ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الرابعة

اسئلة دوراات محلولة

حالة صلبة٢

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس	امتحان مقرر فيزياء الحالة الصلبة 2	الاسم:
كليّة العلوم	لطلاب السنة الرابعة فيزياء	المدة: ساعتان
قسم الفيزياء	للعام الدراسي 2024-2025/الدورة التكميلية	الدرجة القصوى: 70

السؤال الأول: (30 درجة)

أولاً- اشرح مفهوم الكتلة الفعّالة بإيجاز واكتب العلاقة الرياضية الموافقة لها.

ثانياً- عرّف تابع بلوخ الموجي واكتب شكله ووضّح معناه الفيزيائي ثمَّ بيّن فيما إذا كان المقدار $\hbar\vec{k}$ يُمثِّل اندفاعاً لموجة بلوخ أم اندفاعاً بلّورياً.

ثالثاً- أثبت أنَّ ظهور فجوات الطاقة عند حدّ منطقة بريلوان أمرٌ واقعٌ موضحاً إجابتك بالرسم.

السؤال الثاني: (15 درجة)

عرّف الغرافين ثمَّ اشرح طبيعة الروابط التي يتألف منها وكيفية ملء عصابات الطاقة الموافقة له ثمَّ اشرح لماذا يُعدُّ الغرافين نصف فلزٍ؟

السؤال الثالث: (25 درجة)

اشرح كيفية حصول الانتقالات الإلكترونية- الضوئية في البلّورات العازلة والبلّورات النصف ناقلة مبيناً كيفية تأثير بنية عصابات الطاقة لمادةٍ متبلورةٍ على امتصاص الضوء من خلال دراسة تابع العازلية للتواترات $\omega \in$ في منطقتي الضوء المرئي والأشعة فوق البنفسجية، وموضحاً إجابتك بالرسم.

بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2025/10/12

مدرس المقرر

أ. د. حسن عبد الكريم سليمان

مكتبة A to Z

سلم تصحيح مادة فيزياء
الحالة الصلبة (ع) الدورة الثانية ٢٠١٥ ع ص

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 30 درجة

أولاً– لقد رأينا في كلا الوصفين أن للكمون الدوريّ بدوريّة الشبيكة البلّورية تأثيران رئيسان؛

- يكمن التأثير الأول في التناظر الحاصل في عصابات الطاقة، الذي يسمح بجعل دراستنا للتبدد تقتصر على منطقة بريلوان الأولى فقط، بفضل تطابقه حول النقاط الأخرى في الشبيكة المقلوبة. كما أن هذا التناظر يُسبب انعكاساً لعصابات الطاقة عند حدّود منطقة بريلوان.
- والتأثير الثاني يكمن في اتساعات الفجوات الطاقية بين العصابات المنطبقة في نموذج الإلكترون الحر.

4

ثانياً– لدراسة التبدد في اتجاه واحد، نرى أنَّ الشكل (a) يُظهر التبدد من النقطة Γ (مركز منطقة بريلوان الأولى) إلى النقطة X عند حدّ منطقة بريلوان ويدخل إلى المنطقة اللاحقة (الثانية)، بالغاً النقطة Γ مرةً أخرى، وهكذا دواليك.

- ✓ هناك فجوة طاقة تفتح عند النقطة X
- ✓ وفوق الفجوة ثمة عصابة طاقة أخرى تتبدد– عكسياً في اتجاه النقطة Γ.
- ✓ يمكن بسهولة الإقرار بأن هذه العصابة هي بمثابة عصابة نشأت من مركز منطقة بريلوان التالية، كما في النموذج أحادي البعد.
- ✓ يكمن الفارق بين الشكلين بالتدريج الطاقي فقط؛ فقد تمّ الاختيار الطاقة الصفرية في النموذج أحادي البعد لتكون قاعاً للعصابة الطاقية. ويبدو أن هذا الاختيار يُعدُّ طبيعياً، لأنه يوافق الطاقة الحركية الصفرية للإلكترونات. ولكن لنا كامل الحرية في اختيار مبدأ تدريج الطاقة: في الفلزات، وفي معظم الأحيان يجري اختيار طاقة فيرمي؛ كمبدأ لحساب الطاقة، $E=0$، وهذا الخيار تمّ اعتماده في الشكل المعطى.

7

ثالثاً– يُظهر الشكل (b) العصابات الطاقية للألمينيوم Al في اتجاهات تناظر– عالية مختلفة في منطقة بريلوان الأولى. يمكننا إدراك الانحناء العكسي لعصابات الطاقة من المناطق المجاورة واتساع الفجوات الطاقية عند حدود مناطق بريلوان. في الواقع، يمكن وصف بنية عصابات الطاقة للألمينيوم في نموذج الإلكترونات شبه– الحرة بشكل جيد جداً، إلاَّ أنها تبدو معقدةً بسبب العصابات التي تظهر من المناطق المجاورة في الأبعاد الثلاثة:

- العصابات ممتلئة حتى طاقة فيرمي،
- ويوجد الكثير من عصابات الطاقة التي تتقاطع مع طاقة فيرمي، مما يعني أن الإلكترونات في الحالات المشغولة والواقعة تحت طاقة فيرمي تماماً بمقدورها التهيّج إلى حالات ضمن العصابة نفسها، وتقع فوق طاقة فيرمي تماماً. وبهذه الطريقة، تستطيع هذه الإلكترونات المشاركة في نقل التيارين الكهربائي والحراري.
  - عندما يمتلك الألمنيوم ثلاثة إلكترونات في كل وحدة خلية، فإنَّ هذه الإلكترونات تملأ عصابات الطاقة، مما يؤدي إلى فصل طاقة فيرمي عن قاع عصابة الطاقة بنحو 12 eV؛
  - وإذا حوَت كل وحدة خلية إلكترون واحد فقط، تُصبح طاقة فيرمي في موقع أخفض بكثير من الموقع السابق، عند الخط المتقطع تقريباً في الشكل (b). وفي هذه الحالة، يُصبح الوضع مشابهاً أكثر للوضع في نموذج الإلكترون الحر: إذْ تتقاطع العصابات مع طاقة فيرمي عند نفس المسافة k- عن النقطة Γ في الاتجاهات كافة، ومن ثمَّ ستكوِّن الحالات الإلكترونية عند طاقة فيرمي كرةً في الفراغ-k. وهذا ما يحصل تماماً في حالة نموذج الإلكترونات الحرة.

9

رابعاً- من أجل الطاقات المنخفضة جداً تبقى عصابات الطاقة لبلّورتي Si و GaAs تأخذ شكلاً مشابهاً للقطوع المكافئة؛ كما يمكن توصيف اتساعات الفجوات الطاقية عند حدود مناطق بريلوان والعصابات ذات الانحناء العكسي.

غير أن البنية الإلكترونية لكلتا المادتين، تختلف عن البنية الإلكترونية لـ Al بنقطتين مهمتين:

- ✓ تكمن الأولى في وجود فجوة طاقة مُطْلقة، تُميّزها الساحة الرمادية في الشكل. تعني كلمة مُطْلقة أن الفجوة ليست مجرد فاصل طاقة يظهر عند حدّ منطقة بريلوان وحسب، بل فجوة طاقة تظهر في كامل منطقة بريلوان. إذْ لا توجد حالات طاقية في المناطق الرمادية أياً يكن المتجه الموجي، $\vec{k}$.
- ✓ والاختلاف المميز الثاني عن الألمنيوم Al يظهر عند ملء الحالات بالإلكترونات المتاحة: فعند انشغال الحالات وفقاً لمبدأ باولي، تمتلئ العصابات الواقعة تحت المنطقة المحظورة الرمادية بشكلٍ كاملٍ، ولا يتبقى إلكترونات من أجل العصابات الواقعة فوق المنطقة المحظورة.
- ✓ ويبقى موقع طاقة فيرمي (الكمون الكيميائي) مثار بحثٍ؛ وفي كل الأحوال، يمكننا الآن القول أن موقع طاقة فيرمي سيكون في مكان ما داخل المنطقة المحظورة.
- ✓ يمكن وضع صفر تدريج الطاقة بطريقة اختيارية، ومن أجل أنصاف النواقل يوضع عادةً عند سقف الحالات المشغولة بالإلكترونات. يمكننا أن نؤكد وبثقة أن هذه المواد لا تُعدُّ فلزاتٍ في سياق التعريف المذكور أعلاه: ففي الفلزات لا توجد عصابات طاقة تقطع طاقة فيرمي ولا توجد إلكترونات يمكن لطاقاتها أن تزداد بكمية صغيرة فقط لكي تشارك في الناقلية الكهربائية.

في الواقع، إذا وجب أن تزداد طاقة إلكترون، فيجب أن تزداد، على الأقل، بكمية توافق عرض فجوة الطاقة.

10

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 20 درجة

- تُبدي الإلكترونات الحرة سلوكاً بارامغنطيسياً: فإذا امتلك كلّ إلكترونٍ حرٍ سبيناً قيمته $\frac{1}{2}$ وعزماً مغناطيسياً μ_B، فمن المرجّح أن تشارك الإلكترونات الحرة في تمغنط الإشباع للجسم الصلب بقيمة تساوي حاصل ضرب μ_B في كثافة الإلكترونات.
- يتم بلوغ هذا الإشباع عند اصطفاف كل العزوم المغنطيسية بشكلٍ موازٍ للحقل الخارجي (أو اصطفاف السبينات بشكلٍ مسايرٍ للحقل). غير أن حقيقة الأمر ليست كذلك على الإطلاق والطواعيّة البارامغنطيسية للإلكترونات الحرة صغيرة جداً فعلياً.

4

- يمكن فهم الطواعيّة البارامغنطيسية لإلكترونات حرة وحسابها باستخدام الشكل المجاور:

جرى تصنيف الحالات المشغولة بإلكترونات حرة في الشكل (a) إلى فئتين: واحدة بعزومٍ مغناطيسيةٍ مسايرةٍ لحقل خارجي، B_0، وأخرى بعزومٍ مغناطيسيةٍ موازيةٍ له؛ افترض هنا أن يكون هذا الحقل الخارجي صفراً تقريباً.

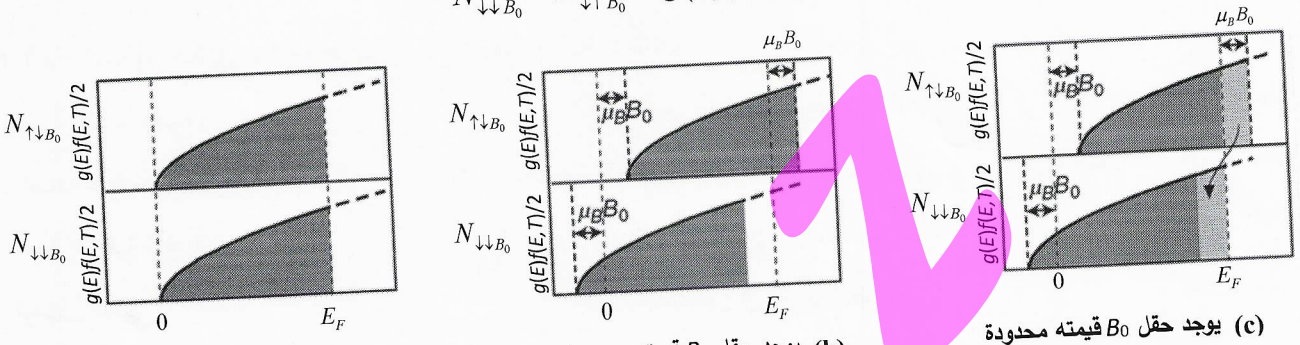
- يُظهر الشكل (b) ماذا يحدث عند ازدياد B_0 حتى قيمة محدودة. ترفع الإلكترونات طاقتها أو تُخفِّضها بمقدار $\mu_B B_0$ تبعاً لاتجاه عزومها المغنطيسية بالنسبة لاتجاه الحقل الخارجي.
- بما أن μ_B صغير جداً، فإن هذا التغيّر الطاقي يكون صغيراً جداً، أياً يكن الحقل الخارجي الذي يمكن بلوغه، إذْ يبلغ هذا التغيّر نحو 10^{-5} eV، وهو أقل بكثير من الفاصل الطاقي بين قاع العصابة الطاقية وطاقة فيرمي.

