كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك فيزيائي٢

المحاضرة : العاشرة /نظري/كتابة

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

- انحفاظ وتغيير العزم الحركي:

من اجل نقطة مادية واحدة:

$\vec{L}$: العزم الحركي $\quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{p}$: كمية حركة النقطة المادية

$\vec{M}$: عزم القوة $\quad M = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{r}$: شعاع النقطة

اما من اجل مجموعة مادية من N نقطة:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

حيث $i = 1, 2, \dots N$

اما من اجل وسط مستمر:

$$\vec{L} = \int_M \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$

$$dm = \rho\, dv$$

$$= \int_v \vec{r} \times \vec{v}\, \rho\, dv$$

نظرية العزم الحركي من اجل نقطة مادية:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

مشتق العزم الحركي بالنسبة للزمن يساوي محصلة عزوم القوة المؤثرة على هذه النقطة.

- اما من اجل مجموعة مادية من N نقطة :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i}\right)$$

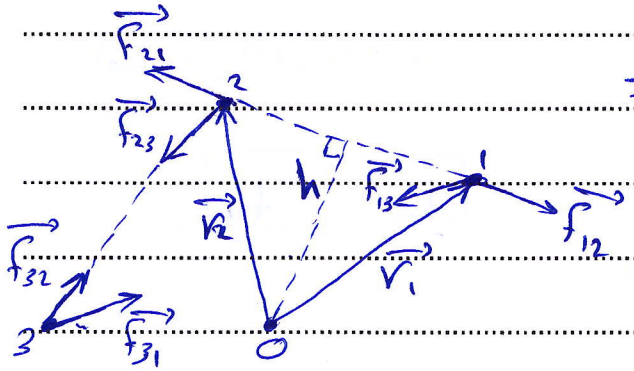
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r_i} \times m_i \vec{v_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d\vec{r_i}}{dt} \times m_i \vec{v_i} + \vec{r_i} \times m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{v_i} \times m_i \vec{v_i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times m_i \vec{a_i}$$

$$= 0 + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \left(\vec{f_i^{int}} + \vec{f_i^{ext}}\right)$$



$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \vec{f_i^{int}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \vec{f_i^{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 + \sum_{i=1}^{N} \vec{M_i^{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M^{ext}}$$

مشتق العزم الحركي بالنسبة للزمن يساوي مجموع القوى الخارجية

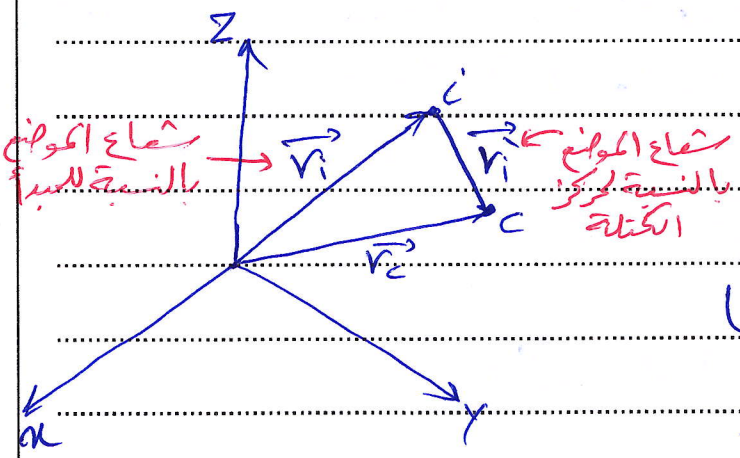
TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظات :

1) معدل تغير العزم الحركي بالنسبة للزمن حول محور ثابت لمجموعة مادية في حركتها في الجملة الثابتة يساوي عزم القوة الخارجية المؤثرة حول المحور ك. (أو دليل)

2) اذا كان محصلة عزوم القوة صفر وبالتالي العزم الحركي L ثابت.

3) اذا كان مسقط $\vec{M}_{ext}$ محصلة عزوم القوة الخارجية على محور (اتجاه) ما صفراً فإن مسقط العزم الحركي $\vec{L}$ للمجموعة على هذا المحور (اتجاه) يحافظ على قيمة ثابتة.



- العزم الحركي حول مركز الكتلة :

من الشكل نلاحظ :

$$(i = 1,2,\dots N)\quad \vec{r_i} = \vec{r_c} + \vec{r_i'}$$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن

$$\vec{v_i} = \vec{v_c} + \vec{v_i'}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r_c} + \vec{r_i'}) \times m_i (\vec{v_c} + \vec{v_i'})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r_c} \times m_i \vec{v_c} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_c} \times m_i \vec{v_i'} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i'} \times m_i \vec{v_c} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i'} \times m_i \vec{v_i'}$$

$$= \vec{r_c} \times m \vec{v_c} + \vec{r_c} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i'}}_{=0} + \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i'}}_{=0}\right) \times \vec{v_c} + \sum_{i=1}^{N} \vec{L_i'}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

العزم الحركي للجملة $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$: $\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{L}_C + \vec{L}'}$

في جملة حركة الكتلة

عزم الحركة بالنسبة لجملة احداثيات ما يساوي العزم الحركي بالنسبة للجملة الاحداثيات الخارجية مضافاً اليه العزم الحركي للجملة بالنسبة لمركز الحركة.

