كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : ميكانيك فيزيائي١

المحاضرة **9+10**:/ن+ع/ د. صالح

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال 4 تتحرك نقطة مادية M في الفضاء الثلاثي وترسم المنحني المعين بالمعادلات الوسيطية

$$x = 2e^t \sin t$$
$$y = 2e^t \cos t$$
$$z = e^t$$

حيث z و y و x الإحداثيات الديكارتية للنقطة M في اللحظة t

1. تعيين قياس شعاع السرعة في النقطة M في اللحظة t
2. تعيين قياس شعاع التسارع في النقطة M في اللحظة t
3. حساب شعاع واحدة المماس
4. حساب التسارع المماسي والناظمي
5. تعيين نصف قطر التقوس

الحل: 1. حساب السرعة

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = (2e^t \sin t + 2e^t \cos t)\,\vec{i} + (2e^t \cos t - 2e^t \sin t)\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9e^{2t}} = 3e^t$$

2. حساب التسارع:

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$= 4e^t \cos t\,\vec{i} - 4e^t \sin t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{17}\,e^t$$

3. حساب شعاع واحدة المماس:

$$T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2}{3}(\sin t + \cos t)\,\vec{i} + \frac{2}{3}(\cos t - \sin t)\,\vec{j} + \frac{1}{3}\,\vec{k}$$

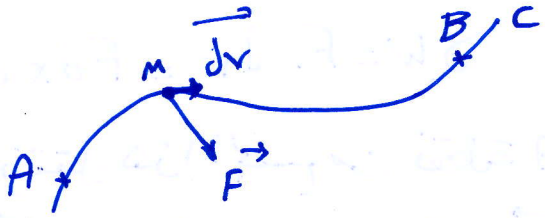
المحاضرة الخامسة : العمل والطاقة

1 - عمل قوة : نفرض نقطة مادية M تتحرك على مسار ما C في جملة مرجعية R وذلك بتأثير قوة متغيرة $\vec{F}$

نعرف العمل العنصري (الصغير) δW للقوة $\vec{F}$ أثناء انتقال M انتقالاً "عنصرياً" (صغير) $\vec{dr}$ بالعلاقة

$$\delta W = \vec{F} . \vec{dr}$$

يساوي الجداء السلمي لشعاع القوة $\vec{F}$ بشعاع الانتقال الصغير $\vec{dr}$. نناقش هنا طبعاً الحالة العامة وهي قوة متغيرة (بمرور الزمن أو مع الإحداثيات) .



- إذا انتقلت النقطة المادية على المسار C من نقطة ما A إلى نقطة أخرى B فإن عمل القوة $\vec{F}$ أثناء هذا الانتقال هو :

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} . \vec{dr}$$

- يجري هذا التكامل على المسار C بين النقطتين A و B . ولذا يتعلق عمل القوة $\vec{F}$ في الحالة العامة ، بالمسار المتبع لانتقال M من A إلى B بعض القوى لا يتعلق عملها بالطريق المتبع نسمي تلك القوى القوى المحافظة

ملاحظة : عندما تكون القوة $\vec{F}$ عمودية على المسار في كل لحظة فإن $\vec{F} . \vec{dr} = 0$ و حينئذٍ يعمل هذه القوة يساوي الصفر

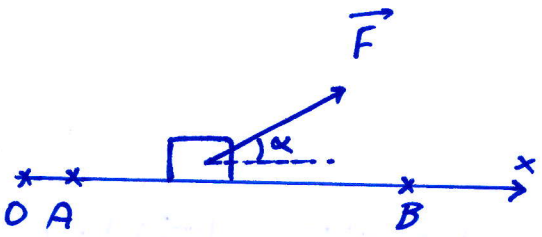
- عندما يكون $W_{A\to B} > 0$ لهما فإننا نقول عنه إنه عمل محرك. ففي هذه الحالة تسعى القوة إلى زيادة سرعة الجسم المتحرك

- عندما يكون $W_{A\to B} < 0$ لهما فإننا نقول عنه إنه عمل مقاوم. ففي هذه الحالة تعيق القوة الحركة وتسعى إلى تخفيض سرعة المتحرك.

- يقدر العمل في الجملة الدولية بالجول ونرمز له بـ J.

2- عمل قوة ثابتة على طريق مستقيمة:

لنفرض جسماً يمكنه أن يتحرك على طريق مستقيمة OX، بتأثير قوة ثابتة $\vec{F}$ (أي أن شدتها ثابتة واتجاهها ثابت) تصنع زاوية α مع ox عمل هذه القوة أثناء انتقال عنصري $\vec{dr} = dx\vec{i}$ هو:



$$\delta W = F.\, dr = F dx \cos\alpha$$

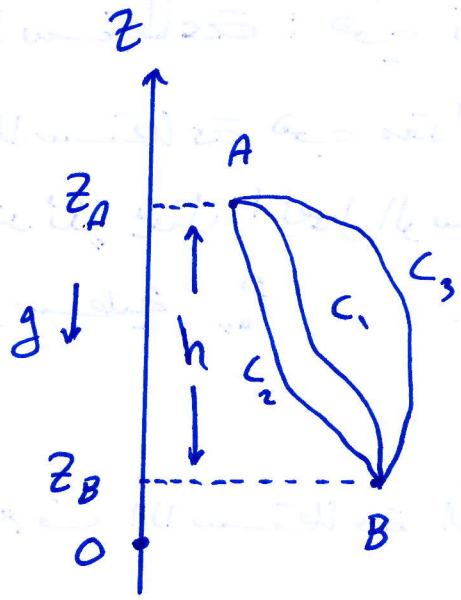
عندما ينتقل هذا الجسم من نقطة A إلى نقطة أخرى B فإن عمل القوة $\vec{F}$ يحسب من العلاقة

$$W_{A\to B} = F.\, AB.\, \cos\alpha = \vec{F}.\,\vec{AB}$$

3- عمل قوة الثقل: ليكن جسماً M ينتقل في الفضاء بين نقطتين A, B بتأثير عدة قوى إحداها قوة الثقل $\vec{P} = m\vec{g}$ ولنفترض أن $\vec{g}$ منتظم في هذه الحالة يكون العمل العنصري لقوة الثقل أثناء انتقال M انتقالاً عنصرياً $\vec{dr}$ هو

$$\delta W = \vec{P}.\,\vec{dr}$$

فإذا استخدمنا جملة احداثيات ديكارتية، فيها Oz شاقولي صاعد.



عمل قوة الثقل أثناء الانتقال من $A \leftarrow B$ له القيمة نفسها أيا كان الطريق المتبع للوصول من $B \leftarrow A$

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

$$\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

وتصبح عبارة العمل العنصري، بعد اجراء الجداء السلمي لهذين الشعاعين كما يلي:

$$\delta w = -mg\,dz$$

ويكون عمل قوة الثقل أثناء انتقال M من A إلى B هو:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{P}.\vec{dr} = \int_{z_A}^{z_B} -mg\,dz = -mg\,z_B + mg\,z_A$$

وبناء على ذلك نستطيع أن نكتب عمل قوة الثقل بين النقطتين B,A كما يلي:

$$W_{A\to B} = mg\,(z_A - z_B)$$

فعمل قوة الثقل يتعلق فقط بالنقطتين B,A، أي لا يتعلق هذا العمل بالطريق التي يسلكها الجسم M أثناء انتقاله من A إلى B بل يتعلق بفرق الارتفاع بينهما فقط (نقول عن هذه القوة إنها قوة محافظة)

عمل قوة الثقل: عند الهبوط $W = +mgh$؛ عند الصعود $W = -mgh$

حيث $h = |Z_A - Z_B|$ يمثل فرق الارتفاع بين النقطتين A, B

4- الاستطاعة: هي نسبة العمل على زمن انجاز هذا العمل

فالاستطاعة هي مقدار سلمي فعندما نقوم بعمل ما خلال مدة Δt فعندئذٍ يمثل: العمل الوسطي المبذول في واحدة الزمن الاستطاعة الوسطية P_{av}

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

- نعرف الاستطاعة الآنية P بإزاء Δt إلى الصفر

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{\delta W}{dt}$$

وتقدر الاستطاعة في الجملة الدولية بالواط ورمزه W

- يمكننا أن نعبر عن الاستطاعة بدلالة القوة والسرعة. لنفترض قوة $\vec{F}$ تؤثر في نقطة مادية سرعتها $\vec{v}$ في اللحظة t.

حيث أننا نعلم $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$

$$P_{av} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

وعندما نجعل Δt تتناهى إلى الصفر نحصل على الاستطاعة الآنية

$$P = F \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

5- نظرية الطاقة الحركية : نفرض M نقطة مادية تتحرك في جملة عطالية R بتأثير عدة قوى محصلتها $\vec{F}$ لنحسب العمل العنصري لهذه القوة :

$$\delta w = \vec{F}.\vec{dr} \quad ; \quad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \delta w = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{dr} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}dt = mv\,d\vec{v}$$

ولأن $v^2 = \vec{v}.\vec{v}$ فإن $2v\,dv = 2\vec{v}.d\vec{v}$

$$\delta w = mv\,dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

نعرف الطاقة الحركية E_c للنقطة المادية في اللحظة t بالعلاقة :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