- وبما أن هذا الانزياح حدث، فإن الإلكترونات التي انتقلت إلى ما فوق طاقة فيرمي تستطيع تخفيض طاقاتها بقلب سبيناتها حيث تُصبح الإلكترونات بعزمٍ مغنطيسيٍ موازٍ للحقل الخارجي، كما يوضح الشكل (c).
- وهذا يؤدي إلى توافر إلكترونات بعزمٍ مغنطيسيٍ موازٍ للحقل بعدد أكبر من عدد الإلكترونات المتوافرة بعزمٍ مغنطيسيٍ مسايرٍ له، أي أن هذا الانزياح يؤدي إلى استجابة بارامغنطيسية.

لإيجاد χ_m، يجب أن نحدد كمية الإلكترونات التي تقلب سبيناتها لكي تمتلك عزماً مغناطيسياً موازياً للحقل الخارجي؛ تُمثَّل هذه الإلكترونات في الشكل (c) بالقطعة الرمادية الفاتحة حيث تبلغ مساحة كل قطعة $\frac{1}{2}g(E_F)\mu_B B_0$.

ولهذا السبب، يكون الفارق بين الإلكترونات التي عزومها المغنطيسية موازية للحقل وتلك التي عزومها مسايرة له مساوياً

$$N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0} = g(E_F)\mu_B B_0 ,$$



(a) لا يوجد حقل تقريباً (b) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة (c) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة

حيث تُشير الأسهم إمَّا إلى أن العزوم والحقل متوازية وإمَّا أنها متسايرة.

ومن ثمَّ يبلغ التمغنط المحصِّل:

$$M = \frac{1}{V}\left(N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0}\right)\mu_B = \frac{1}{V}g(E_F)\mu_B^2 B_0 ,$$

ومن ثمَّ تُصبح علاقة الطواعيّة المغناطيسية، χ_m، من الشكل:

$$\chi_m = \frac{1}{V}\mu_0\,\mu_B^2\,g(E_F),$$

والتي قيمتها صغيرة، ومن نفس رتبة الطواعيّات الدايامغنطيسية.

فالحقل اللازم لصفّ كل السبينات لا يكفي أن يتحقق الشرط $\mu_B B_0 >> k_B T$ فقط، وإنما يجب أن تتحقق المتراجحة $\mu_B B_0 > E_F$، أي يجب أن يكون مقدار التغيّر الطاقي الذي تتعرض له الإلكترونات نتيجة تطبيق حقل خارجي أكبر من طاقة فيرمي أيضاً، وهو مقدار كبير جداً هنا. في حقيقة الأمر، تختلف بارامغنطيسية باولي عن بارامغنطيسية كيوري تماماً: ففي بارامغنطيسية كيوري، فعلياً يمكن بلوغ التمغنط القوي، لأن ما تحتاجه الطاقة المغنطيسية، فقط أن تكون أعلى بكثير من الطاقة الحرارية. أمَّا من أجل بارامغناطيسية باولي، فإنها بحاجة لأن تتجاوز طاقة فيرمي، وهذا أمر غير ممكن.

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثالث: 20 درجة

أولاً- تعبر الكتلة الفعَّالة عن مقدار تأثير قوة الحقل البلّوري على حركة الجسيم/ حامل الشحنة الكهربائية في البلّورة ويُعبّر عنها بالعلاقة $m^* = \hbar^2\left(\frac{d^2E(k)}{dk^2}\right)^{-1}$ وتتناسب عكساً مع مقدار تقوس عصابات الطاقة.

ويمكن أن يبدو مفهوم الكتلة الفعَّالة في البداية اصطناعياً نوعاً ما، إلاَّ أنه يسمح لنا بوصف الناقلية بمعادلة حركة تقليدية، كما في نموذج درودي. الفعل الوحيد للجسم الصلب يكمن في أنه يُغيّر الكتلة الفعَّالة للإلكترونات، ويمكن أن

A to Z

يكون هذا الفعل دراماتيكياً: إذْ يمكن أن تكون الكتلة الفعَّالة أقل بكثير أو أكبر بكثير من كتلة الإلكترون الحُرّ، ويمكن أن تكون سالبةً أيضاً. بالطبع، من أجل الإلكترونات الحرة، تساوي الكتلة الفعَّالة كتلة الإلكترون، m_e.

إن مفهوم الكتلة الفعَّالة يعود بنا إلى علاقة درودي من أجل الناقلية الكهربائية، $\sigma = ne^2\tau / m_e$. إذا عالجنا الناقلية في نموذجٍ كمومي، بدءاً من علاقة مشابهة للعلاقة $a = -\frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E(k)}{dk^2}eE$، فإن علاقة الناقلية النهائية ستأخذ نفس شكل العلاقة شبه التقليدية. لقد رأينا سابقاً أن الإلكترونات في العصابات الممتلئة جزئياً التي يجب دراستها لحساب الناقلية، هي تلك الإلكترونات الواقعة بالقرب من طاقة فرمي فقط، ولهذا السبب لا بد من:

- استبدال الكتلة في العلاقة شبه- التقليدية بالكتلة الفعَّالة عند طاقة فرمي؛
- وزمن الاسترخاء سيكون زمن استرخاءٍ من أجل الإلكترونات الواقعة بالقرب من طاقة فرمي،

والكثافة الإلكترونية، n، ستبقى ظاهرةً كما هي، ولكن ليس لأن كل الإلكترونات تُسهم في التيار؛ إذْ سبب ظهور الكثافة الإلكترونية، n، في المعادلة، يكمن في أن عدد الإلكترونات عند طاقة فيرمي يتعلق بالكثافة الإلكترونية. وهذا واضح تماماً في نموذج الإلكترون الحر حيث بُعد k_F ومن ثمَّ بُعد "كرة فرمي" يتعلق بتركيز الإلكترونات.

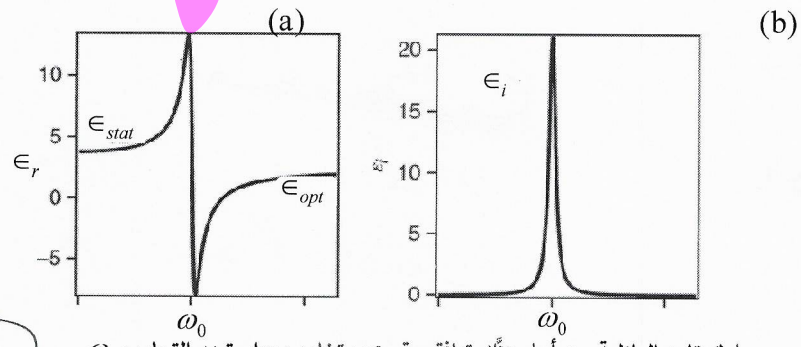
ثانياً- $\epsilon_r(\omega) = \frac{Ne^2}{V\epsilon_0 M}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\eta^2\omega^2} + \epsilon_{opt}$ و $\epsilon_i(\omega) = \frac{Ne^2}{V\epsilon_0 M}\frac{\eta\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\eta^2\omega^2}$ 14

يوضح الشكل المجاور رسماً تخطيطياً لجزأي تابع العازلية، $\epsilon(\omega)$:

القسم الحقيقي لـ $\epsilon(\omega)$ ثابت تقريباً عندما يكون التردد بعيداً جداً عن ω_0 (سواء أخفض بكثير أو أعلى بكثير)، ولكن قيمته عند الترددات المنخفضة أعلى من قيمته عند الترددات المرتفعة، لأنه عند الترددات العالية جداً تتحرك الأيونات ببطءٍ شديدٍ لدرجة لا تستطيع عندها مواكبة تغيّرات الحقل الكهربائي، حتى أن دوران ثنائيات- القطب الدائمة يكون أبطأ منها؛ ولذلك، يبقى الاستقطاب الإلكتروني السريع جداً فقط، ومن ثمَّ الاستقطاب الإجمالي للجسم الصلب يتناقص كثيراً.

أمَّا القسم التخيلي لـ $\epsilon(\omega)$ فيساوي الصفر تقريباً من أجل كل الترددات ما عدا في الجوار المباشر للتردد ω_0 حيث يُبدي قمةً بعرضٍ يُعطى وسطياً بـ η.

ثانياً- يكمن المعنى الفيزيائي للكميّة ϵ_i في أنَّ القسم التخيلي، ϵ_i، لتابع العازلية يقيس درجة التبدد للاستطاعة في الجسم الصلب المدروس حيث من الواضح أنها تكون أعلى ما يمكن عند تردد التجاوب حيث يأخذ المطال الاهتزازي أعلى قيمة؛ وهذا يؤدي إلى تحريض اهتزازات أخرى (بسبب الاحتكاك) وإلى تبدد استطاعة موافق لهذا التحريض.



سلوك تابع العازلية من أجل هزّاز توافقي قسري متخامد بجوار تردد التجاوب ω_0.

جامعة طرطوس
كليّة العلوم
قسم الفيزياء

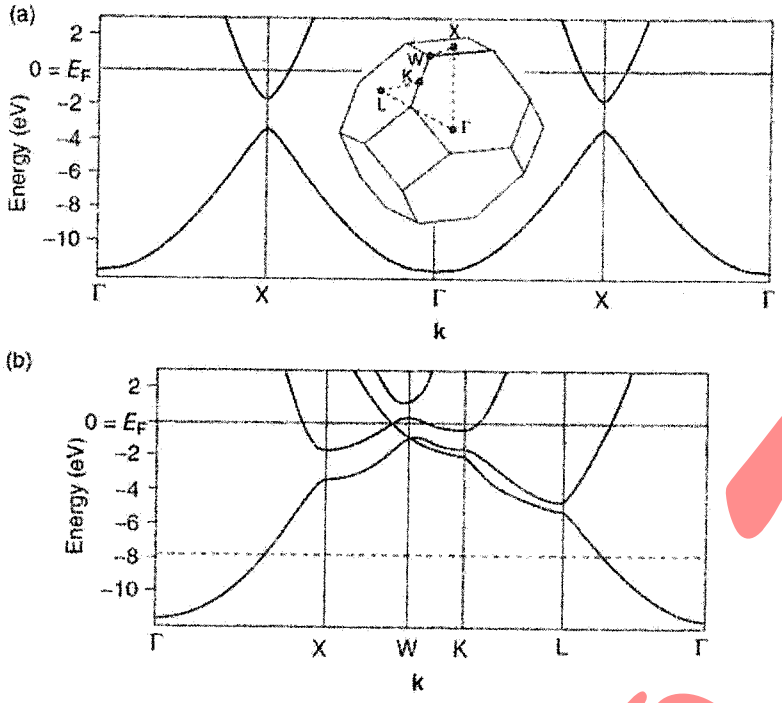
امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2**
لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء
للعام الدراسي 2024-2025/الدورة الفصلية **الأولى**

الاسم:
المدة: **ساعتان**
الدرجة القصوى: 70

السؤال الأول: (30 درجة)

أولاً- عند وصف العصابات الطاقية في الأجسام الصلبة تبيّن أنَّ للكمون الدوريّ بدوريّة الشبيكة البلّورية تأثيران رئيسان؛ **اذكر** هذين التأثيرين.

ثانياً- يوضح الشكل المرافق عصابات الطاقة للألمينيوم الذي يُعدُّ فلزاً بسيطاً بإلكترونات **s** وإلكترونات **p** فقط. **ادرس** في البداية التبدد الحاصل في اتجاه واحد فقط، مستفيداً من الشكل (a)،



ثالثاً- يُظهر الشكل (b) العصابات الطاقية للألمينيوم Al؛ **صفْ** أو **ادرس** هذا الشكل بالتفصيل **موضّحاً** الفارق بين هذه العصابات الطاقية عندما يمتلك الألمنيوم ثلاثة إلكترونات وإلكترون واحد في كل وحدة خلية.

رابعاً- **اذكر** بماذا تختلف بنية عصابات الطاقة لبلّورتي السيليكون **Si** وزرنيخيد الغاليوم **GaAs** عن بنية عصابة الطاقة للألمينيوم Al.

السؤال الثاني: (20 درجة)

يُساهم في الطواعيّة البارامغناطيسية كلاً من بارامغنطيسية كيوري وبارامغنطيسية باولي والمطلوب شرح بارامغنطيسية باولي بالتفصيل مرضّحاً إجابتك بالرسم وإثبات صحة العلاقة $\chi_m = \frac{1}{V}\mu_0\,\mu_B^2\,g(E_F)$.

السؤال الثالث: (20 درجة)

أولاً- اشرح مفهوم الكتلة الفعّالة بإيجاز واكتب العلاقة الرياضية الموافقة لها.

ثانياً- تُعطى علاقة تابع العازلية $\in(\omega)=\in_r(\omega)+i\in_i(\omega)$ لبلورةٍ عازلةٍ (يسقط عليها ضوء تواتره ω) بقسميه الحقيقي والتخيلي، بالشكل $\in(\omega)=\frac{Ne}{V\in_0 E_0}\frac{eE_0}{M}\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\eta^2\omega^2}+i\frac{\eta\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\eta^2\omega^2}\right)+\in_{opt}$،

ويُطلب ما يأتي: اكتب علاقة $\in_r(\omega)$ و $\in_i(\omega)$ بشكلٍ واضحٍ ثمَّ ادرس تغيرات هذين التابعين بدلالة التواتر ω موضّحاً إجابتك بالرسم ثمَّ أعط المعنى الفيزيائي للكميّة $\in_i$.

بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2025/02/04

مدرس المقرر
أ. د. **حسن عبد الكريم سليمان**

A to Z

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 30 درجة 4 درجات + 7 درجات + 9 درجات + 10 درجات

أولاً– لقد رأينا في كلا الوصفين أن للكمون الدوريّ بدوريّة الشبيكة البلّورية **تأثيران رئيسان**؛ 4 درجات

- يكمن التأثير الأول **في التناظر** الحاصل في عصابات الطاقة، الذي يسمح بجعل دراستنا **للتبدد** تقتصر على منطقة بريلوان الأولى **فقط**، بفضل تطابقه حول النقاط الأخرى في الشبيكة المقلوبة. كما أن هذا التناظر يُسبب انعكاساً لعصابات الطاقة عند حدّود منطقة بريلوان. 3
- والتأثير الثاني يكمن في اتساعات الفجوات الطاقية بين العصابات المنطبقة في نموذج الإلكترون الحر. 1

ثانياً– لدراسة التبدد **في اتجاه واحد**، نرى أنَّ الشكل (a) يُظهر التبدد **من النقطة** Γ **(مركز منطقة بريلوان الأولى)** إلى النقطة X عند حدّ منطقة بريلوان ويدخل إلى المنطقة اللاحقة (الثانية)، بالغاً النقطة Γ مرةً أخرى، وهكذا دواليك. 2

- ✓ هناك فجوة طاقة تفتح عند النقطة X 1
- ✓ وفوق الفجوة ثمة عصابة طاقة أخرى تتبدد– عكسياً في اتجاه النقطة Γ. 1
- ✓ يمكن بسهولة الإقرار بأن هذه العصابة هي بمثابة عصابة نشأت من مركز منطقة بريلوان التالية، كما في النموذج أحادي البعد. 1
- ✓ يكمن الفارق بين الشكلين بالتدريج الطاقي فقط؛ فقد تمّ الاختيار الطاقة الصفرية في النموذج أحادي البعد لتكون قاعاً للعصابة الطاقية. ويبدو أن هذا الاختيار يُعدُّ طبيعياً، لأنه يوافق الطاقة الحركية الصفرية للإلكترونات. ولكن لنا كامل الحرية في اختيار مبدأ تدريج الطاقة: في الفلزات، وفي معظم الأحيان يجري اختيار طاقة فيرمي؛ كمبدأ لحساب الطاقة، $E=0$، وهذا الخيار تمّ اعتماده في الشكل المعطى. 2

ثالثاً– يُظهر الشكل (b) العصابات الطاقية للألمينيوم Al في **اتجاهات تناظر**– **عالية** مختلفة في منطقة بريلوان الأولى. يمكننا إدراك الانحناء العكسي لعصابات الطاقة من المناطق المجاورة واتساع الفجوات الطاقية عند حدود مناطق بريلوان. في الواقع، يمكن وصف بنية عصابات الطاقة للألمينيوم في نموذج الإلكترونات شبه– الحرة بشكل جيد جداً، إلاَّ أنها تبدو معقدةً بسبب العصابات التي تظهر من المناطق المجاورة في الأبعاد الثلاثة: 2

- العصابات ممتلئة حتى طاقة فيرمي، 1
- ويوجد الكثير من عصابات الطاقة التي تتقاطع مع طاقة فيرمي، مما يعني أن الإلكترونات في الحالات المشغولة والواقعة تحت طاقة فيرمي تماماً بمقدورها التهيّج إلى حالات ضمن العصابة نفسها، وتقع فوق طاقة فيرمي تماماً. وبهذه الطريقة، تستطيع هذه الإلكترونات المشاركة في نقل التيارين الكهربائي والحراري. 3
  - عندما يمتلك الألمنيوم **ثلاثة إلكترونات في كل وحدة خلية**، فإنَّ هذه الإلكترونات تملأ عصابات الطاقة، مما يؤدي إلى فصل طاقة فيرمي عن قاع عصابة الطاقة بنحو 12 eV؛ 1
  - وإذا حوَت كل وحدة خلية **إلكترون واحد فقط**، تُصبح طاقة فيرمي في موقع أخفض بكثير من الموقع السابق، عند الخط المتقطع تقريباً في الشكل (b). وفي هذه الحالة، يُصبح الوضع مشابهاً أكثر للوضع في نموذج الإلكترون الحر: إذْ تتقاطع العصابات مع طاقة فيرمي عند نفس المسافة-k عن النقطة Γ في الاتجاهات كافة، ومن ثمَّ ستكوِّن الحالات الإلكترونية عند طاقة فيرمي كرةً في الفراغ-k. وهذا ما يحصل تماماً في حالة نموذج الإلكترونات الحرة. 2

رابعاً– من أجل الطاقات المنخفضة جداً تبقى عصابات الطاقة لبلّورتي **Si** و **GaAs** تأخذ شكلاً مشابهاً للقطوع المكافئة؛ كما يمكن توصيف اتساعات الفجوات الطاقية عند حدود مناطق بريلوان والعصابات ذات الانحناء العكسي. 2

غير أن البنية الإلكترونية لكلتا المادتين، تختلف عن البنية الإلكترونية لـ Al بنقطتين مهمتين:

- ✓ تكمن الأولى في وجود **فجوة طاقة مُطْلقة**، تُميّزها الساحة الرمادية في الشكل. تعني كلمة **مُطْلقة** أن الفجوة ليست مجرد فاصل طاقة يظهر عند حدّ منطقة بريلوان وحسب، بل فجوة طاقة تظهر في كامل منطقة بريلوان. إذْ لا توجد حالات طاقية في المناطق الرمادية أياً يكن المتجه الموجي، $\vec{k}$. 2
- ✓ **والاختلاف المميز الثاني** عن الألمنيوم Al يظهر عند ملء الحالات بالإلكترونات المتاحة: **فعند انشغال الحالات** وفقاً لمبدأ باولي، تمتلئ العصابات الواقعة تحت المنطقة المحظورة الرمادية بشكلٍ كاملٍ، ولا يتبقى إلكترونات من أجل العصابات الواقعة فوق المنطقة المحظورة. 2
- ✓ ويبقى موقع طاقة فيرمي (الكمون الكيميائي) مثار بحثٍ؛ وفي كل الأحوال، يمكننا الآن القول أن موقع طاقة فيرمي سيكون في مكان ما داخل المنطقة المحظورة. 1
- ✓ يمكن وضع صفر تدريج الطاقة بطريقة اختيارية، ومن أجل أنصاف النواقل يوضع عادةً عند سقف الحالات المشغولة بالإلكترونات. يمكننا أن نؤكد وبثقة أن هذه المواد لا تُعدُّ فلزاتٍ في سياق التعريف المذكور أعلاه: ففي الفلزات لا توجد عصابات طاقة تقطع طاقة فيرمي ولا توجد إلكترونات يمكن لطاقاتها أن تزداد بكمية صغيرة فقط لكي تشارك في الناقلية الكهربائية. 2

في الواقع، إذا وجب أن تزداد طاقة إلكترون، فيجب أن تزداد، على الأقل، بكمية توافق عرض فجوة الطاقة. 1

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 20 درجة

- تُبدي الإلكترونات الحرة سلوكاً بارامغنطيسياً: فإذا امتلك كلّ إلكترونٍ حرٍ سبيناً قيمته $\frac{1}{2}$ وعزماً مغناطيسياً μ_B، فمن المرجّح أن تشارك الإلكترونات الحرة في تمغنط الإشباع للجسم الصلب بقيمة تساوي حاصل ضرب μ_B في كثافة الإلكترونات.
- يتم بلوغ هذا الإشباع عند اصطفاف كل العزوم المغنطيسية بشكلٍ موازٍ للحقل الخارجي (أو اصطفاف السبينات بشكلٍ مسايرٍ للحقل). غير أن حقيقة الأمر ليست كذلك على الإطلاق والطواعيّة البارامغنطيسية للإلكترونات الحرة صغيرة جداً فعلياً.
- يمكن فهم الطواعيّة البارامغنطيسية لإلكترونات حرة وحسابها باستخدام الشكل المجاور:

جرى تصنيف الحالات المشغولة بإلكترونات حرة في الشكل (a) إلى فئتين: واحدة بعزومٍ مغناطيسيةٍ مسايرةٍ لحقل خارجي، B_0، وأخرى بعزومٍ مغناطيسيةٍ موازيةٍ له؛ افترض هنا أن يكون هذا الحقل الخارجي صفراً تقريباً.

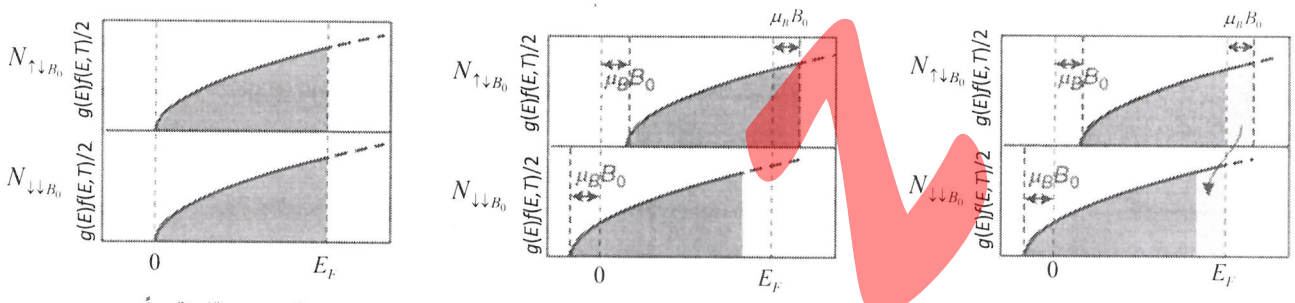
- يُظهر الشكل (b) ماذا يحدث عند ازدياد B_0 حتى قيمة محدودة. ترفع الإلكترونات طاقتها أو تُخفِّضها بمقدار $\mu_B B_0$ تبعاً لاتجاه عزومها المغنطيسية بالنسبة لاتجاه الحقل الخارجي.
- بما أن μ_B صغير جداً، فإن هذا التغيّر الطاقي يكون صغيراً جداً، أياً يكن الحقل الخارجي الذي يمكن بلوغه، إذْ يبلغ هذا التغيّر نحو 10^{-5} eV، وهو أقل بكثير من الفاصل الطاقي بين قاع العصابة الطاقية وطاقة فيرمي.

- وبما أن هذا الانزياح حدث، فإن الإلكترونات التي انتقلت إلى ما فوق طاقة فيرمي تستطيع تخفيض طاقاتها بقلب سبيناتها حيث تُصبح الإلكترونات بعزمٍ مغنطيسيٍ موازٍ للحقل الخارجي، كما يوضح الشكل (c).
- وهذا يؤدي إلى توافر إلكترونات بعزمٍ مغنطيسيٍ موازٍ للحقل بعدد أكبر من عدد الإلكترونات المتوافرة بعزمٍ مغنطيسيٍ مسايرٍ له، أي أن هذا الانزياح يؤدي إلى استجابة بارامغنطيسية.

لإيجاد χ_m، يجب أن نحدد كمية الإلكترونات التي تقلب سبيناتها لكي تمتلك عزماً مغناطيسياً موازياً للحقل الخارجي؛ تُمثَّل هذه الإلكترونات في الشكل (c) بالقطعة الرمادية الفاتحة حيث تبلغ مساحة كل قطعة $\frac{1}{2}g(E_F)\mu_B B_0$.

ولهذا السبب، يكون الفارق بين الإلكترونات التي عزومها المغنطيسية موازية للحقل وتلك التي عزومها مسايرة له مساوياً

$$N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0} = g(E_F)\mu_B B_0 ,$$



(a) لا يوجد حقل تقريباً (b) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة (c) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة

حيث تُشير الأسهم إمَّا إلى أن العزوم والحقل متوازية وإمَّا أنها متسايرة.

ومن ثمَّ يبلغ التمغنط المحصِّل: $$M = \frac{1}{V}\left(N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0}\right)\mu_B = \frac{1}{V}g(E_F)\mu_B^2 B_0 ,$$

ومن ثمَّ تُصبح علاقة الطواعيّة المغناطيسية، χ_m، من الشكل: $$\chi_m = \frac{1}{V}\mu_0\,\mu_B^2\,g(E_F),$$

والتي قيمتها صغيرة، ومن نفس رتبة الطواعيّات الدايامغنطيسية.

فالحقل اللازم لصفّ كل السبينات لا يكفي أن يتحقق الشرط $\mu_B B_0 >> k_B T$ فقط، وإنما يجب أن تتحقق المتراجحة $\mu_B B_0 > E_F$، أي يجب أن يكون مقدار التغيّر الطاقي الذي تتعرض له الإلكترونات نتيجة تطبيق حقل خارجي أكبر من طاقة فيرمي أيضاً، وهو مقدار كبير جداً هنا. في حقيقة الأمر، تختلف بارامغنطيسية باولي عن بارامغنطيسية كيوري تماماً: ففي بارامغنطيسية كيوري، فعلياً يمكن بلوغ التمغنط القوي، لأن ما تحتاجه الطاقة المغنطيسية، فقط أن تكون أعلى بكثير من الطاقة الحرارية. أمَّا من أجل بارامغناطيسية باولي، فإنها بحاجة لأن تتجاوز طاقة فيرمي، وهذا أمر غير ممكن.

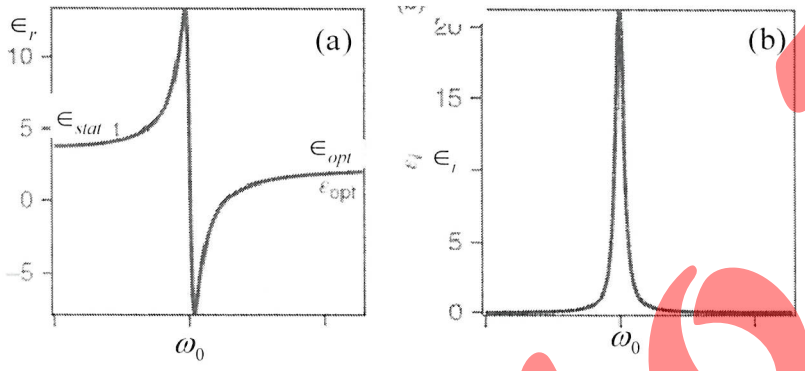
توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثالث: 20 درجة

أولاً- تعبر الكتلة الفعَّالة عن مقدار تأثير قوة الحقل البلّوري على حركة الجسيم/ حامل الشحنة الكهربائية في البلّورة ويُعبّر عنها بالعلاقة $m^* = \hbar^2\left(\frac{d^2E(k)}{dk^2}\right)^{-1}$ وتتناسب عكساً مع مقدار تقوس عصابات الطاقة.

ويمكن أن يبدو مفهوم **الكتلة الفعَّالة** في البداية اصطناعياً نوعاً ما، إلاَّ أنه يسمح لنا بوصف الناقلية بمعادلة حركة تقليدية، كما في نموذج درودي. الفعل الوحيد للجسم الصلب يكمن في أنه يُغيِّر الكتلة الفعَّالة للإلكترونات، ويمكن أن يكون هذا الفعل دراماتيكياً:

إذْ يمكن أن تكون الكتلة الفعَّالة **أقل** بكثير أو **أكبر** بكثير من كتلة الإلكترون الحُرّ، ويمكن أن تكون **سالبةً** أيضاً. بالطبع، من أجل الإلكترونات الحرة، تساوي الكتلة الفعَّالة كتلة الإلكترون، m_e.

إن مفهوم الكتلة الفعَّالة يعود بنا إلى علاقة درودي من أجل الناقلية الكهربائية، $\sigma = ne^2\tau / m_e$. إذا عالجنا الناقلية في نموذجٍ كمومي، بدءاً من علاقة مشابهة للعلاقة $a = -\frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E(k)}{dk^2}eE$، فإن علاقة الناقلية النهائية ستأخذ نفس شكل العلاقة شبه التقليدية. لقد رأينا سابقاً أن الإلكترونات في العصابات الممتلئة جزئياً التي يجب دراستها لحساب الناقلية، هي **تلك الإلكترونات الواقعة بالقرب من طاقة فرمي فقط**، ولهذا السبب لا بد من:



استبدال الكتلة في العلاقة شبه- التقليدية بالكتلة الفعَّالة عند طاقة فرمي؛

وزمن الاسترخاء سيكون زمن استرخاءٍ من أجل الإلكترونات الواقعة بالقرب من طاقة فرمي،

والكثافة الإلكترونية، n، ستبقى ظاهرةً كما هي، ولكن ليس لأن كل الإلكترونات تُسهم في التيار؛ إذْ سبب ظهور الكثافة الإلكترونية، n، في المعادلة، يكمن في أن عدد الإلكترونات عند طاقة فيرمي يتعلق بالكثافة الإلكترونية. وهذا واضح تماماً في نموذج الإلكترون الحر حيث بُعد k_F ومن ثمَّ بُعد "كرة فرمي" يتعلق بتركيز الإلكترونات.

ثانياً- $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_{opt} + \frac{Ne^2}{V\epsilon_0 M}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\eta^2\omega^2}$ و $\epsilon_i(\omega) = \frac{Ne^2}{V\epsilon_0 M}\frac{\eta\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\eta^2\omega^2}$

يوضح الشكل المجاور رسماً تخطيطياً لجزأي تابع العازلية، $\epsilon(\omega)$:

القسم الحقيقي لـ $\epsilon(\omega)$ ثابت تقريباً عندما يكون التردد بعيداً جداً عن ω_0 (سواء أخفض بكثير أو أعلى بكثير)، ولكن قيمته عند الترددات المنخفضة أعلى من قيمته عند الترددات المرتفعة، لأنه عند الترددات العالية جداً تتحرك الأيونات ببطءٍ شديد لدرجة لا تستطيع عندها مواكبة تغيّرات الحقل الكهربائي، حتى أن دوران ثنائيات- القطب الدائمة يكون أبطأ منها؛ ولذلك، يبقى الاستقطاب الإلكتروني السريع جداً **فقط**، ومن ثمَّ الاستقطاب الإجمالي للجسم الصلب يتناقص كثيراً.

أمَّا **القسم التخيلي** لـ $\epsilon(\omega)$ فيساوي الصفر تقريباً من أجل كل الترددات ما عدا في الجوار المباشر للتردد ω_0 حيث يُبدي قمةً بعرضٍ يُعطى وسطياً بـ η.

ثانياً- يكمن المعنى الفيزيائي للكميّة ϵ_i في أنَّ القسم التخيلي، ϵ_i، لتابع العازلية **يقيس درجة التبدد للاستطاعة في** الجسم الصلب المدروس حيث من الواضح أنها تكون أعلى ما يمكن **عند تردد التجاوب** حيث يأخذ المطال الاهتزازي أعلى قيمة؛ وهذا يؤدي إلى تحريض اهتزازات أخرى (بسبب الاحتكاك) وإلى تبدد استطاعة موافق لهذا التحريض.

جامعة طرطوس
كليّة العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر فيزياء الحالة الصلبة 2
لطلاب السنة الرابعة فيزياء
للعام الدراسي 2023-2024/الدورة الفصلية الثانية

الاسم:
المدة: ساعتان
الدرجة القصوى: 70

السؤال الأول: (25 درجة)

أولاً- اشرح مفهوم الكتلة الفعّالة بإيجاز واكتب العلاقة الرياضية الموافقة لها.

ثانياً- عرّف تابع بلوخ الموجي واكتب شكله ووضّح معناه الفيزيائي ثمّ بيّن فيما إذا كان المقدار $\hbar\vec{k}$ يُمثّل اندفاعاً لموجة بلوخ أم اندفاعاً بلّورياً.

ثالثاً- أثبت أنّ ظهور فجوات الطاقة عند حدّ منطقة بريلوان أمرٌ واقعٌ موضحاً إجابتك بالرسم.

السؤال الثاني: (25 درجة)

اشرح كيفية حصول الانتقالات الإلكترونية- الضوئية في البلّورات العازلة والبلّورات النصف ناقلة مبيناً كيفية تأثير بنية عصابات الطاقة لمادةٍ متبلورةٍ على امتصاص الضوء من خلال دراسة تابع العازلية للتواترات $\omega \in$ في منطقتي الضوء المرئي والأشعة فوق البنفسجية، وموضحاً إجابتك بالرسم.

السؤال الثالث: (20 درجة)

أولاً- ادرس تماسك حالة الناقلية الفائقة وعلاقتها بتكميّة التدفق المغناطيسي من خلال حلقة فائقة الناقلية ثمّ أثبت أنّ هذا التدفق مكمّى؛ ناقش العلاقة التي تحصل عليها بنتيجة هذه الدراسة بالتفصيل.

ثانياً- عرّف أجهزة التداخل الكوانتي فائقة الناقلية SQUIDs ثمّ اشرح مبدأ عملها موضّحاً كيفية استثمار تماسك حالة الناقلية الفائقة فيها.

بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2024/07/28

مدرس المقرر

أ. د. **حسن عبد الكريم سليمان**

مكتبة A to Z

سلم تصحيح مدرس فيزياء، الحالة الصلبة (ع)

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 25 درجة

أولاً– تعبر الكتلة الفعَّالة عن مقدار تأثير قوة الحقل البلّوري على حركة الجسيم/ حامل الشحنة الكهربائية في البلّورة ويُعبّر عنها بالعلاقة $m^* = \hbar^2\left(\frac{d^2E(k)}{dk^2}\right)^{-1}$ وتتناسب عكساً مع مقدار تقوس عصابات الطاقة.

ويمكن أن يبدو مفهوم الكتلة الفعَّالة في البداية اصطناعياً نوعاً ما، إلاَّ أنه يسمح لنا بوصف الناقلية بمعادلة حركة تقليدية، كما في نموذج درودي. الفعل الوحيد للجسم الصلب يكمن في أنه يُغيّر الكتلة الفعَّالة للإلكترونات، ويمكن أن يكون هذا الفعل دراماتيكياً:

إذْ يمكن أن تكون الكتلة الفعَّالة أقل بكثير أو أكبر بكثير من كتلة الإلكترون الحُرّ، ويمكن أن تكون سالبةً أيضاً. بالطبع، من أجل الإلكترونات الحرة، تساوي الكتلة الفعَّالة كتلة الإلكترون، m_e.

إن مفهوم الكتلة الفعَّالة يعود بنا إلى علاقة درودي من أجل الناقلية الكهربائية، $\sigma = ne^2\tau/m_e$. إذا عالجنا الناقلية في نموذجٍ كمومي، بدءاً من علاقة مشابهة للعلاقة $v = -\frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E(k)}{dk^2}eE$، فإن علاقة الناقلية النهائية ستأخذ نفس شكل العلاقة شبه التقليدية. لقد رأينا سابقاً أن الإلكترونات في العصابات الممتلئة جزئياً التي يجب دراستها لحساب الناقلية، هي تلك الإلكترونات الواقعة بالقرب من طاقة فرمي فقط، ولهذا السبب لا بد من:

- استبدال الكتلة في العلاقة شبه– التقليدية بالكتلة الفعَّالة عند طاقة فرمي؛
- وزمن الاسترخاء سيكون زمن استرخاءٍ من أجل الإلكترونات الواقعة بالقرب من طاقة فرمي،

والكثافة الإلكترونية، n، ستبقى ظاهرةً كما هي، ولكن ليس لأن كل الإلكترونات تُسهم في التيار؛ إذْ سبب ظهور الكثافة الإلكترونية، n، في المعادلة، يكمن في أن عدد الإلكترونات عند طاقة فيرمي يتعلق بالكثافة الإلكترونية. وهذا واضح تماماً في نموذج الإلكترون الحر حيث بُعد k_F ومن ثمَّ بُعد "كرة فرمي" يتعلق بتركيز الإلكترونات.

ثانياً– إنَّ تابع بلوخ تابع موجي عام يأخذ الشكل البسيط الآتي ويُعدُّ حلاً لمعادلة شرودنغر:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r})\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{r}\right),$$

حيث $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ تابع دوري بدورية شبكة برافيه البلّورية:

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}\left(\vec{r}+\vec{R}\right).$$

ويُعزى وجود الدليل $\vec{k}$ إلى حقيقة أن التابع $u_{\vec{k}}(\vec{r})$، يمكن أن يتغيّر تبعاً للمتجه الموجي، $\vec{k}$.

يشبه الحل المذكور أعلاه (تابع بلوخ) حل الإلكترون الحر إلى حدٍ كبيرٍ؛

فهو موجة مستوية معدَّلة بتابع دوريّ بدوريّة الشبكة البلّورية وهذه الموجة بحد ذاتها هي حقيقة مميزة، لأنها تعني أن الحالات الإلكترونية تتوزّع في كامل البلّورة، حتى وإن أدخلنا الكمون الدوريّ بدوريّة الشبكة البلّورية.

إذا طبّقنا مؤثر الاندفاع $-i\hbar\vec{\nabla}$، على تابع بلوخ، نحصل على المساواة الآتية:

$$-i\hbar\vec{\nabla}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = -i\hbar\vec{\nabla}\left[u_{\vec{k}}(\vec{r})\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]$$
$$= -i\hbar\left\{\left(u_{\vec{k}}(\vec{r})\right)\vec{\nabla}\left(\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right)+\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\vec{\nabla}\left(u_{\vec{k}}(\vec{r})\right)\right\}$$
$$= \hbar\vec{k}\,\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) - \exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{r}\right)i\hbar\vec{\nabla}u_{\vec{k}}(\vec{r}).$$

ومن ثمَّ المقدار $\hbar\vec{k}$ مجرد قيمة ذاتية للاندفاع عندما $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ ثابت، أي عندما يُمثِّل تابع بلوخ موجة إلكترونية حرة. إذن، المقدار $\hbar\vec{k}$ لا يمكن أن يكون اندفاعاً لموجة بلوخ لعدم تغيّر الحالات سواء عند إضافة متجه شبكة مقلوبة أو عند طرحه. وبدلاً من "الاندفاع" البسيط، تسمى الكمية $\hbar\vec{k}$، الاندفاع البلّوري. خلافاً للاندفاع العادي الذي يكون مُصاناً تماماً، يمكن للاندفاع البلّوري أن يُصان فقط في إطار متجه الشبكة المقلوبة.

لإثبات أنَّ ظهور فجوات الطاقة عند حدّ منطقة بريلوان أمر واقع ندرس ارتحال إلكترونٍ حرٍ بشكلٍ عمودي على مجموعة مستويات بلورية، التباعد فيما بينها يساوي a:

فإذا كان x الاتجاه العمودي على هذه المستويات البلّورية، فإن الإلكترون يمتلك التابع الموجي $\psi(x)\propto e^{ikx}$ في ذاك الاتجاه، أي يسلك سلوكاً مشابهاً لسلوك موجة مستوية بطول موجة، يساوي $\lambda = 2\pi/k$؛

ومثل هذا التابع يُحقق شرط براغ، $2a\sin\theta = n\lambda = n\frac{2\pi}{k}$، من أجل قيمة لـ k؛ $k = n\pi/a$. وهذا يعني أن الشبكة البلّورية تعكس الموجة بزاوية ما.

بما أن الجسم الصلب كبير جداً، فإن مطال الموجة المنعكسة– العائدة سيكون في نهاية المطاف كمطال الموجة الواردة– القادمة، بحيث يكون للتابع الموجي الكليّ الشكل $\psi(x)\propto e^{ikx}+Ae^{-ikx}$ بطويلة مطال تساوي الواحد، $|A|=1$.

إن التناظر اليساري/اليميني للبلّورة المُفترض توافره هنا، يستوجب أن يكون المطال، A، حقيقياً ولذلك ثمة نتيجتان محتملتان مُمثلتان بالتابعين الموجيين:

$$\psi(+)\propto e^{i(\pi/a)x}+e^{-i(\pi/a)x}=2\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right), \qquad (45\text{-}6)$$

$$\psi(-)\propto e^{i(\pi/a)x}-e^{-i(\pi/a)x}=2i\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right). \qquad (46\text{-}6)$$

وكلتاهما تُمثِّلان موجات إلكترونية مستقرة.

تنزاح كثافتهما الاحتمالية $|\psi(+)|^2$ و $|\psi(-)|^2$ بالنسبة للكمون الأيوني الموجب، كما في الشكل المبيّن أدناه:

- يُظهر التابع الموجي $\psi(+)$ تراكماً للكثافة الاحتمالية بجوار القلوب الأيونية، في حين يُظهر التابع الموجي $\psi(-)$ استنفاداً لها بذلك الجوار.
- ولذلك، يمتلك التابع $\psi(+)$ طاقة أدنى من تلك التي يمتلكها التابع $\psi(-)$ على الرغم من أن لكليهما المتجه الموجي ذاته، $k = n\pi/a$.
- ومن ثمَّ، يوافق التابعان الموجيان $\psi(+)$ و $\psi(-)$ الحلّ تحت فجوة الطاقة وفوقها تماماً عند حدّ منطقة بريلوان، على الترتيب.
- نلاحظ أن هاتين الكثافتين الاحتماليتين مختلفتان تماماً عن حالة موجة إلكترون حرٍ، حيث كانت الكثافة الاحتمالية، $|\psi|^2$، ثابتة.

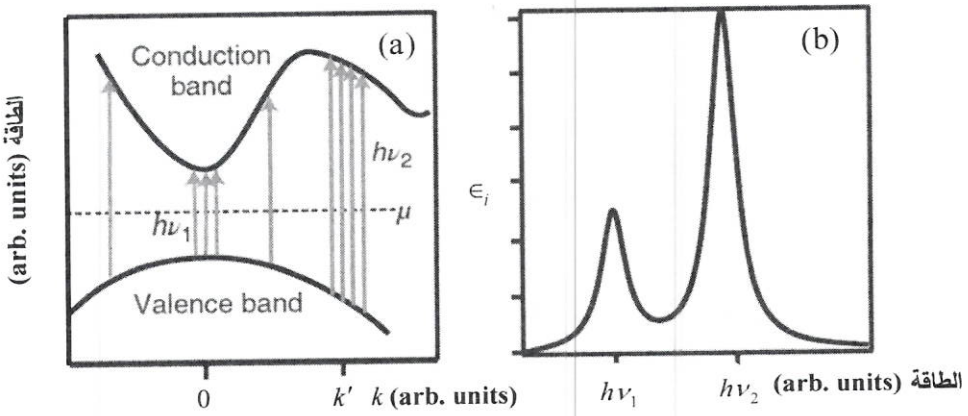
مكتبة A to Z

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 25 درجة

- يستطيع الضوء تهييج فونونات بصرية من أجل ضوءٍ تحت أحمر بطاقة فوتونية أقل بكثير من عرض الفجوة الطاقية، E_g، $(h\nu << E_g)$.
- أمَّا من أجل فوتونات تحقق المتراجحة $h\nu > E_g$ تُصبح التهيّجات الإلكترونية عبر الفجوة الطاقية البلّورات العازلة وأنصاف النواقل ممكنةً.
- لقد فرضنا أنه من أجل ترددات أعلى من تردد الفونون البصري يوجد استقطاب إلكتروني فقط، وهو المفعول الذّريّ الذي يؤدي إلى حدٍ بصريٍ ϵ_{opt} في تابع العازلية عالي التواتر. ومن ثمَّ يكون تابع العازلية عالي التواتر الناتج من الشكل $\epsilon(\omega)=\epsilon_{opt}+i\,0$ حيث $\epsilon_{opt}=\frac{N\alpha}{V\,\epsilon_0}+1$؛ إنَّ غياب القسم التخيلي يفترض عدم إمكانية امتصاص أي طاقة؛ ومن أجل $h\nu > E_g$، يحتاج هذا المفهوم لإعادة نظرٍ.
- يبدو أن $\epsilon(\omega)$ ليس ثابتاً، بل يمتلك بعض المعالم الواضحة؛ كالقمم، من أجل معظم المواد. وهذا واضح من المواد المختلفة الألوان، بما فيها الفلزات.
- إن هذه التابعية الترددية لـ $\epsilon(\omega)$ في منطقة الضوء المرئي والأشعة فوق البنفسجية ناتجة من تهيّج الإلكترونات من الحالات المشغولة إلى الحالات الشاغرة ولذلك نحن بحاجة لدراسة بنية عصابات الطاقة للمادة لكي نرى أي التهيّجات ممكنة فعلياً؛ ولكن الفكرة الرئيسة مفهومة من الفيزياء الذّريّة.

فالذرات تمتلك سويات طاقة منفصلة وعندما يُسمح لانتقالٍ ما بالحدوث بين سوية مشغولة وأخرى شاغرة وفق قواعد الاصطفاء البصرية، سيؤدي ذلك إلى امتصاص شديد للضوء عندما تساوي طاقة الفوتون الفارق الطاقي بين هاتين السويتين. ومن أجل الأجسام الصلبة، تتعرَّض سويات الطاقة الذّريّة لتشكّل عصابات طاقية، ولكن الامتصاص الشديد يحدث أيضاً من أجل طاقات فوتونية تسمح بانتقالات متعددة من حالات مشغولة إلى حالات شاغرة.