- قوانين انحفاظ وتغير طاقة مجموعة مادية :

نظرية كونك :

يمكن تقسيم الطاقة الحركية لمجموعة مادية الى قسمين احدهما الطاقة الحركية لمركز الكتلة والآخر هو الطاقة الحركية لمجموعة مادية في جملة مركز الكتلة.

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_i')^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (v_c^2 + v_i'^2 + 2\vec{v}_c \cdot \vec{v}_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_c \cdot \vec{v}_i'$$

$$= \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum_i T_i' + \vec{v}_c \cdot \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i'}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = T_c + T'}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بأخذ تفاضل T ⇐

$$dT = d\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(2\vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \sum m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot dt$$

$$= \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= \sum_i m_i a_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$\Rightarrow dT = \sum_i f_i \, d\vec{r}_i$$

تفاضل الطاقة الحركية يساوي القوة في الانتقال.

اي ان تفاضل T يساوي العمل المنجز للقوة المؤثرة.

$$\Rightarrow \boxed{T_2 - T_1 = \sum_i \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i}$$

ملاحظة:

يمكن اثبات ان تغير الطاقة الحركية للجملة ناتج عن الاعمال المنجزة للقوة الداخلية والخارجية معا سواء.

- الطاقة الكامنة للمجموعة U: هي مجموع الطاقة الكامنة للجملة بالنسبة للحقول الخارجية اضافة للطاقة الكامنة الداخلية.

$$U = U^{int} + U^{ext}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

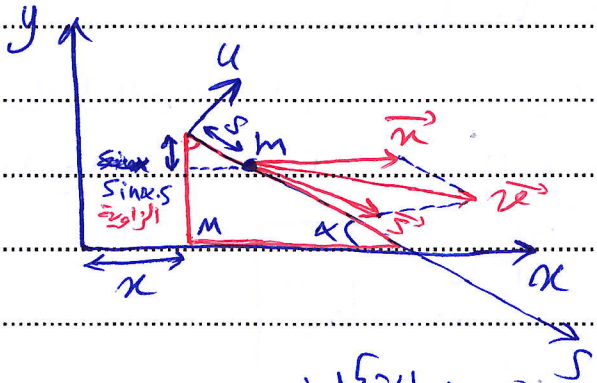
- الطاقة الكلية (الميكانيكية) للمجموعة E :

$$E = U + T$$

اذا كانت طاقة الكلية للمجموعة المادية ثابتة فتدعى المجموعة بالمجموعة المحافظة.

- مسألة :

مومشور كتلته M يمكنه الانزلاق دون احتكاك على ارض افقية ملساء بوجهي المومشور نقطة مادية كتلتها m تنزلق نحو الاسفل تحت تأثير قوة الثقل عين حركة المجموعة مع فرض انها كانت ساكنة لحظة البدأ المطلوب حدد حركة المجموعة.



القوى الخارجية المؤثرة على المجموعة هي شاقولية على خط الأفق

من الشكل:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{s}$$

$$v_x = u + s\cos\alpha$$

$$P_x = \text{Const} \Rightarrow M\dot{x} + m(\dot{u} + \dot{s}\cos\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(M+m)\dot{u} = -m\dot{s}\cos\alpha} \quad --(1)$$

$$\Delta T = -\Delta V \quad --(2)$$

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m(\vec{u} + \vec{s})^2$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{u}\dot{s}\cos\alpha) \quad --(3)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Delta V = -mgs\sin\alpha \quad \text{---(4)}$$

بتعويض (3) و(4) في (2) نجد:

$$M\dot{x}^2 + m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha) = 2mgs\sin\alpha \quad \text{---(5)}$$

$$(M+m)\dot{x}^2 + m(\dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha) = 2mgs\sin\alpha \quad \text{---(6)}$$

بتعويض (1) في (6) والاختصار:

$$\dot{s}^2 = \frac{2g\sin\alpha(M+m)}{M+m\sin^2\alpha}\cdot s$$

$$\dot{s} = \kappa\sqrt{s} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \kappa\sqrt{s} \Rightarrow \frac{ds}{\sqrt{s}} = \kappa\,dt$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{s} = \kappa t \Rightarrow s = \frac{\kappa^2 t^2}{4}$$

$$\Rightarrow s = \frac{(m+M)g\sin\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}\cdot t^2 \quad \text{---(7)}$$

بتعويض العلاقة (7) والتعويض في (1) والعملية:

$$x = -\frac{mgs\sin^2\alpha}{4(M+m\sin^2\alpha)}\cdot t^2$$

الاشارة (-) تدل على ان الجسم يدور نحو اليسار.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة