يوجد في الحد الثالث $\cos\psi$).

مثال ٨:

عارضة D كتلتها m_1 يمكنها التحرك على سطح أفقي أملس ، ويرتبط بها مفصلياً ذراع BA طوله l وكتلته m_2 كما في الشكل (3-9) .. في البدء كانت العارضة ساكنة، وكان الذراع أفقياً، وترك دون سرعة ابتدائية ليدور حول A مركز العارضة . احسب سرعة العارضة في اللحظة التي يكون فيها الذراع شاقولياً .



الشكل (3-9)

الحل :

بالعودة إلى نظرية تغير الطاقة الحركية، وهي أن تغير الطاقة الحركية يساوي مجموع أعمال القوى الداخلية و الخارجية ، وملاحظة أن عمل القوى الداخلية يساوي الصفر ، وعمل القوى الخارجية يساوي $\frac{l}{2}mg$. إن الطاقة الحركية T_1 تساوي الصفر لحظة البدء طبقاً لشروط المسألة ، أما T_2 فهي الطاقة الحركية للعارضة والذراع عندما يصبح الذراع شاقولياً وهي تساوي :

$$T_2=T_D+T_{AB}=\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}m_2v_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2 \qquad (1)$$

(63)

حيث : v_c – سرعة مركز كتلة الذراع ، I_c – عزم عطالة الذراع حول محور مار من مركزه ومتعامد مع مستويه . ω – السرعة الزاوية للدوران .

ومن السهل حساب v_c إذا لاحظنا أنها مؤلفة من سرعتين : الاولى سرعة العارضة D (سرعة جرية) والثانية سرعة C حول النقطة A (سرعة نسبية) وهما محمولتان على المنحى نفسه ولكنهما متعاكستان بالاتجاه، وبالتالي نجد بالاسقاط على المحور x أن :

$$v_c=v-\frac{1}{2}l\omega \qquad (2)$$

لحساب ω نلاحظ أن كل القوى المؤثرة هي قوى شاقولية . وبالتالي فإن مسقط كمية الحركة الكلية للجملة على المحور X الأفقي يساوي مقداراً ثابتاً . وطالما ان الجملة كانت ساكنة في البدء، فإن المسقط المذكور يجب أن يساوي الصفر وبالتالي مسقط اندفاع الجملة الكلي في اللحظة t_2 على المحور OX معدوم :

$$(m_1v)_{ox}+(m_2v_c)_{ox}=0\Rightarrow \qquad m_1v=m_2(\frac{l}{2}\omega-v)$$

ومنه :

$$l\omega=\frac{2(m_1+m_2)v}{m_2} \qquad (3)$$

بتبديل (2) في (1) مع ملاحظة (3) وبتعويض $I_c=\frac{m_2}{12}l^2$ نجد :

$$T_2=\frac{(4m_1+m_2)(m_1+m_2)}{6m_2}v^2$$

هذا يساوي عمل القوى الخارجية $\frac{l}{2}mg$ وبالتالي :

$$v=\frac{m_2\sqrt{3gl}}{\sqrt{(4m_1+m_2)(m_1+m_2)}}.$$

مثال ٩

ليكن لدينا الجملة الموضحة على الشكل (3-10) حيث A وB حملان لهما الكتلة نفسها M_1 يتحركان بوجود خيط عديم الوزن يمر على بكرتين لهما الكتلة نفسها