لندرس بنية عصابة طاقة مبسطة لعازلٍ أو نصف ناقلٍ، يوضحها الشكل (a): نفرض أن الكمون الكيميائي يقع في مكان ما بين عصابة التكافؤ (VB) وعصابة الناقلية (CB). يمكن أن يحدث امتصاص الفوتونات عندما $h\nu > E_g$، فيؤدي إلى تهيُّج إلكترونات من VB إلى CB.



A to Z مدينة

والمتجه الموجي من أجل الفوتونات التي طاقاتها تقع في المجال المرئي أو فوق البنفسجي يكون قصيراً جداً ولذلك يستوجب انحفاظ الاندفاع البلّوري أن يبقى المتجه الموجي للإلكترون، $\vec{k}$، ثابتاً في ذلك الانتقال (زائد متجه الشبكة المقلوبة). يُشار للانتقالات الممكنة، المتحرضة– فوتونياً، في الشكل (a) بأسهم فاتحة اللون.

توافق هذه الانتقالات امتصاص الطاقة من قبل الجسم الصلب، ومثل هذا الامتصاص يمكن أن يوصف بالقسم التخيلي لتابع العازلية، $\in_i$. ويمكننا أن نكتب من وحي النموذج البسيط العلاقة الآتية لتابع العازلية:

$$\in_i(\omega) \propto \sum_{\vec{k}} M^2 \delta\left(\underbrace{E_{C'}(\vec{k}) - E_{V'}(\vec{k})}_{\Delta E} - h\nu\right),$$

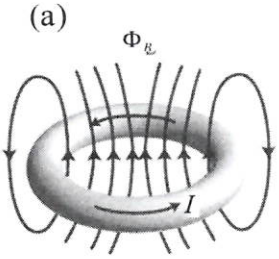
حيث يشمل المجموع كل قيم $\vec{k}$ المسموحة في منطقة بريلوان الأولى، و M عنصر مصفوفة يُحدد احتمال الانتقال، ويرمز δ لتابع دلتا– ديراك، و $E_{V'}(\vec{k})$ و $E_{C'}(\vec{k})$ طاقتا تبدد عصابتي الناقلة والتكافؤ على الترتيب.

إذا صرفنا النظر عن عنصر المصفوفة، فإن العلاقة الأخيرة تحسب عدد الانتقالات الممكنة من أجل طاقة $h\nu$ محددة، التابع δ يساوي الواحد فقط إذا كان الفارق الطاقي $E_{C'}(\vec{k}) - E_{V'}(\vec{k})$ مساوٍ تماماً لـ $h\nu$. ولذلك، يمتلك تابع العازلية، $\in_i(h\nu)$، قيمة قصوى عند قيم $h\nu$ التي من أجلها تكون الانتقالات المتعددة المختلفة بين VB و CB ممكنة. والحالة في الشكل (a) هي من أجل بداية الامتصاص عند الطاقة $h\nu_1 = E_g(\vec{k}=0)$ وحول $\vec{k} = \vec{k}'$، أي في منطقة بريلوان حيث يكون VB و CB موازيان لبعضهما البعض. بهذا الشكل، يمكن توقع القمم (القيم القصوى) في $\in_i$ عند الطاقتين $h\nu_1$ و $h\nu_2$، كما يوضح الشكل (b)؛ وطالما أن هذه القمم توافق امتصاصاً شديداً، فإنها تُحدد لون الجسم الصلب. بهذا الشكل، يكمن مفتاح الامتصاص الشديد في أن حالات VB و CB تتبدد بشكلٍ متوازٍ في أجزاءٍ كبيرةٍ من منطقة بريلوان. من الواضح أن هذا الشرط محقق من أجل عصابات مستوية جداً، تنبثق من حالات شديدة التوضّع. ومن ثمَّ، تُذكِّرنا هذه الحالة بامتصاص الضوء بالانتقالات بين السويات الذريّة.

توزيع الدرجات على جواب السؤال الثالث: 20 درجة

أولاً– إنَّ حالة الناقلية الفائقة مرتبطة بتابعٍ موجيٍ متماسكٍ ماكروسكوبياً، يُبنى من أزواج كوبر في حالتها الأرضية. والنتيجة المباشرة للتابع الموجي المتماسك ماكروسكوبياً تكمن في تكميّة التدفق المغناطيسي من خلال حلقة فائقة الناقلية، كما يوضح الشكل (a).

(a)



إذا فرضنا أن التابع الموجي للناقل الفائق متماسكٌ في كامل الحلقة، أمكننا تطبيق شرط التكميّة لبور، بشكلٍ مشابهٍ لتطبيقه من أجل ذرة الهيدروجين ولكن على المقياس الماكروسكوبي.

ينص شرط بور على أن عدداً صحيحاً من أطوال موجة دوبروي، $\lambda = h/p$، يجب موائمته على محيط الحلقة؛ $\oint d\vec{r} = \lambda n = hn/\vec{p}$ التي يوضحها الشكل (a)، أو أن

$$\oint \vec{p}\cdot d\vec{r} = hn\,, \qquad (1)$$

حيث يجري التكامل على المحيط الداخلي للحلقة، و n عدد صحيح.

ولرؤية ماذا يحدث بوجود حقل مغناطيسي، يمكننا أن نضمّن هذا الحقل في المعادلة (1) باستخدام الكمون المتجه والقواعد ذاتها التي وضعت من أجل حالة الميكانيك الكوانتي؛ إذْ يمكننا أن نكتب العلاقة الآتية:

$$\oint \left(\vec{p} - q\vec{A}\right)\cdot d\vec{r} = hn\,. \qquad (2)$$

وذلك من أجل جسيمات كتلتها m_s، وكثافتها n_s، وشحنتها q. ولدينا $\vec{p} = m_s\vec{\upsilon}$؛ وكثافة التيار المرتبط بهذه الجسيمات يساوي $\vec{j} = n_s q\vec{\upsilon}$، بحيث يمكننا كتابة العلاقة الآتية:

$$\frac{m_s}{n_s q}\oint \vec{j}\cdot d\vec{r} - q\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = hn\,. \qquad (3)$$

يمكن إعادة كتابة التكامل الثاني في المعادلة (3) باستعمال مبرهنة ستوكس التكاملية للانتقال من التكامل الخطي إلى التكامل السطحي على مساحة الوسط (التجويف) المحدود بالحلقة:

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int \mathrm{rot}\ \vec{A}\cdot d\vec{a} = \int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \Phi_B\,, \qquad (4)$$

حيث Φ_B التدفق المغناطيسي من خلال التجويف في الحلقة.

بهذا الشكل، تُصبح المعادلة (3) من الشكل الآتي:

$$\frac{m_s}{n_s q^2}\oint \vec{j}\cdot d\vec{r} - \Phi_B = n\frac{h}{q}\,. \qquad (5)$$

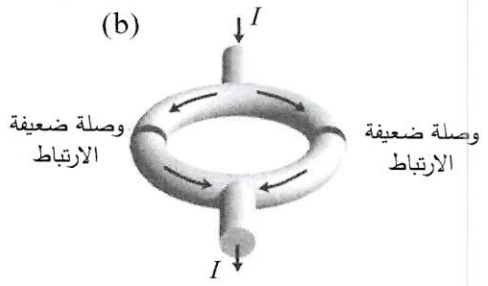
تفترض المعادلة الأخيرة أن التدفق المغناطيسي من خلال الحلقة يمكن أن يتغيّر بوحدات من h/q فقط إذا كانت كثافة التيار في التكامل الأول في المعادلة (5) ثابتة.

يمكننا أن نجري خطوة أخرى بعد، ونضع مسار التكامل الأول في المعادلة (5) في عمق الحلقة قليلاً، خلف تيارات الحجب تماماً، التي تتغلغل لتصل إلى عمق تغلغل لندن، λ_L. عندها، وفي كثير من الحالات تكون كثافة التيار صغيرة للغاية لدرجة الإهمال، ومن ثمَّ نحصل على المساواة $\Phi_B = n(h/q)$، وهذا يعني أن التدفق المغناطيسي من خلال حلقة فائقة الناقلية مُكمّى بوحدات الـ h/q.

مكتبة A to Z

(10)

ثانياً- يمكن استثمار تماسك حالة الناقلية الفائقة في ما يسمى أجهزة التداخل الكوانتي فائقة الناقلية SQUIDs التي يوضحها الشكل (b). فهي تتألف من "شوكتين" فائقتي الناقلية وطبقات أكسيد رقيقة أو تماسات نقطية تقع بينهما أي ما يسمى بوصلات ضعيفة الارتباط. ويمكن صياغة مبدأ عملها وفق الآتي:



تستطيع أزواج كوبر العبور بطريقة النفق عبر تلك الوصلات من ناقلٍ فائقٍ لآخر وتوجد علاقة محددة بين طور حالة الناقلية الفائقة في إحدى الشوكتين وطور حالة الناقلية الفائقة في الشوكة الأخرى.

إنَّ الحقل المغنطيسي الذي يدخل منتصف تجويف الحلقة عمودياً يؤدي إلى ظهور تيارٍ فائقٍ إضافي، يُبقي التدفق من خلال الحلقة من مضاعفات صحيحة لكوانتم التدفق.

وهذا بدوره يُسببُ فرق طَورٍ بين التيار الذي يعبر إحدى الوصلتين الضعيفتين والتيار الآخر الذي يعبر الوصلة الضعيفة الأخرى. ثمَّ إنَّ التيار الأعظمي المتدفق من كامل النبيطة يُحدد بمقدار التداخل بين التيار "الأيسر" والتيار "الأيمن" ويُرصد فيه تذبذبات تابعة للحقل المغناطيسي المطبق. وهذا يوافق كمَّات تدفقٍ فرديةٍ تدخل الحلقة. بهذه الطريقة يمكن قياس أي تغيرٍ يطرأ على الحقل المغناطيسي مهما كان صغيراً. إذن، نبائط التداخل الكوانتي فائقة الناقلية SQUIDs حساسة جداً للحقول المغناطيسية البالغة الصغر، ولذلك، يمكن استخدامها لقياس هذه الحقول الضعيفة جداً.

A to Z مكتبة

أستاذ المقرر
الدكتور حسن سلمان

آب / ٢٠٠٤

جامعة طرطوس كليّة العلوم قسم الفيزياء	امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2** لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء للعام الدراسي 2023-2024/الدورة الفصلية **الأولى**	الاسم: المدة: **ساعتان** الدرجة القصوى: **70**

السؤال الأول: (22 درجة)

أولاً– ما هو شكل تابع بلوخ الموجي وما هو المعنى الفيزيائي له؟ بيّن فيما إذا كان المقدار $\hbar\vec{k}$ يُمثّل اندفاعاً لموجة بلوخ أم اندفاعاً بلّورياً.

ثانياً– أثبت أنّ ظهور فجوات الطاقة عند حدّ منطقة بريلوان أمر واقع موضحاً إجابتك بالرسم.

ثالثاً– ادرس سرعة المجموعة لأمواج بلوخ للشبكة البلّورية. ماذا تستنتج؟

السؤال الثاني: (17 درجة)

يُساهم في الطواعيّة البارامغناطيسية كلاً من بارامغنطيسية كيوري وبارامغنطيسية باولي والمطلوب شرح بارامغنطيسية باولي بالتفصيل موضّحاً إجابتك بالرسم وإثبات صحة العلاقة $\chi_m = \frac{1}{V}\mu_0\,\mu_B^2\,g(E_F)$.

السؤال الثالث: (17 درجة)

اشرح كيفية حدوث الانتقالات الإلكترونية– الضوئية في البلّورات العازلة والنصف ناقلة مبيناً كيف تؤثر بنية عصابات الطاقة لمادةٍ على امتصاص الضوء من خلال دراسة تابع العازلية $\varepsilon(\omega)$ في منطقة الضوء المرئي والأشعة فوق البنفسجية، وموضحاً إجابتك بالرسم.