فنلاحظ أن $\delta w = dE_c$

وعندما تنتقل M من نقطة A إلى نقطة أخرى B يكون عمل القوة $\vec{F}$ هو

$$W_{A\to B} = \int_A^B \delta w = \int_A^B dE_c = E_c(B) - E_c(A)$$

يمثل الفرق $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$ تغير الطاقة الحركية بين B, A

يمكن أن نكتب هذا العمل أخيراً

$$W_{A\to B} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

نظرية الطاقة الحركية « إن عمل محصلة القوى المؤثرة في نقطة مادية في جملة عطالية، أثناء انتقالها من نقطة A إلى نقطة أخرى B يساوي تغير الطاقة الحركية بين هاتين النقطتين »

6- الطاقة الكامنة :

بوجه عام نقول عن قوة ما $\vec{F}$ أنها قوة محافظة (أو مشتقة من طاقة الكامنة) إذا كان عملها لا يتعلق بالمسار المتبع أثناء الانتقال. نبرهن في هذه الحالة أنه يوجد تابع سلمي $U(x,y,z)$ بحيث :

$$(\vec{F} \text{ قوة محافظة}) \iff \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, U$$

ندعو المقدار السلمي $U(x,y,z)$ الطاقة الكامنة الموافقة للقوة $\vec{F}$.

عمل هذه القوة δW، أثناء انتقال عنصري $\vec{dr}$ هو:

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dr} = -\overrightarrow{grad}\, U . \vec{dr} = -dU$$

وعندما تنتقل النقطة المادية M، بتأثير هذه القوة، من نقطة A إلى نقطة أخرى B، يكون عمل القوة $\vec{F}$ أثناء هذا الانتقال هو :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = -\int_A^B dU = U_A - U_B$$

أي أن عمل القوة المحافظة يساوي تناقص الطاقة الكامنة :

$$\text{عمل قوة محافظة} \quad W_{A\to B} = U_A - U_B = -\Delta U$$

ملاحظة : الشرط اللازم والكافي لتكون $\vec{F}$ قوة محافظة هو أن يكون الشعاع $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}$ مساوي للصفر

a) الطاقة الكامنة الثقالية : قوة الثقل $\vec{P}$ تعطى بالعلاقة

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}\, U$$

في جملة الإحداثيات الديكارتية $Oxyz$ حيث المحور Oz شاقولي وموجه نحو الأعلى، تكافئ هذه العلاقة ما يلي

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix}$$

نستنتج من ذلك أن $0 = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dy}$ وهذا يعني أن الطاقة الكامنة U مستقلة عن x وعن y لكنها تابعة لـ z فقط. وفي هذه الحالة يصبح المشتق الجزئي $\frac{\partial U}{\partial z}$ مشتقاً "تاماً" يكتب $\frac{dU}{dz}$ ويكون لدينا

$$U = mgz + C \quad \Leftarrow \quad \frac{dU}{dz} = mg$$

حيث C ثابت يتعلق بالمرجع المختار للطاقة الكامنة

نختار مرجع الطاقة الكامنة عند $z=0$ غالباً" أي أننا نفترض $U_{(z=0)}=0$ وفي هذه الحالة نحصل على $C=0$ فتصبح عبارة الطاقة الكامنة الثقالية كما يلي: $U(z) = mgz$ حيث z موجه نحو الأعلى

نعلم أن عمل القوة المحافظة هو $W = -\Delta U$ ومن ثم

$$W_{A\to B} = -(mgz_B - mgz_A) = mg(z_A - z_B)$$

فالطاقة الكامنة الثقالية تتناقص أثناء الهبوط ويكون عمل قوة الثقل موجباً" (محركاً") كما أن الطاقة الكامنة الثقالية تتزايد أثناء الصعود، ويكون عمل قوة الثقل سالباً" (مقاوماً")

ملاحظة: في حال توجيه المحور الشاقولي z نحو الأسفل نبرهن أن

$$U(z) = -mgz$$

وبرغم تغير الإشارة، تتناقص هذه الطاقة الكامنة أثناء الهبوط وتتزايد أثناء الصعود

b) الطاقة الكامنة المرونية: نفرض أن جسماً ما، يتحرك حركة مستقيمة على محور x بتأثير نابض ثابت صلابته k نعلم أن النابض يؤثر في هذا الجسم بقوة إرجاع تعطى بالعلاقة:

$$\vec{F} = -kx\,\vec{i}$$

تمثل x هنا استطالة النابض.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,U$$ نبحث عن تابع الطاقة الكامنة U بحيث

$$\begin{vmatrix} -kx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix}$$

نستنتج من ذلك أن U تابع لـ x فقط بحيث: $\frac{dU}{dx} = kx$

وعلى هذا الطاقة الكامنة المرونية $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$

حيث C ثابت، يتعلق بمرجع الطاقة الكامنة. نختار $U_{(x=0)} = 0$ غالباً فيكون لدينا $C = 0$. نحصل أخيراً على الطاقة الكامنة المرونية بالصيغة:

$$U_{(x)} = \frac{1}{2}kx^2$$

c) الطاقة الكامنة التجاذبية: نفرض جسماً كتلته m_1 ساكناً في O ولنفترض أن جسماً آخر، كتلته m_2، يقع في نقطة A من الفضاء على بعد r من m_1. يؤثر الجسم m_1 في m_2 بقوة التجاذب الكوني التي تُعطى بقانون نيوتن

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\,\vec{u_r}$$

حيث $\vec{u_r}$ هو الشعاع الواحدي الموجه من O إلى A، كما في الإحداثيات الكروية، فإذا كان U تابع الطاقة الكامنة الموافقة لهذه القوة، فإن

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,U$$

يكون لدينا:

$$\begin{vmatrix} -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial U}{\partial r} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

نستنتج من ذلك أن $0 = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$ أي أن U لا يتعلق بـ θ ولا بـ φ، بل هو تابع لـ r فقط بحيث:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

نحصل بمكاملة طرفي هذه العلاقة على ما يلي:

$$U_{(r)} = -\frac{G m_1 m_2}{r} + c$$

حيث c ثابت يتعلق بمرجع الطاقة الكامنة، وغالباً ما يختار $U = 0$ في اللانهاية، فيكون لدينا $c = 0$ فالطاقة الكامنة التجاذبية هي إذن

$$U_{(r)} = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

تتناسب هذه الطاقة عكساً مع r

7 - الطاقة الميكانيكية:

وجدنا سابقاً أن تغير الطاقة الحركية بين نقطتين يساوي عمل محصلة القوى بين هاتين النقطتين

يمكننا في الواقع بعد أن عرفنا القوى المحافظة أن نعتبر محصلة القوى مجموع محصلتين، إحداهما محصلة القوى المحافظة ($\vec{F}_c$ نرمز لها بـ) والأخرى محصلة القوى غير المحافظة ($\vec{F}_{nc}$ نرمز لها) فيكون لدينا:

$$\Delta E_c = W(F_c) + W(\vec{F_{nc}})$$

لكن عمل القوى المحافظة يساوي تناقص الطاقة الكامنة U

$$W(\vec{F_c}) = -\Delta U$$

نستنتج من ذلك: $\Delta E_c = -\Delta U + W(\vec{F_{nc}})$

$$\Rightarrow \Delta E_c + \Delta U = W(F_{nc})$$

ويمكن أن نكتب هذه العلاقة بالصيغة التالية:

$$\Delta(E_c + U) = W(\vec{F_{nc}})$$

ندعو المجموع $E_c + U$ الطاقة الميكانيكية للنقطة المادية ونرمز له بـ E_m

الطاقة الميكانيكية $E_m = E_c + U$

نظرية الطاقة الميكانيكية $\Delta E_m = W(\vec{F_{nc}})$

إن تغير الطاقة الميكانيكية لنقطة مادية بين نقطتين يساوي مجموع أعمال القوى غير المحافظة فقط

وعندما يكون عمل القوى غير المحافظة صفراً: $W(\vec{F_{nc}}) = 0$ نحصل على $\Delta E_m = 0$

ومنه $E_m = cte$ أي أن الطاقة الميكانيكية مصونة عندما يكون عمل القوى غير المحافظة صفراً.

مثال 1 أثبت أن القوة التالية هي قوة محافظة ثم أوجد الطاقة الكامنة U الموافقة لها:

$$\vec{F} = 2a(x-y)\vec{i} - a(2x+y)\vec{j}$$

حيث a ثابت

الحل: نلاحظ أن

$$F_x = 2a(x-y)$$

$$F_y = -a(2x+y)$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -2a \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -2a$$

ومن ثم تكون القوة $\vec{F}$ قوة محافظة لأن

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

يوجد إذن تابع $U(x,y)$ بحيث $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,U$

