

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

اسئلة دورات محلولة

تولوجيا

A 2 Z LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

اسم الطالب:

المدة: ساعتان

الدرجة: 90

امتحان مقرر تبولوجيا 1

الدورة الفصلية الثانية - سنة ثانية رياضيات

العام الدراسي 2024-2025م

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (54 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

داخلية مجموعة - قطر المجموعة - قاعدة التبولوجيا - النقطة اللاصقة لمجموعة - المجموعة الكثيفة - الكرة المغلقة في الفضاء المترى - النقطة الجبهية لمجموعة.

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\{5,10\} \subseteq T \cup \{\emptyset\}$; $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{1,5,8,10\}$ ثم أوجد كلاً من $\bar{A}$, $ex(A)$, $\bar{A}$, $bd(A)$, $V(A)$, $Is(A)$.
4. هل المجموعة $C = \{3,7,12\}$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\{5,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
6. أعط مثلاً لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثلاً لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (36 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إن أية كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء مترى (E, d) .
 2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bar{A} \cup A$.
- (2) لنأخذ في الفضاء المترى $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ الفضاء الجزئي $([-3,12], | \cdot |)$ ، ولتكن $B =]1,4[$ والمطلوب:

1. أوجد $\bar{B}$ و B° في الفضاء الجزئي $([-3,12], | \cdot |)$.
2. عيّن شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المترى $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ مع الشرح.
3. أثبت أن الفضاء المترى $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ فضاء تام.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرطوس

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (54 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

داخلية مجموعة - قطر المجموعة - قاعدة التبولوجيا - النقطة اللاصقة لمجموعة - المجموعة الكثيفة - الكرة المغلقة في الفضاء المترى - النقطة الجبهية لمجموعة. (درجتان لكل تعريف - المجموع 10 درجات)

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\{5,10\} \subseteq T \cup \{\emptyset\}$; $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{1,5,8,10\}$ ثم أوجد كلاً من $\bar{A}$, $ex(A)$, $\bar{A}$, $bd(A)$, $V(A)$, $Is(A)$.
4. هل المجموعة $C = \{3,7,12\}$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\{5,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
6. أعط مثلاً لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثلاً لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحل:

1. (15 درجة)

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$\{5,10\} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنه أيّاً كان $T, G \in \tau$ فإن $T \cap G \in \tau$.

نميز حالتين:

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{5,10\} \subseteq T$$

$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{5,10\} \subseteq G$$

عندئذ $T \cap G \in \tau$ بالتالي $T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ & $\{5,10\} \subseteq T \cap G$

• لتكن لدينا الأسرة τ ولنثبت أن $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيًا كان $i \in I$ فإن $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau$

إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $\{5,10\} \subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{5,10\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.

$$(3 \text{ درجات}) \quad \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{5,10\} \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\} \quad 2.$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{A}: \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } A \Leftarrow A \quad 3.$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{ex(A)}: \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } N \setminus A \Leftarrow N \setminus A$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{\bar{A}}: \text{أصغر مجموعة مغلقة تحوي } A \Leftarrow \bar{A} = N \setminus A$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{bd(A)}: \text{أصغر مجموعة مغلقة تحوي } A \Leftarrow \bar{A} \setminus \underline{A} = N \setminus A$$

$$(2 \text{ درجات}) \quad \underline{V(A)}$$

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{1,5,8,10\} \subseteq v\}$$

$$(4 \text{ درجات}) \quad \underline{Is(A), \underline{A}}$$

$$\bar{A} = \underline{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{N} = \underline{A} \cup \{1,5,8,10\} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1,5,8,10\} \subseteq \underline{A}$$

لندرس نقاط A

$$x = 1 \Rightarrow V(1) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{1,5,10\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(1) \Rightarrow \{1,5,10\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{1\}$$

$$\Rightarrow 1 \notin Is(A), 1 \in \underline{A}$$

$$x = 5 \Rightarrow V(5) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{5,10\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(5) \Rightarrow \{5,10\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{5\}$$

$$\Rightarrow 5 \notin Is(A), 5 \in \underline{A}$$

$$x = 8 \Rightarrow V(8) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{5,8,10\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(8) \Rightarrow \{5,8,10\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{8\}$$

$$\Rightarrow 8 \notin Is(A), 8 \in \underline{A}$$

$$x = 10 \Rightarrow V(10) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{5,10\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(10) \Rightarrow \{5,10\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{10\}$$

$$\Rightarrow 10 \notin Is(A), 10 \in \underline{A}$$

$$\underline{A} = \mathbb{N}, Is(A) = \emptyset$$
 ومنه نجد

$$4. \quad \bar{C} = \mathbb{N} \text{ تكون } C \text{ كثيفة في كل مكان إذا تحققت العلاقة}$$

$$\bar{C} = C \Rightarrow \bar{C} \neq \mathbb{N}$$

$$(2 \text{ درجات}) \quad \text{بالتالي } C \text{ ليست كثيفة في كل مكان.}$$

$$5. (2 \text{ درجات})$$

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

- $\beta \subseteq \tau$
- $\forall T \in \tau \Rightarrow T = \bigcup_{B_i \in \beta} B_i$

الشرط الأول غير محقق لأنه توجد المجموعة β $\{5,7\} \subseteq \beta$ ولكن $\{5,7\} \notin \tau$ ، وكذلك الشرط الثاني غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة المفتوحة $\{5,10\}$ لا يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصر من الأسرة β .

$$\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{2,5,10\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\} \quad 6.$$

$$\tau_1 \subseteq \tau$$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . (2 درجات)
(توجد أمثلة كثيرة)

$$\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{5\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\} \quad 7.$$

$$\tau \subseteq \tau_2$$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . (2 درجات)

السؤال الثاني: (36 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إنَّ أيّة كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء متري (E, d) .

2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التوبولوجي (E, τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bar{A} \cup A$.

(2) لنأخذ في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ الفضاء الجزئي $(]-3,12], | \cdot |)$ ، ولتكن $B =]1,4[$ والمطلوب:

1. أوجد $\bar{B}$ و B° في الفضاء الجزئي $(]-3,12], | \cdot |)$.
2. عيّن شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ مع الشرح.
3. أثبت أن الفضاء المتري $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ فضاء تام.

الحل:

(1) (12 درجة لإثبات صحة القضية المختارة)

(2)

1. (12 درجة)

$$\begin{aligned} \diamond \bar{B}_{]-3,12]} &= \bar{B}_{\mathbb{R}} \cap]-3,12] = [1,4] \cap]-3,12] = [1,4] \\ \diamond B^\circ_{]-3,12]} &\supseteq B^\circ_{\mathbb{R}} \cap]-3,12] =]1,4[\cap]-3,12] =]1,4[\end{aligned}$$

لندرس النقطة $x = 4$:

من أجل $x = 4$ إن أي كرة مفتوحة في الفضاء $(]-3,12], | \cdot |)$ هي عبارة عن مجال (مفتوح أو مغلق أو

نصف مفتوح) مركزه 4 لن يكون محتوي في $B =]1,4[$ $4 \notin B^\circ_{]-3,12]}$

$$\text{وبالتالي } B^\circ_{]-3,12]} =]1,4[$$

2. (6 درجات)

ليكن (u_n) متتالية أساسية كيفية من نقاط الفضاء $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ ولنبين أنها متقاربة فيه إلى إحدى نقاطه.

بما أن (u_n) متتالية أساسية فبحسب النتيجة " إن أية متتالية أساسية في أي فضاء متري هي متتالية محدودة " بالتالي المتتالية (u_n) محدودة، ونعلم أن أية متتالية محدودة في $\mathbb{R}$ تملك متتالية جزئية متقاربة، أي توجد متتالية جزئية من (u_n) مثل (u_{n_k}) بحيث المتتالية الجزئية (u_{n_k}) متقاربة في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ من نقطة مثل u_0 وبحسب النتيجة " إذا كانت (u_n) متتالية أساسية و (u_{n_k}) متتالية جزئية منها بحيث أن (u_{n_k}) متقاربة في (E, d) من u_0 فإن المتتالية الأساسية (u_n) تتقارب في (E, d) من u_0 أيضاً " نجد أن متقاربة في u_0 .
وبمراعاة الاختيار الكيفي للمتتالية (u_n) الأساسية في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ يكون الفضاء $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ تام.
3. عيّن شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ مع الشرح. (6 درجات)

ملاحظة

بعض التمارين تُحلّ بأكثر من طريقة، فأی طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

اسم الطالب:	امتحان مقرر تبولوجيا 1	جامعة طرطوس
المدة: ساعتان	الدورة الفصلية الأولى - سنة ثانية رياضيات	كلية العلوم
الدرجة: 90	العام الدراسي 2024-2025م	قسم الرياضيات

السؤال الأول: (55 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

قطر المجموعة - قاعدة التبولوجيا - النقطة المنعزلة لمجموعة - المجموعة الكثيفة في كل مكان - داخلية مجموعة - الكرة المفتوحة في الفضاء المترى - النقطة اللاصقة لمجموعة.