السؤال الرابع: (14 درجة)

أولاً– ادرس تماسك حالة الناقلية الفائقة وعلاقتها بتكميّة التدفق المغناطيسي من خلال حلقة فائقة الناقلية ثمّ أثبت أنّ هذا التدفق مكمّى؛ ناقش العلاقة التي تحصل عليها بنتيجة هذه الدراسة بالتفصيل.

ثانياً– اشرح الفكرة الرئيسة لمبدأ عمل أجهزة التداخل الكوانتي فائقة الناقلية SQUIDs موضّحاً كيفية استثمار تماسك حالة الناقلية الفائقة فيها.

بالتوفيق والنجاح للجميع

طرطوس في 2024/01/23

أ. د. حسن عبد الكريم سليمان

مكتبة A to Z

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 22 درجة

إنَّ تابع بلوخ تابع موجي عام يأخذ الشكل البسيط الآتي ويُعدُّ حلاً لمعادلة شرودنغر:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}),$$

حيث $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ تابع دوري بدورية شبكة برافيه البلّورية:

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R}).$$

ويُعزى وجود الدليل $\vec{k}$ إلى حقيقة أن التابع $u_{\vec{k}}(\vec{r})$، يمكن أن يتغيّر تبعاً للمتجه الموجي، $\vec{k}$.

يشبه الحل المذكور أعلاه (تابع بلوخ) حل الإلكترون الحر إلى حدٍ كبيرٍ؛

فهو موجة مستوية معدَّلة بتابع دوريّ بدوريّة الشبكة البلّورية وهذه الموجة بحد ذاتها هي حقيقة مميزة، لأنها تعني أن الحالات الإلكترونية تتوزّع في كامل البلّورة، حتى وإن أدخلنا الكمون الدوريّ بدوريّة الشبكة البلّورية.

إذا طبّقنا مؤثر الاندفاع، $-i\hbar\vec{\nabla}$، على تابع بلوخ، نحصل على المساواة الآتية:

$$\begin{aligned} -i\hbar\vec{\nabla}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) &= -i\hbar\vec{\nabla}\left[u_{\vec{k}}(\vec{r})\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})\right] \\ &= -i\hbar\left\{(u_{\vec{k}}(\vec{r}))\vec{\nabla}\left(\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})\right)+\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{\nabla}\left(u_{\vec{k}}(\vec{r})\right)\right\} \\ &= \hbar\vec{k}\,\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) - \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})\,i\hbar\vec{\nabla}u_{\vec{k}}(\vec{r}). \end{aligned}$$

ومن ثمَّ المقدار $\hbar\vec{k}$ مجرد قيمة ذاتية للاندفاع عندما $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ ثابت (الحد الثاني في العلاقة الأخيرة يساوي الصفر)، أي عندما يُمثِّل تابع بلوخ موجة إلكترونية حرة. إذن، المقدار $\hbar\vec{k}$ لا يمكن أن يكون اندفاعاً لموجة بلوخ لعدم تغير الحالات سواء عند إضافة متجه شبكة مقلوبة أو عند طرحه. وبدلاً من "الاندفاع" البسيط، تسمى الكمية $\hbar\vec{k}$، الاندفاع البلّوري. خلافاً للاندفاع العادي الذي يكون مُصاناً تماماً، يمكن للاندفاع البلّوري أن يُصان فقط في إطار متجه الشبكة المقلوبة.

لإثبات أنَّ ظهور فجوات الطاقة عند حدّ منطقة بريلوان أمر واقع ندرس ارتحال إلكترونٍ حرٍ بشكلٍ عمودي على مجموعة مستويات بلورية، التباعد فيما بينها يساوي a:

فإذا كان x الاتجاه العمودي على هذه المستويات البلّورية، فإن الإلكترون يمتلك **التابع الموجي** $\psi(x) \propto e^{ikx}$ في ذاك الاتجاه، أي يسلك سلوكاً مشابهاً لسلوك موجة مستوية بطول موجة، يساوي $\lambda = 2\pi/k$؛

ومثل هذا التابع يُحقق شرط براغ، $2a\sin\theta = n\lambda = n\dfrac{2\pi}{k}$، من أجل قيمة لـ k؛ $k = n\pi/a$. وهذا يعني أن الشبكة البلّورية تعكس الموجة بزاوية ما.

بما أن الجسم الصلب كبير جداً، فإن مطال الموجة المنعكسة– العائدة سيكون في نهاية المطاف كمطال الموجة الواردة– القادمة، بحيث يكون **للتابع الموجي الكلّي** الشكل $\psi(x) \propto e^{ikx} + A\,e^{-ikx}$ بطويلة مطال تساوي الواحد، $|A| = 1$. إن التناظر اليساري/اليميني للبلّورة المُفترض توافره هنا، يستوجب أن يكون المطال، A، **حقيقياً** ولذلك ثمة **نتيجتان محتملتان** مُمثلتان بالتابعين الموجيين:

$$\psi(+) \propto e^{i(\pi/a)x} + e^{-i(\pi/a)x} = 2\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right), \qquad (45\text{-}6)$$

$$\psi(-) \propto e^{i(\pi/a)x} - e^{-i(\pi/a)x} = 2i\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right). \qquad (46\text{-}6)$$

وكلتاهما تُمثِّلان موجات إلكترونية مستقرة.

A to Z مكتبة

تتزاح كثافتهما الاحتمالية $|\psi(+)|^2$ و $|\psi(-)|^2$ بالنسبة للكمون الأيوني الموجب، كما في الشكل المبيّن أدناه:

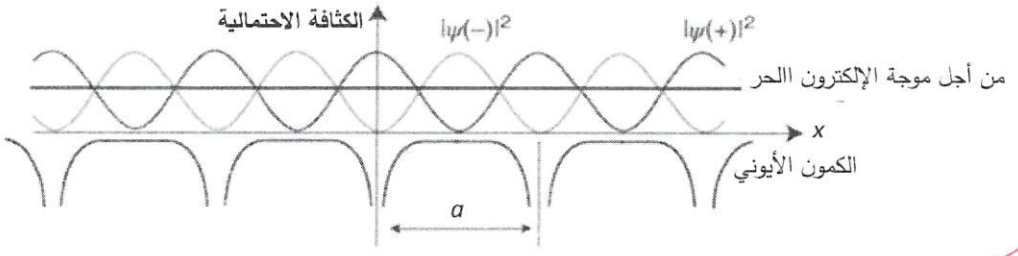
- يُظهر التابع الموجي $\psi(+)$ تراكماً للكثافة الاحتمالية بجوار القلوب الأيونية، في حين يُظهر التابع الموجي $\psi(-)$ استنفاداً لها بذلك الجوار.
- ولذلك، يمتلك التابع $\psi(+)$ طاقة أدنى من تلك التي يمتلكها التابع $\psi(-)$ على الرغم من أن لكليهما المتجه الموجي ذاته، $k = n\pi / a$.
- ومن ثمَّ، يوافق التابعان الموجيان $\psi(+)$ و $\psi(-)$ الحلّ تحت فجوة الطاقة وفوقها تماماً عند حدّ منطقة بريلوان، على الترتيب.
- نلاحظ أن هاتين الكثافتين الاحتماليتين مختلفتان تماماً عن حالة موجة إلكترون حر، حيث كانت الكثافة الاحتمالية، $|\psi|^2$، ثابتة.

توصلنا عند دراسة اهتزازات الشبكة البلّورية إلى أن سرعة المجموعة لأمواج الشبكة البلّورية تُعطى بالتغيّر $d\omega / dk$ حيث ω تواتر الموجة و k المتجه الموجي. ولهذه العلاقة سلوك عام في نظرية الأمواج، ويمكن تبيان صلاحيتها من أجل موجات بلوخ أيضاً. ومن المناسب هنا كتابتها بالشكل الآتي:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{1}{\hbar}\frac{dE(k)}{dk}. \qquad (47\text{-}6)$$

وبتعبير آخر، **تُعطى سرعة المجموعة** بميل *Slope* العصابات الطاقية.

ومن ثمَّ **تساوي سرعة المجموعة** في نموذج الإلكترون الحر للعصابات الطاقية بكمون دوريّ محدود **الصفر عند حدود منطقة بريلوان**. وهذا يعني أنه لدينا في الحالة الراهنة، موجات مستقرة، وهذا ما يتفق تماماً مع قمنا بإثباته. لا بد من ملاحظة أن سرعة المجموعة المساوية للصفر يجب أن تكون كذلك في الميكانيك الكمومي. فإذا استطعنا قياس السرعة υ_g من أجل رزمة موجية إلكترونية عند حدّ منطقة بريلوان، فإن القيمة المتوقعة يجب تكون صفراً؛ ولذلك لا نستطيع القول إنَّ الرزمة انتقلت نحو الطرف الأيمن أو إنَّها انتقلت نحو الطرف الأيسر، ولكن هذا لا يعني أن الإلكترون لا يتحرك، لأن القيمة المتوقعة من أجل الطاقة الحركية ليست صفراً.



مكتبة A to Z

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 17 درجة

- تُبدي الإلكترونات الحرة سلوكاً بارامغناطيسياً: فإذا امتلك كلّ إلكترونٍ حرٍ سبيناً قيمته $\frac{1}{2}$ وعزماً مغناطيسياً μ_B، فمن المرجّح أن تشارك الإلكترونات الحرة في تمغنط الإشباع للجسم الصلب بقيمة تساوي حاصل ضرب μ_B في كثافة الإلكترونات.
- يتم بلوغ هذا الإشباع عند اصطفاف كل العزوم المغناطيسية بشكلٍ موازٍ للحقل الخارجي (أو اصطفاف السبينات بشكلٍ مسايرٍ للحقل). غير أن حقيقة الأمر ليست كذلك على الإطلاق والطواعيّة البارامغناطيسية للإلكترونات الحرة صغيرة جداً فعلياً.
- يمكن فهم الطواعيّة البارامغناطيسية لإلكترونات حرة وحسابها باستخدام الشكل المجاور:

جرى تصنيف الحالات المشغولة بإلكترونات حرة في الشكل (a) إلى فئتين: واحدة بعزومٍ مغناطيسيةٍ مسايرةٍ لحقل خارجي، B_0، وأخرى بعزومٍ مغناطيسيةٍ موازيةٍ له؛ افترض هنا أن يكون هذا الحقل الخارجي صفراً تقريباً.

- يُظهر الشكل (b) ماذا يحدث عند ازدياد B_0 حتى قيمة محدودة. ترفع الإلكترونات طاقتها أو تُخفِّضها بمقدار $\mu_B B_0$ تبعاً لاتجاه عزومها المغناطيسية بالنسبة لاتجاه الحقل الخارجي.
- بما أن μ_B صغير جداً، فإن هذا التغيّر الطاقي يكون صغيراً جداً، أياً يكن الحقل الخارجي الذي يمكن بلوغه، إذْ يبلغ هذا التغيّر نحو 10^{-5} eV، وهو أقل بكثير من الفاصل الطاقي بين قاع العصابة الطاقية وطاقة فيرمي.
- وبما أن هذا الانزياح حدث، فإن الإلكترونات التي انتقلت إلى ما فوق طاقة فيرمي تستطيع تخفيض طاقاتها بقلب سبيناتها حيث تُصبح الإلكترونات بعزمٍ مغناطيسيٍ موازٍ للحقل الخارجي، كما يوضح الشكل (c).
- وهذا يؤدي إلى توافر إلكترونات بعزمٍ مغناطيسيٍ موازٍ للحقل بعدد أكبر من عدد الإلكترونات المتوافرة بعزمٍ مغناطيسيٍ مسايرٍ له، أي أن هذا الانزياح يؤدي إلى استجابة بارامغناطيسية.