نجد:

$$\boxed{1} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -2a(x-y)$$

$$\boxed{2} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = a(2x+y)$$

نكامل العلاقة 1 بالنسبة لـ x فنحصل على:

$$\boxed{3} \quad U(x,y) = -2a\left(\frac{1}{2}x^2 - yx\right) + h(y)$$

حيث $h(y)$ هو ثابت لا يتعلق بـ x لكنه يمكن أن يتعلق بـ y

يجب أن تحقق هذه الطاقة العلاقة (2) أيضاً لذلك نشتق العلاقة 3 أولاً بالنسبة لـ y فنجد:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2a(0-x) + \frac{dh}{dy}$$

بمقارنة هذه العلاقة بـ 2 نستنتج أن:

$$2ax + \frac{dh}{dy} = a(2x+y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dy} = ay$$

$$\Rightarrow \quad h(y) = \frac{1}{2} a y^2 + c$$

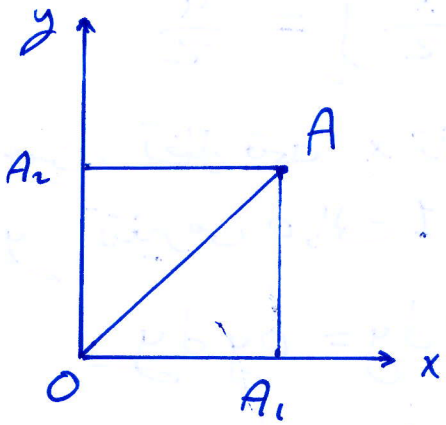
حيث c ثابت نعوض عبارة $h(y)$ في 3 فنحصل أخيراً على الطاقة الكامنة الموافقة للقوة $\vec{F}$

$$V_{(x,y)} = -2a\left(\frac{1}{2}x^2 - yx\right) + \frac{1}{2}ay^2 + c$$

مثال 2 لدينا القوة $\vec{F}$ معطاة بالعلاقة التالية:

$$\vec{F} = a(x+2y)\vec{i} + bxy\,\vec{j}$$

لنحسب عمل هذه القوة لدى انتقالها بين النقطتين $O(0,0)$ و $A(1,1)$ الاحداثيات مقدرة بالمتر وذلك باتباع طريق مستقيم مباشر من O إلى A ثم باتباع الطريق OA_1A حيث A_1 مسقط A على المحور Ox



الحل: العمل العنصري لهذه القوة أثناء انتقال عنصري هو:

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dr} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

$$= a(x+2y)\,dx + bxy\,dy$$

اذا اتبعنا الطريق المستقيمة المباشرة OA نلاحظ أن ثمة علاقة بين x و y أثناء هذا الانتقال هي معادلة المستقيم OA وهي $y = x$ نستنتج من ذلك أن $dx = dy$ يؤدي:

$$\delta W = a(x+2x)\,dx + bx.x\,dx = (3ax + bx^2)\,dx$$

ويكون عمل القوة $\vec{F}$ أثناء الانتقال من O إلى A على المستقيم OA:

$$W_{OA} = \int_O^A \vec{F}.\vec{dr} = \int_{x=0}^{x=1} (3ax + bx^2)\,dx$$

$$= \left[3a\frac{x^2}{2} + b\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3a}{2} + \frac{b}{3}$$

على المسار OA_1A فيمكن اعتبار عمل القوة $\vec{F}$ مجموع عملين الأول أثناء الانتقال OA_1 والآخر لدى الانتقال A_1A ونلاحظ أنه أثناء الانتقال OA_1 على المحور Ox تبقى قيمة y ثابتة $(y=0)$ لذا $dy=0$ على حين تتغير x من 0 إلى 1 وعلى هذا

$$\delta W = a(x+0)dx + bx.0.0 = ax\,dx$$

ومنه

$$W_{OA_1} = \int_0^{A_1} \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^1 ax\,dx = \left[a\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{a}{2}$$

على حين تظل قيمة x ثابتة $(x=1)$ أثناء الانتقال A_1A ومن ثم $dx=0$ لكن y تتغير من 0 إلى 1 خلال هذا الانتقال نستنتج من ذلك

$$\delta w = a(1+2y).0 + b.1.y\,dy = by\,dy$$

ومنه

$$W_{A_1A} = \int_{A_1}^{A} \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^1 by\,dy = \left[b\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{b}{2}$$

نستنتج مما سبق أن عمل القوة $\vec{F}$ أثناء الانتقال OA_1A هو

$$W_{OA_1A} = W_{OA_1} + W_{A_1A} = \frac{a+b}{2}$$

بالمقارنة بين عمل W_{OA_1A} وعمل W_{OA} أثناء الانتقال المباشر نجد أنهما مختلفان في الحالة العامة (لقيم a, b) ومن ثم يتعلق عمل القوة $\vec{F}$ بالطريق المتبع للوصول من O إلى A