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\{7,9\} \subseteq T \cup \{\emptyset\}$; $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعزف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{1,7,8,9\}$ وأوجد كلاً من $\bar{A}$, $ex(A)$, $bd(A)$, $Is(A)$, $V(A)$.
4. هل المجموعة $C = \{1,2\}$ كثيفة في A .
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\{5,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (35 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إن أية كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء مترى (E, d) .
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = A \cup A$.
- (2) لتأخذ في الفضاء المترى $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ الفضاء الجزئي $([-3,12], | \cdot |)$ ، ولتكن $B =]-2,2[$ والمطلوب:
 1. أوجد $\bar{B}$ و B° في الفضاء الجزئي $([-3,12], | \cdot |)$.
 2. أثبت أن الفضاء المترى $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ فضاء تام.
- (3) عيّن شكل الكرات المغلقة في الفضاء المترى المنقطع (E, d) مع الشرح، ثم أعط مثلاً يبين أنه ليس بالضرورة كل مجاورة لنقطة هي جوار لهذه النقطة في الفضاء المترى المنقطع (E, d) .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

د. بشرى دراج



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا I لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة الفصلية الأولى - العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (55 درجة)

- (1) عرّف خمسية مفاهيم مما يلي:
 قطر المجموعة - قاعدة التبولوجيا - النقطة المنعزلة لمجموعة - المجموعة الكثيفة في كل مكان - داخلية مجموعة - الكرة المفتوحة في الفضاء المترى - النقطة اللاصقة لمجموعة. (3 درجات لكل تعريف يتم اختياره)، المجموع 15 درجة.
- (2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية N الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(N) ; \{7,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:
 1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على N .
 2. عين أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي (N, τ) .
 3. خذ المجموعة $A = \{1,7,8,9\}$ وأوجد كلًا من $\bar{A}$, $ex(A)$, $bd(A)$, $Is(A)$, $V(A)$.
 4. هل المجموعة $C = \{1,2\}$ كثيفة في A .
 5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(N) ; \{5,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
 6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
 7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحل:

1. (9 درجات)

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$\{7,9\} \subseteq N \Rightarrow N \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنه أيًا كان $T, G \in \tau$ فإن $T \cap G \in \tau$

نميز حالتين:

الحالة الأولى: $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية: $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(N) ; \{7,9\} \subseteq T$$

$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(N) ; \{7,9\} \subseteq G$$

عندئذ $T \cap G \in \mathcal{P}(N)$ و $\{7,9\} \subseteq T \cap G$ بالتالي $T \cap G \in \tau$

- لتكن لدينا الأسرة τ ولتثبت أن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيًا كان $i \in I$ فإن $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau$
 إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $\{7,9\} \subseteq G_{i_0}$ عندئذ
 $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{7,9\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$
 من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.

2. $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{7,9\} \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\}$ (درجات 2)

3. $\bar{A}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A $\bar{A} = A \iff A$ (درجات 3)

$ex(A)$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $\mathbb{N} \setminus A$ $ex(A) = \emptyset \iff \mathbb{N} \setminus A$ (درجات 3)

$\bar{A}$: أصغر مجموعة مغلقة تحوي A $\bar{A} = \mathbb{N} \iff A$ (درجات 3)

$bd(A) = \bar{A} \setminus A = \mathbb{N} \setminus A$: $bd(A)$ (درجات 3)

$V(A)$: (درجات 3)

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{1,7,8,9\} \subseteq v\}$$

$Is(A), \bar{A}$: (درجات 6)

$$\bar{A} = \bar{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{N} = \bar{A} \cup \{1,7,8,9\} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1,7,8,9\} \subseteq \bar{A}$$

لندرس نقاط A

$$x = 1 \Rightarrow V(1) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{1,7,9\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(1) \Rightarrow \{1,7,9\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{1\}$$

$$\Rightarrow 1 \notin Is(A), 1 \in \bar{A}$$

$$x = 7 \Rightarrow V(7) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{7,9\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(7) \Rightarrow \{7,9\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{7\}$$

$$\Rightarrow 7 \notin Is(A), 7 \in \bar{A}$$

$$x = 8 \Rightarrow V(8) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{7,8,9\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(8) \Rightarrow \{7,8,9\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{8\}$$

$$\Rightarrow 8 \notin Is(A), 8 \in \bar{A}$$

$$x = 9 \Rightarrow V(9) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{7,9\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(9) \Rightarrow \{7,9\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{9\}$$

$$\Rightarrow 9 \notin Is(A), 9 \in \bar{A}$$

ومنه نجد $\bar{A} = \mathbb{N}, Is(A) = \emptyset$

4. تكون C كثيفة في A إذا تحققت العلاقة $A \subseteq \bar{C}$

$$\bar{C} = C \Rightarrow A \not\subseteq \bar{C}$$

بالتالي C ليست كثيفة في A . (درجات 2)

5. (2 درجات)

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

- $\beta \subseteq \tau$
- $\forall T \in \tau \Rightarrow T = \bigcup_{B_i \in \beta} B_i$

دروس

الشرط الأول غير محقق لأنه توجد المجموعة β $\{5,7\} \subseteq \tau$ ولكن $\{5,7\} \notin \tau$ ، وكذلك الشرط الثاني غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة المفتوحة $\{7,9\}$ لا يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصر من الأسرة β .

$$6. \tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,7,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\tau_1 \subseteq \tau$$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . (2 درجات)
(توجد أمثلة كثيرة)

$$7. \tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\tau \subseteq \tau_2$$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . (2 درجات)

السؤال الثاني: (35 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين: (12 درجة للقضية المختارة)

1. إن أية كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء مترى (E, d) .

2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التوبولوجي (E, τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bar{A} \cup A$.

(2) لنأخذ في الفضاء المترى $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ الفضاء الجزئي $(]-3,12], | \cdot |)$ ، ولتكن $B =]-2,2[$ والمطلوب:

1. أوجد $\bar{B}$ و $\hat{B}$ في الفضاء الجزئي $(]-3,12], | \cdot |)$.

2. أثبت أن الفضاء المترى $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ فضاء تام.

الحل: 1. (6 درجات)

$$\begin{aligned} \diamond \bar{B}_{]-3,12]} &= \bar{B}_{\mathbb{R}} \cap]-3,12] = [-2,2] \cap]-3,12] = [-2,2] \\ \diamond \hat{B}_{]-3,12]} &= \hat{B}_{\mathbb{R}} \cap]-3,12] \end{aligned}$$

إيجاد $\hat{B}_{\mathbb{R}}$:

من العلاقة $\bar{B}_{\mathbb{R}} = \hat{B}_{\mathbb{R}} \cup B$ نجد $\bar{B}_{\mathbb{R}} = \hat{B}_{\mathbb{R}} \cup]-2,2[$ وبالتالي $[-2,2] = \hat{B}_{\mathbb{R}} \cup]-2,2[$ ، ولأن لندرس نقاط B

لتكن $x \in B$ نقطة كيفية ولتكن $N(x, \rho)$ كرة مفتوحة كيفية في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ مركزها x أي

$$N(x, \rho) =]x - \rho, x + \rho[\Rightarrow N(x, \rho) \cap B =]x - \rho, x + \rho[\cap]-2,2[$$

إن $x \in]x - \rho, x + \rho[\cap]-2,2[$ أي أن هذين المجالين متقاطعين ونعلم أن ناتج تقاطع مجالين مفتوحين هو مجال مفتوح ومنه $N(x, \rho) \cap B$ مجموعة غير منتهية من نقاط B .

وبمراعاة الاختيار الكيفي للكرة المفتوحة تكون $x \in \hat{B}_{\mathbb{R}}$ ، وبما أن x كيفية فإن كل نقاط B هي نقاط تراكم لها.

$$\hat{B}_{\mathbb{R}} = B \cap \{-2,2\} = [-2,2] \Rightarrow \hat{B}_{]-3,12]} = [-2,2] \cap]-3,12] = [-2,2]$$

2. (5 درجات)

ليكن (u_n) متتالية أساسية كيفية من نقاط الفضاء $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ ولنبين أنها متقاربة فيه إلى إحدى نقاطه.

بما أن (u_n) متتالية أساسية فيحسب النتيجة " إن أية متتالية أساسية في أي فضاء مترى هي متتالية محدودة " بالتالي

المتتالية (u_n) محدودة، ونعلم أن أية متتالية محدودة في $\mathbb{R}$ تملك متتالية جزئية متقاربة، أي توجد متتالية جزئية من (u_n)

مثل (u_{n_k}) بحيث المتتالية الجزئية (u_{n_k}) متقاربة في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ من نقطة مثل u_0 وبحسب النتيجة " إذا كانت (u_n)

متتالية أساسية و (u_{n_k}) متتالية جزئية منها بحيث أن (u_{n_k}) متقاربة في (E, d) من u_0 فإن المتتالية الأساسية (u_n)

تتقارب في (E, d) من u_0 أيضاً " نجد أن متقاربة في من u_0 .

وبمراعاة الاختيار الكيفي للمتتالية (u_n) الأساسية في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ يكون الفضاء $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ تام.

3) تعيين شكل الكرات المغلقة في الفضاء المتري المنقطع (6 درجات)

المثال (6 درجات)

في الفضاء المتري المنقطع $(\mathbb{N}, d)$ المجموعة $A = \{3, 7\}$ هي مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء لأنها اجتماع لكرتين مفتوحتين $A = N(3, \frac{1}{2}) \cup N(7, \frac{1}{2})$ ومنه تكون A مجاورة لكل نقطة من نقاطها، (المجموعة المفتوحة مجاورة لكل نقطة من نقاطها) أي A مجاورة لـ $x = 3$

الجوار $x = 3$ هو كرة مفتوحة مركزها 3 ومن المعلوم أن الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المنقطع شكلها

$$N(3, \rho) = \begin{cases} \emptyset & ; \rho = 0 \\ \{3\} & ; 0 < \rho \leq 1 \\ \mathbb{N} & ; \rho > 1 \end{cases}$$

فلاحظ مهما $\rho \geq 0$ فإن $A \neq N(3, \rho)$ أي A ليس جوار لـ 3 في الفضاء $(\mathbb{N}, d)$ المنقطع.

ملاحظة

بعض التمارين تُحلّ بأكثر من طريقة، فأى طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشري دراج

اسم الطالب:

المدة: ساعتان

الدرجة: 90

امتحان مقرر تبولوجيا 1

سنة ثانية رياضيات

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2023-2024 م

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (60 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

نقطة التراكم في مجموعة - المجموعة الكثيفة في كل مكان - خارجية مجموعة - النقطة المنعزلة لمجموعة - البعد بين مجموعتين - قاعدة التبولوجيا - الكرة المغلقة في الفضاء المتري.

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\{ \emptyset \} \cup \{ T \mid 1,5 \leq T \}$ ، $\tau = \{ T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \dots \}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = [-2, 7[$ و أوجد كلاً من $\bar{A}$ ، $ex(A)$ ، $\bar{A}$ ، $Is(A)$ ، $V(A)$ ، $bd(A)$.
4. هل المجموعة A كثيفة في المجموعة $C =]5, 13]$.
5. هل الأسرة $\beta = \{ B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid [0, 5] \subseteq B \} \cup \{ \emptyset \}$ تشكل قاعدة لـ τ .
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (30 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E, d) فضاءً مترياً تاماً و (X, d) فضاءً مترياً جزئياً منه عندئذ يكون الفضاء الجزئي (X, d) تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E, d) .
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) عندئذ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bar{A} \cup A$.

(2) ليكن $(\mathbb{R}^3, d)$ الفضاء المتري الإقليدي ، والمطلوب:

- a. تحقق أن الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا، حيث $X = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3 \}$
- b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{-n}{2n-1}, -2 \right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$.

(3) عيّن شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المنقطع (E, d) مع الشرح.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الفصل الثاني - العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (60 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

نقطة التراكم في مجموعة - المجموعة الكثيفة في كل مكان - خارجية مجموعة - النقطة المنعزلة لمجموعة - البعد بين مجموعتين - قاعدة التبولوجيا - الكرة المغلقة في الفضاء المترى. (ثلاث درجات لكل تعريف يتم اختياره). المجموع 15 درجات

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; 1,5[\subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ و $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; 1,5[\subseteq T\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = [-2, 7[$ و أوجد كلاً من $\bar{A}$ ، $ex(A)$ ، $\bar{A}$ ، $bd(A)$ ، $V(A)$ ، $Is(A)$ ، $\bar{A}$.
4. هل المجموعة A كثيفة في المجموعة $C =]5, 13]$.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; [0, 5] \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحل:

1. (9 درجات)

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$]1,5[\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنه إذا كان $T, G \in \tau$ فإن $T \cap G \in \tau$

نميز حالتين:

(درج)

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad]1,5[\subseteq T$$

$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad]1,5[\subseteq G$$

$$T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \& \quad]1,5[\subseteq T \cap G$$

بالتالي $T \cap G \in \tau$

• لنكن لدينا الأسرة τ ولنثبت أن $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

نميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيًا كان $i \in I$ فإن $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية: إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $]1,5[\subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad]1,5[\subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرف تيولوجيا على $\mathbb{R}$.

$$2. \quad \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad]1,5[\cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$3. \quad \underline{A} : \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } A \iff A = \underline{A} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{ex}(A) : \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } \mathbb{R} \setminus A \iff ex(A) = \emptyset \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\bar{A} : \text{أصغر مجموعة مغلقة تحوي } A \iff \bar{A} = \mathbb{R} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{bd}(A) : \underline{bd}(A) = \bar{A} \setminus \underline{A} = \mathbb{R} \setminus A \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{V}(A) : (3 \text{ درجات})$$

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad [-2,7[\subseteq v\}$$

$$\underline{Is}(A), \bar{A} \quad (6 \text{ درجات})$$

$$\bar{A} = \underline{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{R} = \underline{A} \cup A$$

لندرس نقاط A

$$\forall x \in A \Rightarrow V(x) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad \{x\} \cup]1,5[\subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(x) \Rightarrow \{x\} \cup]1,5[\subseteq v \cap A \neq \emptyset, \{x\}$$

$$\Rightarrow x \notin Is(A), x \in \bar{A}$$

$$\bar{A} = \mathbb{R}, Is(A) = \emptyset \text{ ومنه نجد}$$

$$4. \quad \text{تكون } A \text{ كثيفة في } C \text{ إذا تحققت العلاقة } C \subseteq \bar{A}$$

$$\text{ولدينا } \bar{A} = \mathbb{R} \text{ بالتالي } A \text{ كثيفة في } C. \quad (3 \text{ درجات})$$

$$5. \quad (3 \text{ درجات})$$

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

$$\bullet \quad \beta \subseteq \tau$$

برسي

• $\forall T \in \tau \Rightarrow T = \bigcup_{B_i \in \beta} B_i$

الشرط الثاني غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة $[1,7]$ تنتمي للتوبولوجيا τ ولكن لا يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصر من

الأسرة β .

6. $\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; [0,6] \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau_1 \subseteq \tau$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . (3 درجات)

(توجد أمثلة كثيرة)

7. $\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; [2,4[\subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau \subseteq \tau_2$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . (3 درجات)

السؤال الثاني: (30 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E, d) فضاء مترياً تاماً و (X, d) فضاء مترياً جزئياً منه عندئذ يكون الفضاء الجزئي (X, d) تاماً إذا وفقط

إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E, d) .

2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التوبولوجي (E, τ) عندئذ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bar{A} \cup A$.

(2) ليكن $(\mathbb{R}^3, d)$ الفضاء المترى الإقليدي ، والمطلوب:

a. تحقق أن الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3\}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{-n}{2n-1}, -2\right)$ محدودة في الفضاء المترى الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$.

(3) عيّن شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المترى المنقطع (E, d) مع الشرح.

الحل:

(1) (10 درجات للقضية المختارة)

(2) a. (8 درجات)

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3\} \\ \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus X &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 > 3\} \cup \\ &\quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 < 3\} \end{aligned}$$

نأخذ

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 < 3\}$$

وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3, d)$ مركزها $(-3, 0, 1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$ فهي مجموعة مفتوحة (لأن كل كرة مفتوحة هي

مجموعة مفتوحة)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 > 3\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 3\}$$

وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^3, d)$ مركزها $(-3, 0, 1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$ فهي مجموعة مغلقة (لأن كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة) وبالتالي D مجموعة مفتوحة.

إذا $\mathbb{R}^2 \setminus X$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع مجموعتين مفتوحتين ومنه X مجموعة مغلقة.

ومنه (X, d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E, d) فضاء تام و (X, d) فضاء جزئي من (E, d) عندئذ يكون (X, d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي $((E, d))$.

b. (6 درجات)

تكون المتتالية u_n متقاربة في الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$ إذا كانت متتالية كل مسقط متقاربة في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ ، ولدينا $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = (0, \frac{-1}{2}, -2) \Leftarrow$ المتتالية u_n متقاربة في $(\mathbb{R}^3, d) \Leftarrow$ المتتالية u_n محدودة في $(\mathbb{R}^3, d)$ ، لأن كل متتالية متقاربة محدودة.

3) تعيين شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المترى المنقطع (6 درجات)

ملاحظة

بعض التمارين تُحلّ بأكثر من طريقة، فأی طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشرى دراج



السؤال الأول: (55 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

النقطة المنعزلة لمجموعة - المجموعة الكثيفة - النقطة الجبهية لمجموعة - النقطة اللاصقة لمجموعة - البعد بين مجموعتين - قاعدة التبولوجيا - سطح الكرة في الفضاء المترى.

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); [-2, 7] \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = [-4, 1]$ و أوجد كلاً من $\bar{A}$, $Is(A)$, $V(A)$, $bd(A)$, $\bar{A}$, $ex(A)$, $\bar{A}$.
4. هل المجموعة $C =]8, 13[$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); [2, 7[\subseteq B\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (35 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إن أية كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء مترى (E, d) .
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) وكانت $\{G_i; i \in I\}$ أسرة جميع المجموعات المفتوحة في (E, τ) والتي كل منها تحقق العلاقة $G_i \subseteq A \quad \forall i \in I$ عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bigcup_{i \in I} G_i$.

(2) ليكن $(\mathbb{R}^2, d)$ الفضاء المترى الإقليدي، والمطلوب:

- a. تحقق أن الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا، حيث $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$
 - b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{4}{n+2}, \frac{-n}{-3n+1}\right)$ محدودة في الفضاء المترى الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$.
- (3) عيّن شكل الكرات المغلقة في الفضاء المترى المنقطع (E, d) مع الشرح، ثم أعط مثال يبين أنه ليس بالضرورة كل مجاورة لنقطة هي جوار لهذه النقطة في الفضاء المترى المنقطع (E, d) .

انتهت الأسئلة



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرطوس

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الفصل الأول - العام الدراسي 2023-2024

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (55 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

النقطة المنعزلة لمجموعة - المجموعة الكثيفة - النقطة الجبهية لمجموعة - النقطة اللاصقة لمجموعة - البعد بين مجموعتين - قاعدة التبولوجيا - سطح الكرة في الفضاء المترى. (درجتان لكل تعريف يتم اختياره). المجموع 10 درجات

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\{0\} \cup \{T \mid -2,7] \subseteq T\}$; $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid -2,7] \subseteq T\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = [-4,1]$ و أوجد كلاً من $\bar{A}$ ، $ex(A)$ ، $\bar{A}$ ، $bd(A)$ ، $V(A)$ ، $Is(A)$ ، $\bar{A}$.
4. هل المجموعة $C =]8,13[$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid [2,7] \subseteq B\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحل:

1. (9 درجات)

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$]-2,7] \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنه أيّا كان $T, G \in \tau$ فإن $T \cap G \in \tau$

نميز حالتين:

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{R});]-2,7] \subseteq T$$

$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{R});]-2,7] \subseteq G$$

$$\text{عندئذ } T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ \& }]-2,7] \subseteq T \cap G$$

$$\text{بالتالي } T \cap G \in \tau$$

• لتكن لدينا الأسرة τ $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

نميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيًا كان $i \in I$ فإن $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية: إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $]-2,7] \subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R});]-2,7] \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.

$$2. \quad \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R});]-2,7] \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$3. \quad \underline{A} : \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } A \iff A = \emptyset \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{ex(A)} : \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } \mathbb{R} \setminus A \iff ex(A) = \emptyset \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\bar{A} : \text{أصغر مجموعة مغلقة تحوي } A \iff \bar{A} = \mathbb{R} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{bd(A)} : \text{ } bd(A) = \bar{A} \setminus \underline{A} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{V(A)} : (3 \text{ درجات})$$

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); [-4,7] \subseteq v\}$$

$$\underline{Is(A), \hat{A}} : (6 \text{ درجات})$$

$$\bar{A} = \hat{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{R} = \hat{A} \cup A$$

لندرس نقاط A

$$\forall x \in A \Rightarrow V(x) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \{x\} \cup]-2,7] \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(x) \Rightarrow \{x\} \cup]-2,1] \subseteq v \cap A \neq \emptyset, \{x\}$$

$$\Rightarrow x \notin Is(A), x \in \hat{A}$$

$$\hat{A} = \mathbb{R}, Is(A) = \emptyset \text{ ومنه نجد } \hat{A} = \mathbb{R}, Is(A) = \emptyset$$

4. تكون C كثيفة في كل مكان إذا تحققت العلاقة $\bar{C} = \mathbb{R}$

ولدينا $\bar{C} = C$ بالتالي C ليست كثيفة في كل مكان. (3 درجات)

5. (3 درجات)

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

$$\bullet \quad \beta \subseteq \tau$$

د. محمد

• $\forall T \in \tau \Rightarrow T = \bigcup_{B_i \in \beta} B_i$

الشرط الأول غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة $[0,7]$ تنتمي للأسرة β ولكن لا تنتمي للتبولوجيا τ .

6. $\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; [-2,9] \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau_1 \subseteq \tau$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . (3 درجات)

(توجد أمثلة كثيرة)

7. $\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; [3,7] \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau \subseteq \tau_2$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . (3 درجات)

السؤال الثاني: (35 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إنَّ أيّة كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء متري (E, d) .

2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) وكانت $\{G_i ; i \in I\}$ أسرة جميع المجموعات المفتوحة في

(E, τ) والتي كل منها تحقق العلاقة $G_i \subseteq A \quad \forall i \in I$ عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bigcup_{i \in I} G_i$.

(2) ليكن $(\mathbb{R}^2, d)$ الفضاء المتري الإقليدي، والمطلوب:

a. تحقق أنَّ الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x+2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{4}{n+2}, \frac{-n}{-3n+1}\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$.

(3) عيّن شكل الكرات المغلقة في الفضاء المتري المنقطع (E, d) مع الشرح، ثم أعط مثال يبين أنه ليس بالضرورة كل مجاورة للنقطة

هي جوار لهذه النقطة في الفضاء المتري المنقطع (E, d) .

الحل:

(1) (10 درجات للقضية المختارة)

(2) a. (10 درجات)

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x+2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$$

نأخذ

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x+2)^2 + y^2 = 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x+2)^2 + y^2 > 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x+2)^2 + y^2 < 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x+2)^2 + y^2 < 1\}$$

وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^2, d)$ مركزها $(-2, 0)$ ونصف قطرها 1 فهي مجموعة مفتوحة (لأن كل كرة مفتوحة هي مجموعة

مفتوحة)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+2)^2 + y^2 > 1\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^2, d)$ مركزها $(-2, 0)$ ونصف قطرها 1 فهي مجموعة مغلقة (لأن كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة) وبالتالي D مجموعة مفتوحة.

إذا $A \subset \mathbb{R}^2$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع مجموعتين مفتوحتين ومنه A مجموعة مغلقة.

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$$

وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^2, d)$ مركزها $(0, 3)$ ونصف قطرها 2 فهي مجموعة مغلقة. وبالتالي X مجموعة مغلقة لأنها اجتماع مجموعتين مغلقتين، ومنه (X, d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E, d) فضاء تام و (X, d) فضاء جزئي من (E, d) عندئذ يكون (X, d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي $((E, d))$.

b. (5 درجات)

تكون المتتالية u_n متقاربة في الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$ إذا كانت متتالية كل مسقط متقاربة في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ ولدينا $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = (0, \frac{1}{3}) \Leftrightarrow$ المتتالية u_n متقاربة في $(\mathbb{R}^2, d) \Leftrightarrow$ المتتالية u_n محدودة في $(\mathbb{R}^2, d)$ ، لأن كل متتالية متقاربة محدودة.

3. تعيين شكل الكرات المغلقة في الفضاء المترى المنقطع (5 درجات)

المثال (5 درجات)

في الفضاء المترى المنقطع $(\mathbb{N}, d)$ المجموعة $A = \{2, 6\}$ هي مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء لأنها اجتماع لكرتين مفتوحتين $A = N(2, \frac{1}{2}) \cup N(6, \frac{1}{2})$ ومنه تكون A مجاورة لكل نقطة من نقاطها، (المجموعة المفتوحة مجاورة لكل نقطه من نقاطها) أي A مجاورة لـ $x = 2$

الجوار لـ $x = 2$ هو كرة مفتوحة مركزها 2 ومن المعلوم أن الكرات المفتوحة في الفضاء المترى المنقطع شكلها

$$N(2, \rho) = \begin{cases} \emptyset & ; \rho = 0 \\ \{2\} & ; 0 < \rho \leq 1 \\ \mathbb{N} & ; \rho > 1 \end{cases}$$

فلاحظ مهما $\rho \geq 0$ فإن $A \neq N(2, \rho)$ أي A ليس جوار لـ 2 في الفضاء $(\mathbb{N}, d)$ المنقطع.

ملاحظة

بعض التمارين تُحلّ بأكثر من طريقة، فأى طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشري دراج



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة التكميلية - العام الدراسي 2022-2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (60 درجة)

- (1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:
- داخلية مجموعة - المجموعة الكثيفة - خارجية مجموعة - النقطة الجبهة لمجموعة - قطر المجموعة - قاعدة التبولوجيا - الكرة المغلقة في الفضاء المترى. (ثلاث درجات لكل تعريف يتم اختياره). المجموع 15 درجة
- (2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\{1, 5, 9\} \subseteq T \cup \{\emptyset\}$; $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ والمطلوب:
1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
 2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
 3. خذ المجموعة $A = \{2, 3, 7\}$ و أوجد كلاً من $\bar{A}$, $ex(A)$, $bd(A)$, $V(A)$, $Is(A)$.
 4. هل المجموعة $C = \{1, 4, 7\}$ كثيفة في كل مكان.
 5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\{1, 3, 5\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
 6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
 7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحل:

1. (9 درجات)

• من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$\{1, 5, 9\} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

• لنثبت أنه أيّ كان $T, G \in \tau$ فإن $T \cap G \in \tau$

نميز حالتين:

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,5,9\} \subseteq T$$

$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,5,9\} \subseteq G$$

عندئذ $T \cap G \in \tau$ بالتالي $T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $\{1,5,9\} \subseteq T \cap G$

• لتكن لدينا الأسرة $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

إذا كانت $G_i = \emptyset \in \tau$ فإن $i \in I$ كان $G_i = \emptyset$

إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $\{1,5,9\} \subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,5,9\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرف تيولوجيا على $\mathbb{N}$.

$$2. \quad \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,5,9\} \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$3. \quad \underline{A} : \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } A \iff A = \emptyset \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{ex}(A) : \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } \mathbb{N} \setminus A \iff \mathbb{N} \setminus A \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{\bar{A}} : \text{أصغر مجموعة مغلقة تحوي } A \iff \bar{A} = A \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{bd}(A) : \text{حد } A \iff \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A \setminus \emptyset \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{V(A)} : (3 \text{ درجات})$$

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{2,3,7\} \subseteq v\}$$

$$\underline{Is(A), \overset{\circ}{A}} : (6 \text{ درجات})$$

$$\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup A \Rightarrow A = \overset{\circ}{A} \cup A$$

لندرس نقاط A

$$x = 2 \Rightarrow V(2) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,2,5,9\} \subseteq v\}$$

$$\exists v_2 = \{1,2,5,9\} ; v_2 \cap A = \{2\}$$

$$\Rightarrow 2 \in Is(A), 2 \notin \overset{\circ}{A}$$

$$x = 3 \Rightarrow V(3) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,3,5,9\} \subseteq v\}$$

$$\exists v_3 = \{1,3,5,9\} ; v_3 \cap A = \{3\}$$

$$\Rightarrow 3 \in Is(A), 3 \notin \overset{\circ}{A}$$

$$x = 7 \Rightarrow V(7) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,5,7,9\} \subseteq v\}$$

$$\exists v_7 = \{1,5,7,9\} ; v_7 \cap A = \{7\}$$

$$\Rightarrow 7 \in Is(A), 7 \notin \overset{\circ}{A}$$

$$\overset{\circ}{A} = \emptyset, Is(A) = A \text{ ومنه نجد}$$

$$4. \quad \bar{C} = \mathbb{N} \text{ تكون } C \text{ كثيفة في كل مكان إذا تحققت العلاقة}$$

$$\bar{C} = \mathbb{N} \text{ لدينا بالتالي } C \text{ كثيفة في كل مكان.} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$5. \quad (3 \text{ درجات})$$

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

- $\beta \subseteq \tau$
- $\forall T \in \tau \Rightarrow T = \bigcup_{B_i \in \beta} B_i$

الشرط الأول غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة $\{1,3,5\}$ تنتمي للأسرة β ولكن لا تنتمي للتبولوجيا τ .

$$6. \tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,2,5,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\tau_1 \subseteq \tau$$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . (3 درجات)

(توجد أمثلة كثيرة)

$$7. \tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{5\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\tau \subseteq \tau_2$$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . (3 درجات)

السؤال الثاني: (30 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E, d) فضاءً مترياً و (X, d) فضاءً مترياً جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X, d) عندئذ تكون A مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (X, d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في الفضاء (E, d) مثل F بحيث يكون $A = F \cap X$.

2. لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E, τ) عندئذ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E, τ) إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي: $A \cap T \neq \emptyset \quad \forall T \in \tau \setminus \{\emptyset\}$

(2) ليكن $(\mathbb{R}^3, d)$ الفضاء المتري الإقليدي ، والمطلوب:

a. تحقق أن الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + (z+1)^2 \geq 9\}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n+2}, 5, \frac{1-2n}{2n+1}\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$.

الحل:

(1) (12 درجات للقضية)

(2) a. (10 درجات)

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + (z+1)^2 \geq 9\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + (z+1)^2 < 9\}$$

وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3, d)$ مركزها $(0,0,-1)$ ونصف قطرها 3 فهي مجموعة مفتوحة (لأن كل كرة مفتوحة هي

مجموعة مفتوحة)، بالتالي X مغلقة في $\mathbb{R}^3$

ومنه (X, d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E, d) فضاء تام و (X, d) فضاء جزئي من (E, d)

عندئذ يكون (X, d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي $((E, d))$.

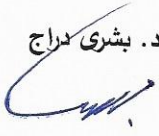
b. (8 درجات)

تكون المتتالية u_n متقاربة في الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$ إذا كانت متتالية كل مسقط متقاربة في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ ، ولدينا $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = (0, 5, -1) \iff$ المتتالية u_n متقاربة في $(\mathbb{R}^3, d) \iff$ المتتالية u_n محدودة في $(\mathbb{R}^3, d)$ ، لأن كل متتالية متقاربة محدودة.

----- ملاحظة -----

بعض التمارين تُحل بأكثر من طريقة، فأَي طريقة متبعة من قبل الطالب لحل تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشري دراج



At 6

اسم الطالب:

امتحان مقرر تيولوجيا I

جامعة طرطوس

المدة: ساعتان

سنة ثانية رياضيات

كلية العلوم

الدرجة: 90

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2022-2023

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (60 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

نقطة التراكم في مجموعة - المجموعة الكثيفة - خارجية مجموعة - النقطة اللاصقة لمجموعة - قطر المجموعة - قاعدة التبولوجيا - الكرة المفتوحة في الفضاء المترى.

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\{2,7\} \subseteq T \cup \{\emptyset\}$; $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{2,3,7\}$ و أوجد كلاً من $\bar{A}$, $ex(A)$, $\bar{A}$, $bd(A)$, $V(A)$, $Js(A)$, $\bar{A}$.
4. هل المجموعة $C = \{1,4,13\}$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\{2,4,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (30 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E, d) فضاء مترياً و (X, d) فضاء مترياً جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X, d) عندئذ تكون A مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (X, d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة في الفضاء (E, d) مثل G بحيث يكون $A = G \cap X$.

2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) عندئذ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bar{A} \cup A$.

(2) ليكن $(\mathbb{R}^3, d)$ الفضاء المترى الإقليدي ، والمطلوب:

- a. تحقق أن الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا، حيث $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{1-n}{2n+1}, 1\right)$ محدودة في الفضاء المترى الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2022-2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (60 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

نقطة التراكم في مجموعة - المجموعة الكثيفة - خارجية مجموعة - النقطة اللاصقة لمجموعة - قطر المجموعة - قاعدة التبولوجيا - الكرة المفتوحة في الفضاء المترى. (ثلاث درجات لكل تعريف يتم اختياره). المجموع 15 درجة

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\{2,7\} \subseteq T \cup \{\emptyset\}$; $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{2,3,7\}$ و أوجد كلاً من $\bar{A}$, $ex(A)$, $bd(A)$, $V(A)$, $Is(A)$, $\bar{A}$.
4. هل المجموعة $C = \{1,4,13\}$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\{2,4,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ .
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحل:

1. (9 درجات)

• من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$\{2,7\} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

• لنثبت أنه أيّاً كان $T, G \in \tau$ فإن $T \cap G \in \tau$

نميز حالتين:

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{2,7\} \subseteq T$$

$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{2,7\} \subseteq G$$

عندئذ $T \cap G \in \tau$ بالتالي $T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ & $\{2,7\} \subseteq T \cap G$

• لتكن لدينا الأسرة $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيًا كان $i \in I$ فإن $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau$

إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $\{2,7\} \subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{2,7\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.

$$2. \quad \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{2,7\} \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$3. \quad \underline{A} : \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } A \Leftarrow A = \underline{A} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\underline{ex(A)} : \text{أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } \mathbb{N} \setminus A \Leftarrow ex(A) = \emptyset \quad (3 \text{ درجات})$$

$$\bar{A} : \text{أصغر مجموعة مغلقة تحوي } A \Leftarrow \bar{A} = \mathbb{N} \quad (3 \text{ درجات})$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad bd(A) = \bar{A} \setminus \underline{A} = \mathbb{N} \setminus A : \underline{bd(A)}$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{V(A)}$$

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{2,3,7\} \subseteq v\}$$

$$(6 \text{ درجات}) \quad \underline{Is(A), \hat{A}}$$

$$\bar{A} = \hat{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{N} = \hat{A} \cup \{2,3,7\} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus \{2,3,7\} \subseteq \hat{A}$$

لندرس نقاط A

$$x = 2 \Rightarrow V(2) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{2,7\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(2) \Rightarrow \{2,7\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{2\}$$

$$\Rightarrow 2 \notin Is(A), 2 \in \hat{A}$$

$$x = 3 \Rightarrow V(3) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{2,3,7\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(3) \Rightarrow \{2,7\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{3\}$$

$$\Rightarrow 3 \notin Is(A), 3 \in \hat{A}$$

$$x = 7 \Rightarrow V(7) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{2,7\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(7) \Rightarrow \{2,7\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{7\}$$

$$\Rightarrow 7 \notin Is(A), 7 \in \hat{A}$$

$$\hat{A} = \mathbb{N}, Is(A) = \emptyset \text{ ومنه نجد}$$

4. تكون C كثيفة في كل مكان إذا تحققت العلاقة $\bar{C} = \mathbb{N}$

$$\bar{C} = C \Rightarrow \bar{C} \neq \mathbb{N}$$

بالتالي C ليست كثيفة في كل مكان. (3 درجات)

5. (3 درجات)

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

- $\beta \subseteq \tau$
- $\forall T \in \tau \Rightarrow T = \bigcup_{B_i \in \beta} B_i$

الشرط الثاني غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة المفتوحة $\{2,3,7\}$ لا يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصر من الأسرة β .

$$6. \tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,2,7\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\tau_1 \subseteq \tau$$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . (3 درجات)

(توجد أمثلة كثيرة)

$$7. \tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{2\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\tau \subseteq \tau_2$$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . (3 درجات)

السؤال الثاني: (30 درجة)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين: (12 درجة)

1. إذا كان (E, d) فضاءً مترياً و (X, d) فضاءً مترياً جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي

(X, d) عندئذ تكون A مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (X, d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة في

الفضاء (E, d) مثل G بحيث يكون $A = G \cap X$.

2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التوبولوجي (E, τ) عندئذ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bar{A} \cup A$.

(2) ليكن $(\mathbb{R}^3, d)$ الفضاء المتري الإقليدي ، والمطلوب:

a. تحقق أن الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{1-n}{2n+1}, 1\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$.

الحل: a. (10 درجات)

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

نفرض $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3, d)$ مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1 فهي مجموعة مفتوحة (لأن كل كرة مفتوحة هي مجموعة

مفتوحة).

ويفرض $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$
 نلاحظ بأن $\mathbb{R}^3 \setminus B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^3, d)$ مركزها $(0,0,0)$
 ونصف قطرها 1 فهي مجموعة مغلقة بالتالي B مجموعة مفتوحة .

ومنه أصبح $\mathbb{R}^3 \setminus X = A \cup B$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع لمجموعتين مفتوحتين بالتالي X مغلقة في $\mathbb{R}^3$
 وبالتالي (X, d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E, d) فضاء تام و (X, d) فضاء جزئي من (E, d)

عندئذ يكون (X, d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي $((E, d))$.

b. (8 درجات)

تكون المتتالية u_n متقاربة في الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$ إذا كانت متتالية كل مسقط متقاربة في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ ، ولدينا
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = (0, -\frac{1}{2}, 1) \iff$ المتتالية u_n متقاربة في $(\mathbb{R}^3, d) \iff$ المتتالية u_n محدودة في $(\mathbb{R}^3, d)$ ، لأن كل
 متتالية متقاربة محدودة.

ملاحظة

بعض التمارين تُحلّ بأكثر من طريقة، فأی طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة
 ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشري دراج

اسم الطالب:

المدة: ساعتان

الدرجة: 90

امتحان مقرر تبولوجيا 1

الدورة الفصلية الأولى - سنة ثانية رياضيات

العام الدراسي 2022-2023م

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (55 درجة)

(1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

قطر المجموعة - قاعدة التبولوجيا - النقطة المنعزلة لمجموعة - المجموعة الكثيفة في كل مكان - داخلية مجموعة - سطح الكرة في الفضاء المترى - النقطة اللاصقة لمجموعة.

(2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\{1,6,8\} \subseteq T \cup \{\emptyset\}$; $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{1,2,7\}$ وأوجد كلاً من $\bar{A}$, $ex(A)$, $bd(A)$, $V(A)$, $Is(A)$, $\bar{A}$.
4. هل المجموعة $B = \{2,7,12\}$ كثيفة في $A = \{1,2,7\}$.
5. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
6. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (35 درجة)

(1) أثبت صحة قضيتين فقط من القضايا التالية:

1. إذا كان (E, d) فضاءً مترياً و (X, d) فضاءً مترياً جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X, d) عندئذ تكون A مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (X, d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في الفضاء (E, d) مثل F بحيث يكون $A = F \cap X$.
2. لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E, τ) عندئذ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E, τ) إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي: $A \cap T \neq \emptyset \quad \forall T \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.
3. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) عندئذ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bar{A} \cup A$.

(2) لنأخذ في الفضاء المترى الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$ المجموعة الآتية:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 = 4\}$$

والمطلوب: تحقق أن الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا.

(3) في الفضاء المترى ليس بالضرورة كل مجاورة لنقطة هي جوار لهذه النقطة، وضح ذلك بمثال.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشري دراج

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2023/1/23



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة الفصلية الأولى - العام الدراسي 2022-2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (55 درجة)

- (1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:
- قطر المجموعة - قاعدة التبولوجيا - النقطة المنعزلة لمجموعة - المجموعة الكثيفة في كل مكان - داخلية مجموعة - سطح الكرة في الفضاء المتري - النقطة اللاصقة لمجموعة. (ثلاث درجات لكل تعريف يتم اختياره). المجموع 15 درجة
- (2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\{1,6,8\} \subseteq T \cup \{\emptyset\}$; $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ والمطلوب:
1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
 2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
 3. خذ المجموعة $A = \{1,2,7\}$ وأوجد كلاً من $\bar{A}$, $ex(A)$, $bd(A)$, $V(A)$, $Is(A)$, $\bar{A}$.
 4. هل المجموعة $B = \{2,7,12\}$ كثيفة في $A = \{1,2,7\}$.
 5. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
 6. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحل:

1. (7 درجات)

• من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$\{1,6,8\} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

• لنثبت أنه أيّا كان $T, G \in \tau$ فإن $T \cap G \in \tau$

نميز حالتين:

الحالة الأولى: $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,6,8\} \subseteq T$$

$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,6,8\} \subseteq G$$

عندئذ $T \cap G \in \tau$ بالتالي $T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $\{1,6,8\} \subseteq T \cap G$

• لتكن لدينا الأسرة τ ولنثبت أن $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$

إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيًا كان $i \in I$ فإن $\emptyset \in \tau$

إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $\{1,6,8\} \subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,6,8\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.

$$(3 \text{ درجات}) \quad \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,6,8\} \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\} \quad 2.$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{A} = \emptyset \iff A = \emptyset \iff A \text{ مجموعة مفتوحة محتواة في } \mathbb{N} \quad 3.$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{ex(A)} : \text{ أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في } \mathbb{N} \setminus A \iff ex(A) = \emptyset \iff \mathbb{N} \setminus A \text{ مجموعة مفتوحة محتواة في } \mathbb{N} \setminus A$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{\bar{A}} : \text{ أصغر مجموعة مغلقة تحوي } A \iff \bar{A} = \mathbb{N} \iff A \text{ مجموعة مغلقة تحوي } A$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{bd(A)} : \text{ أكبر مجموعة مغلقة محتواة في } \mathbb{N} \setminus A \iff bd(A) = \bar{A} \setminus A = \mathbb{N} \setminus \emptyset = \mathbb{N}$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \underline{V(A)} :$$

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,2,6,7,8\} \subseteq v\}$$

$$(6 \text{ درجات}) \quad \underline{Is(A), \hat{A}}$$

$$\bar{A} = \hat{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{N} = \hat{A} \cup \{1,6,8\} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1,6,8\} \subseteq \hat{A}$$

لندرس نقاط A

$$x = 1 \Rightarrow V(1) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,6,8\} \subseteq v\}$$

$$\exists v_1 = \{1,6,8\} ; v_1 \cap A = \{1\} \Rightarrow 1 \in Is(A), 1 \notin \hat{A}$$

$$x = 2 \Rightarrow V(2) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,2,6,8\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(2) \Rightarrow \{1,2\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{2\}$$

$$\Rightarrow 2 \notin Is(A), 2 \in \hat{A}$$

$$x = 7 \Rightarrow V(7) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{1,6,7,8\} \subseteq v\}$$

$$\forall v \in V(7) \Rightarrow \{1,7\} \subseteq v \cap A$$

$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{7\}$$

$$\Rightarrow 7 \notin Is(A), 7 \in \hat{A}$$

$$\hat{A} = \mathbb{N} \setminus \{1\}, Is(A) = \{1\} \text{ ومنه نجد } \hat{A} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$4. \text{ تكون } B \text{ كثيفة في } A \text{ إذا تحققت العلاقة } A \subseteq \bar{B}$$

$$\bar{B} = B \Rightarrow A \not\subseteq \bar{B}$$

$$(3 \text{ درجات}) \quad \text{بالتالي } B \text{ ليست كثيفة في } A.$$

$$\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{1,6,8,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\} .5$$

$$\tau_1 \subseteq \tau$$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . (3 درجات)

(توجد أمثلة كثيرة)

$$\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{1,6\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\} .6$$

$$\tau \subseteq \tau_2$$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . (3 درجات)

السؤال الثاني: (35 درجة)

(1) أثبت صحة قضيتين فقط من القضايا التالية: (10 درجات لكل قضية)

1. إذا كان (E, d) فضاءً مترياً و (X, d) فضاءً مترياً جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X, d) عندئذ تكون A مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (X, d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في الفضاء (E, d) مثل F بحيث يكون $A = F \cap X$.

2. لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E, τ) عندئذ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E, τ) إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي: $A \cap T \neq \emptyset \quad \forall T \in \tau \setminus \{\emptyset\}$

3. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) عندئذ تتحقق المساواة $\bar{A} = \bar{A} \cup A$.

(2) لنأخذ في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$ المجموعة الآتية :

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad x^2 + y^2 = 4\}$$

والمطلوب: تحقق أن الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا.

الحل: (10 درجات)

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad x^2 + y^2 = 4\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad x^2 + y^2 > 4\}$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad x^2 + y^2 < 4\}$$

وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^2, d)$ مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 2 فهي مجموعة مفتوحة (لأن كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة).

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad x^2 + y^2 > 4\}$$

نلاحظ بأن $\mathbb{R}^2 \setminus B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$ وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^2, d)$ مركزها $(0,0)$ ونصف

قطرها 2 فهي مجموعة مغلقة بالتالي B مجموعة مفتوحة .

ومنه أصبح $\mathbb{R}^2 \setminus X = A \cup B$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع لمجموعتين مفتوحتين بالتالي X مغلقة في $\mathbb{R}^2$

وبالتالي (X, d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E, d) فضاء تام و (X, d) فضاء جزئي من (E, d)

عندئذ يكون (X, d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي $((E, d))$.

(3) في الفضاء المترى ليس بالضرورة كل مجاورة لنقطة هي جوار لهذه النقطة، وضح ذلك بمثال.

الحل: (5 درجات)

نأخذ مثلاً: في الفضاء المترى المنقطع $(\mathbb{N}, d)$. المجموعة $A = \{4, 5\}$ هي مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء لأنها اجتماع لكرتين مفتوحتين $N(4, \frac{1}{2}) \cup N(5, \frac{1}{2})$ ومنه تكون A مجاورة لكل نقطة من نقاطها، (المجموعة المفتوحة مجاورة لكل نقطه من نقاطها) أي A مجاورة لـ $x = 4$ الجوار لـ $x = 4$ هو كرة مفتوحة مركزها 4 ومن المعلوم أن الكرات المفتوحة في الفضاء المترى المنقطع شكلها

$$N(4, \rho) = \begin{cases} \emptyset & ; \rho = 0 \\ \{4\} & ; 0 < \rho \leq 1 \\ \mathbb{N} & ; \rho > 1 \end{cases}$$

فلاحظ مهما $\rho \geq 0$ فإن $A \neq N(4, \rho)$ أي A ليس جوار لـ 4 في الفضاء $(\mathbb{N}, d)$ المنقطع.

ملاحظة

مدرس المقرر: د. بشري دراج

طردوس: 2023/1/23م

اسم الطالب:	امتحان مقرر تبولوجيا 1	جامعة طرطوس
المدة: ساعتان	سنة ثانية رياضيات	كلية العلوم
الدرجة: 90	الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2022-2021	قسم الرياضيات

السؤال الأول: (55 د)

(1) عرّف ستة مفاهيم مما يلي:

التبولوجيا القوية- المجموعة المفتوحة - قاعدة التبولوجيا- النقطة المنعزلة لمجموعة- النقطة اللاصقة لمجموعة- المجموعة الكثيفة في كل مكان - خارجية مجموعة - الكرة المفتوحة في الفضاء المترى.

(2) نعرّف على المجموعة $E = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ التبولوجيا الآتية :

$$\tau = \{E, \emptyset, \{1, 3, 5, \dots, 9\}, \{2, 4, \dots, 10\}\}$$

والمطلوب:

1. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي الناتج.
2. خذ المجموعة $A = \{1, 2, 4\}$ وعين كلاً من $\bar{A}$ ، $Is(A)$ ، $bd(A)$ ، $\bar{A}$ ، $ex(A)$ ، $\bar{A}$.
3. لتكن لدينا الأسرة $\tau^* = \{T \in \mathcal{P}(E); \{1, 2\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب أثبت أن τ^* تبولوجيا معرفة على E ثم تحقق أن التبولوجيتين τ و τ^* غير متقارنتين.

السؤال الثاني: (35 د)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E, d) فضاءً مترياً و (X, d) فضاءً مترياً جزئياً منه عندئذ يكون الفضاء (X, d) تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E, d) .
2. لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E, τ) عندئذ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E, τ) إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$$A \cap T \neq \emptyset \quad \forall T \in \tau \setminus \{\emptyset\}$$

(2) لنأخذ في الفضاء المترى الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$ المجموعة الآتية :

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \geq 16\}$$

والمطلوب تحقق أن الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا.

(3) أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{2n+1}\right)$ محدودة في الفضاء المترى الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشرى سراج

طرطوس في 2022/7/4

اسم تصحيح امتحان قرار تبليغ 1/1

سؤال الأول:

درجات هي تعريف (18 درجة)

$$f = \{E, \phi, \{1, 3, 5, \dots, 9\}, \{2, 4, \dots, 10\}\}$$

$$\bar{A} = E \Leftrightarrow A \text{ قوی } (E, \tau)$$

$$A^{\circ} = \phi \Leftrightarrow A \text{ محتوی } (E, \tau)$$

$$* \text{bd } A = \bar{A} \setminus A^{\circ} = E \setminus \phi = E$$

$$* \bar{A} = A' \cup A \Rightarrow E = A' \cup \{1, 2, 4\}$$

من أجل $n=4$ يكون $A' \supseteq \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ لذلك ندرس نقاط A .

$$V(4) = \{U \in P(E) ; \{2, 4, 6, 8, 10\} \subseteq U\}$$

$$\forall U \in V(4) \Rightarrow \{2, 4\} \subseteq U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \phi, \{4\} \Rightarrow \boxed{4 \in A'}$$

من أجل $n=2$ يكون

$$V(2) = \{U \in P(E) ; \{2, 4, 6, 8, 10\} \subseteq U\}$$

$$\forall U \in V(2) \Rightarrow \{2, 4\} \subseteq U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \phi, \{2\} \Rightarrow \boxed{2 \in A'}$$

من أجل $n=1$ يكون

$$V(1) = \{U \in P(E) ; \{1, 3, 5, 7, 9\} \subseteq U\}$$

$$U_0 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$U_0 \cap A = \{1\} \Rightarrow 1 \notin A' \Rightarrow \boxed{1 \in I \setminus A}$$

لذلك

$$A' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$I \setminus A = \{1\}$$

$$T^* = \{T \in P(E) ; \{1, 2\} \subseteq T\}$$

لتحقق من شروط التبليغ: * لدينا $\phi \in T^*$ و $\{1, 2\} \subseteq E \Leftrightarrow \{1, 2\} \in P(E)$ الشرط الأول تحقق لأن $\phi \in T^*$ و $E \in T^*$

* إذا كان $T, G \in T^*$ لنبين أن $T \cap G \in T^*$
 @ إذا كان $G = \phi$ أو $T = \phi$ $\Rightarrow T \cap G = \phi \in T^*$

(6) إذا كان $G \neq \emptyset$ و $T \neq \emptyset$ من تعريف T^* نجد

$$\left. \begin{array}{l} T \in \mathcal{P}(E) \text{ و } \{1, 2\} \subseteq T \\ G \in \mathcal{P}(E) \text{ و } \{1, 2\} \subseteq G \end{array} \right\} \Rightarrow \{1, 2\} \subseteq T \cap G$$

السطح الثاني تحقق $\Rightarrow T \cap G \in T^*$

* نأخذ $\{1, 2\} \subseteq T^* \Rightarrow \{1, 2\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ ولنعلم أن

(a) إذا كان $i \in I$ و $G_i = \emptyset$ $\Leftrightarrow G_i \in T^* \Leftrightarrow \{1, 2\} \subseteq G_i = \emptyset$ وهذا مستحيل

(b) إذا وجد عضواً (على الأقل) من المجموعة $\{1, 2\}$ في G_i و $G_i \in T^*$ حيث $G_i \neq \emptyset$ فنحن في T^* جيد.

$$G_i \in \mathcal{P}(E) \text{ و } \{1, 2\} \subseteq G_i \Rightarrow \{1, 2\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{P}(E) \text{ و } \{1, 2\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in T^*$$

والسطح الثاني تحقق.

= من السهل إثبات أن (E, T^*) فضاء متبولوجي.

المقارنة بين T و T^* : $T \neq T^*$ لأنه توجد المجموعة المفتوحة $\{1, 3, 5, 7, 9\} \in T$ ولكن $\{1, 3, 5, 7, 9\} \notin T^*$

* $T \neq T^*$ لأنه توجد مثلاً المجموعة المفتوحة $\{1, 2, 5\} \in T^*$ حيث أن $\{1, 2, 5\} \notin T$ ولا يمكن التبول حيث غير متقارنتين.

السؤال الثاني:

(1) 15 درهم ثبات القيمة.

(2) $\frac{10}{R^3} \setminus X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \leq 16\}$

تمثل كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^3, d)$ على مجموعة مفتوحة فيه $\Rightarrow$ متممة مجموعة مغلقة

$\Leftrightarrow X$ مغلقة في $(\mathbb{R}^3, d)$ بما أن $(\mathbb{R}^3, d)$ تام طائفي $\Rightarrow (X, d)$ تام طائفي

من المبرهنات (د) إذا كان (E, d) فضاء متري تاماً و (X, d) فضاء متري تاماً فإنه

عندئذ يكون الفضاء الجزئي (X, d) تاماً إذا وفقط إذا كان المجموعة X مغلقة في الفضاء التام

(3) $U_n = (\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1})$ مجموعة متبولوجية

$A = \{(1, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{2}{5}), \dots\}$ فثبات A فثبات في كرة مغلقة.

لنعلم أن A فثبات في كرة مغلقة.

$B(0,0,2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \leq 2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

(10 > 3)

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow \frac{n^2}{n+1} < 1$

اسم الطالب:

المدة: ساعتان

الدرجة: 90

امتحان مقرر تبولوجيا 1

الدورة الفصلية الأولى - سنة ثانية رياضيات

العام الدراسي 2021-2022

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (55 د)

(1) عرّف ستة مفاهيم مما يلي:

التبولوجيا القوية- المجموعة المفتوحة - قطر المجموعة- نقطة التراكم في مجموعة- النقطة اللاصقة لمجموعة- المجموعة الكثيفة في كل مكان -داخلية مجموعة -الكرة المغلقة في الفضاء المترى.

(2) نعرّف على المجموعة $E = \{1,2,3,4\}$ التبولوجيا الآتية: $\tau = \{E, \emptyset, \{1,3\}, \{4\}, \{1,3,4\}\}$ والمطلوب:

1. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي الناتج.
2. خذ المجموعة $A = \{1,2,3\}$ وعين كلاً من $\bar{A}$, $ex(A)$, $bd(A)$, $Is(A)$, $\bar{A}$.
3. هل الأسرة $\beta = \{\emptyset, \{1,3\}, \{4\}\}$ قاعدة لـ τ أم لا، ولماذا.
4. لنكن لدينا الأسرة $\tau^* = \{T \in P(E); 2 \in T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب أثبت أنّ τ^* تبولوجيا معرفة على E ثم تحقق أنّ التبولوجيتين τ و τ^* غير متقارنتين.

السؤال الثاني: (35 د)

(1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E, d) فضاءً مترياً و (X, d) فضاءً مترياً جزئياً منه عندئذ يكون الفضاء الجزئي (X, d) تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E, d) .
2. إذا كان $f: (E, \tau) \rightarrow (X, \tau^*)$ تابعاً كيفياً وكانت $x_0 \in E$ نقطة مفروضة عندئذ يكون التابع f مستمر عند x_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كلّ مجاورة V لـ $f(x_0)$ في (X, τ^*) توجد مجاورة U لـ x_0 في (E, τ) بحيث يكون $f(U) \subseteq V$.

(2) لنأخذ في الفضاء المترى الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$ المجموعة الآتية :

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 \geq 25\}$$

والمطلوب تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X, d) فضاء تام أم لا.

(3) تحقق أنّ المجموعة $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ هي مجموعة محدودة في الفضاء المترى الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

طرطوس في 2022/1/23

السؤال الأول: (المسألة الصحيحة ببولبول 1/1)
 3 درجات لكل تعريف.
 2022 - 2021
 f = {E, ∅, {2, 4}, {1, 2, 3}, {2}}

(2) $bdA = \{2\}, \bar{A} = A, ex(A) = \{4\}, A^0 = \{1, 3\}$
 $A' = A, I_A(A) = \emptyset$ (3 درجات لكل واحد)

(3) يمكن ب قاعدة τ إذا تحقق الشرط
 (5 درجات)

① $\beta \subseteq \tau \quad \& \forall T \in \tau; T = \bigcup_{\beta_i \in \beta} \beta_i$
 $E \neq \bigcup_{\beta_i \in \beta} \beta_i$ الشرط الثاني غير متحقق

④ $\phi \in \tau^*$ من تعريف الأسرة τ^* و $E \in \tau^* \Leftrightarrow 2 \in E$
 الشرط الأول متحقق

② إذا كانت $T, G \in \tau^*$ لنبرهن أن $T \cap G \in \tau^*$

(a) إذا كانت $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset \Leftrightarrow T \cap G = \emptyset \in \tau^*$

(b) إذا كان $T \neq \emptyset$ و $T \neq \emptyset$ و $2 \in T \Leftrightarrow 2 \in G \Leftrightarrow 2 \in T \cap G$

وعباً أن $T \cap G \in p(E)$

فالشرط الثاني متحقق.

③ متحقق $\tau^* \subseteq \tau^*$ و $\{G_i; i \in I\}$ ولنبرهن أن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau^*$

(a) إذا كان $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau \Leftrightarrow G_i = \emptyset \quad \forall i \in I$

(b) إذا وجد عنصر واحد على الأقل من الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ وليس

فإن $G_i \in p(E) \quad \& \quad 2 \in G_i \Rightarrow 2 \in \bigcup_{i \in I} G_i \quad \& \quad \bigcup_{i \in I} G_i \in p(E) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau^*$

فالشرط الثاني متحقق.

$\Leftrightarrow$ من الشرط الثالث نجد أن τ^* تعريف ببولبول مع E .

(*) مقارنة τ و τ^* فإنه يوجد العنصر $\{1, 3\}$ من τ وليس من τ^*

نلاحظ أن $\tau \not\subseteq \tau^*$ لأنه يوجد العنصر $\{2\}$ من τ^* ليس من τ وبالعكس $\tau^* \not\subseteq \tau$

لذلك يكون البتولبولين غير مقارنتين.

(10 درجات للطلب 4)

السؤال الثاني
لا 15 درجة لثبات المبرهنة.

(2) نلاحظ أن

$$\mathbb{R}^3 \setminus X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 < 25\}$$

$$= N((2, 1, 3), 5)$$

إذاً $\mathbb{R}^3 \setminus X$ كرة مفتوحة $\Rightarrow$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3, d)$
وبالتالي X مغلقة في الفضاء المترى $(\mathbb{R}^3, d)$ انتام لذلك
سب المبرهنة (1) إذا كان (E, d) فضاء مترى تام وكان (X, d) فضاء
مترى جزئي منه عندئذ يكون الفضاء الجزئي (X, d) تاماً
إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E, d) ،
 $\Leftarrow$ الفضاء الجزئي (X, d) تام.

[3] يمكن أن A موجودة إذا وفقط إذا وجدت كرة مغلقة في (E, d)
حيث $A \subseteq B(a, r)$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} = B((0, 0), 2)$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \} = N((0, 0), 1)$$

$$\Rightarrow A = B((0, 0), 2) \setminus N((0, 0), 1) \subseteq B((0, 0), 2)$$

$\Leftarrow A$ موجودة.

(10 درجات يمكن مناقشتها 2)



فرع 1
تجمع الكليات (كلية العلوم)
فرع 2

الكورنيش الشرقي جانب MTN

مكتبة



طباعة محاضرات - قرطاسية

Mob:0931 497 960