لإيجاد χ_m، يجب أن نحدد كمية الإلكترونات التي تقلب سبيناتها لكي تمتلك عزماً مغناطيسياً موازياً للحقل الخارجي؛ تُمثَّل هذه الإلكترونات في الشكل (c) بالقطعة الرمادية الفاتحة حيث تبلغ مساحة كل قطعة $\frac{1}{2}g(E_F)\mu_B B_0$.

ولهذا السبب، يكون الفارق بين الإلكترونات التي عزومها المغناطيسية موازية للحقل وتلك التي عزومها مسايرة له مساوياً

$$N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0} = g(E_F)\mu_B B_0 ,$$

حيث تُشير الأسهم إمَّا إلى أن العزوم والحقل متوازية وإمَّا أنها متسايرة.

ومن ثمَّ يبلغ التمغنط المحصّل: $$M = \frac{1}{V}\left(N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0}\right)\mu_B = \frac{1}{V}g(E_F)\mu_B^2 B_0 ,$$

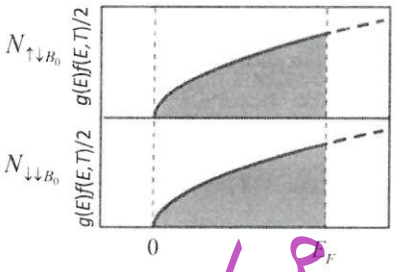
ومن ثمَّ تُصبح علاقة الطواعيّة المغناطيسية، χ_m، من الشكل: $$\chi_m = \frac{1}{V}\mu_0\,\mu_B^2\,g(E_F),$$

والتي قيمتها صغيرة، ومن نفس رتبة الطواعيّات الدايامغناطيسية.

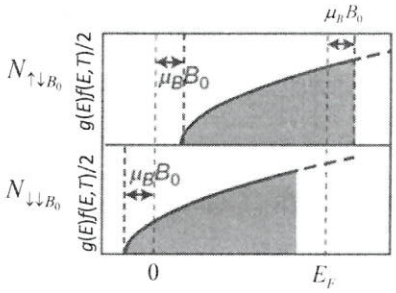
فالحقل اللازم لصفّ كل السبينات لا يكفي أن يتحقق الشرط $\mu_B B_0 >> k_B T$ فقط، وإنما يجب أن تتحقق المتراجحة $\mu_B B_0 > E_F$، أي يجب أن يكون مقدار التغيّر الطاقي الذي تتعرض له الإلكترونات نتيجة تطبيق حقل خارجي أكبر من طاقة فيرمي أيضاً، وهو مقدار كبير جداً هنا. في حقيقة الأمر، تختلف بارامغناطيسية باولي عن بارامغناطيسية كيوري تماماً: ففي بارامغناطيسية كيوري، فعلياً يمكن بلوغ التمغنط القوي، لأن ما تحتاجه الطاقة

A to Z مكتبة

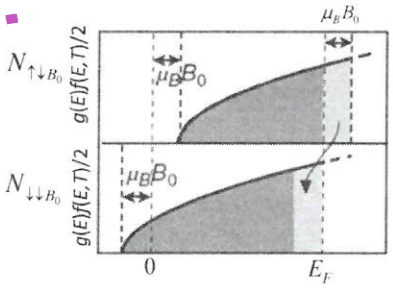
المغناطيسية، فقط أن تكون أعلى بكثير من الطاقة الحرارية. أمّا من أجل بارامغناطيسية باولي، فإنها بحاجة لأن تتجاوز طاقة فيرمي، وهذا أمر غير ممكن.



(a) لا يوجد حقل تقريباً



(b) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة



(c) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة

مكتبة A to Z

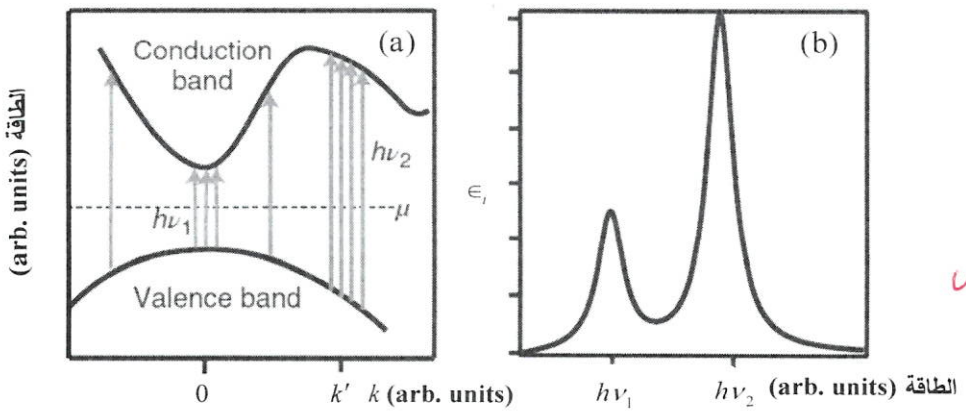
توزيع الدرجات على جواب السؤال الثالث: 17 درجة

- يستطيع الضوء تهييج فونونات بصرية من أجل ضوءٍ تحت أحمر بطاقة فوتونية أقل بكثير من عرض الفجوة الطاقية، E_g ، $(h\nu << E_g)$.
- أمّا من أجل فوتونات تحقق المتراجحة $h\nu > E_g$ تُصبح التهيّجات الإلكترونية عبر الفجوة الطاقية للبلّورات العازلة وأنصاف النواقل ممكنةً.
- لقد فرضنا أنه من أجل ترددات أعلى من تردد الفونون البصري يوجد استقطاب إلكتروني فقط، وهو المفعول الذّريّ الذي يؤدي إلى حدٍ بصري ϵ_{opt} في تابع العازلية عالي التواتر. ومن ثمَّ يكون تابع العازلية عالي التواتر الناتج من الشكل $\epsilon(\omega)=\epsilon_{opt}+i\,0$ حيث $\epsilon_{opt}=\frac{N\alpha}{V\,\epsilon_0}+1$؛ **إنَّ غياب القسم التخيلي يفترض عدم إمكانية امتصاص أي طاقة**؛ ومن أجل $h\nu > E_g$، يحتاج هذا المفهوم لإعادة نظر.
- يبدو أن $\epsilon(\omega)$ ليس ثابتاً، بل يمتلك بعض المعالم الواضحة؛ كالقمم، من أجل معظم المواد. وهذا واضح من المواد المختلفة الألوان، بما فيها الفلزات.
- إن هذه التابعية الترددية لـ $\epsilon(\omega)$ في منطقة الضوء المرئي والأشعة فوق البنفسجية ناتجة من تهيّج الإلكترونات من الحالات المشغولة إلى الحالات الشاغرة ولذلك نحن بحاجة لدراسة بنية عصابات الطاقة للمادة لكي نرى أي التهيّجات ممكنة فعلياً؛ ولكن الفكرة الرئيسة مفهومة من الفيزياء الذّريّة.

→ فالذرات تمتلك سويات طاقة منفصلة وعندما يُسمح لانتقالٍ ما بالحدوث بين سوية مشغولة وأخرى شاغرة وفق قواعد الاصطفاء البصرية، سيؤدي ذلك إلى امتصاص شديد للضوء عندما تساوي طاقة الفوتون الفارق الطاقي بين هاتين السويتين.

→ ومن أجل الأجسام الصلبة، **تتعرَّض سويات الطاقة** الذّريّة لتشكّل عصابات طاقية، ولكن الامتصاص الشديد يحدث أيضاً من أجل طاقات فوتونية **تسمح بانتقالات متعددة** من حالات مشغولة إلى حالات شاغرة.

لندرس بنية عصابة طاقة مبسطة لعازلٍ أو نصف ناقلٍ، يوضحها الشكل (a):



→ نفرض أن الكمون الكيميائي يقع في مكان ما بين عصابة التكافؤ (VB) وعصابة الناقلية (CB). يمكن أن يحدث امتصاص الفوتونات عندما $h\nu > E_g$، فيؤدي إلى تهيُّج إلكترونات من VB إلى CB.

مكتبة A to Z

← والمتجه الموجي من أجل الفوتونات التي طاقاتها تقع في المجال المرئي أو فوق البنفسجي يكون قصيراً جداً ولذلك يستوجب انحفاظ الاندفاع البلّوري أن يبقى المتجه الموجي للإلكترون، $\vec{k}$، ثابتاً في ذلك الانتقال (زائد متجه الشبكة المقلوبة). يُشار للانتقالات الممكنة، المتحرضة– فوتونياً، في الشكل (a) بأسهم فاتحة اللون.

توافق هذه الانتقالات امتصاص الطاقة من قبل الجسم الصلب، ومثل هذا الامتصاص يمكن أن يوصف بالقسم التخيلي لتابع العازلية، $\in_i$. ويمكننا أن نكتب من وحي النموذج البسيط العلاقة الآتية لتابع العازلية:

$$\in_i(\omega) \propto \sum_{\vec{k}} M^2 \delta\left(\underbrace{E_C(\vec{k}) - E_V(\vec{k})}_{\Delta E} - h\nu\right),$$

حيث يشمل المجموع كل قيم $\vec{k}$ المسموحة في منطقة بريلوان الأولى، و M عنصر مصفوفة يُحدد احتمال الانتقال، ويرمز δ لتابع دلتا– ديراك، و $E_C(\vec{k})$ و $E_V(\vec{k})$ طاقتا تبدد عصابتي الناقلية والتكافؤ على الترتيب.

- إذا صرفنا النظر عن عنصر المصفوفة، فإن العلاقة الأخيرة تحدد **عدد الانتقالات** الممكنة من أجل طاقة $h\nu$ محددة،
- التابع δ يساوي الواحد فقط إذا كان الفارق الطاقي $E_C(\vec{k}) - E_V(\vec{k})$ مساوٍ تماماً لـ $h\nu$،
- ولذلك، يمتلك تابع العازلية، $\in_i(h\nu)$، قيمة قصوى عند قيم $h\nu$ التي من أجلها تكون الانتقالات المتعددة المختلفة بين VB و CB ممكنة.
- والحالة في الشكل (a) هي من أجل **بداية الامتصاص** عند الطاقة $h\nu_1 = E_g(\vec{k}=0)$ وحول $\vec{k}=\vec{k}'$، أي في منطقة بريلوان حيث يكون VB و CB موازيان لبعضهما البعض.
- بهذا الشكل، يمكن توقع القمم (القيم القصوى) في $\in_i$ عند الطاقتين $h\nu_1$ و $h\nu_2$، كما يوضح الشكل (b)؛ وطالما أن هذه القمم توافق امتصاصاً شديداً، فإنها تُحدد لون الجسم الصلب.

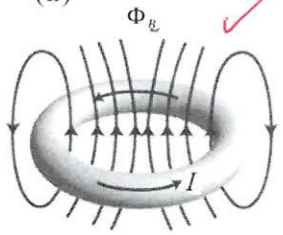
بهذا الشكل، يكمن مفتاح الامتصاص الشديد في أن **حالات** VB و CB **تتبدد** بشكلٍ متوازٍ في أجزاءٍ كبيرةٍ من منطقة بريلوان. من الواضح أن هذا الشرط محقق من أجل عصابات مستوية جداً، تنبثق من حالات شديدة التوضع. ومن ثمَّ، تُذكِّرنا هذه الحالة بامتصاص الضوء بالانتقالات بين السويات الذريّة.

مكتبة A to Z

توزيع الدرجات على جواب السؤال الرابع: 14 درجة

أولاً- إنَّ حالة الناقلية الفائقة مرتبطة بتابعٍ موجيٍ متماسكٍ ماكروسكوبياً، يُبنى من أزواج كوبر في حالتها الأرضية. والنتيجة المباشرة للتابع الموجي المتماسك ماكروسكوبياً تكمن في تكميّة التدفق المغناطيسي من خلال حلقة فائقة الناقلية، كما يوضح الشكل (a).

(a)



إذا فرضنا أن التابع الموجي للناقل الفائق متماسكٌ في كامل الحلقة، أمكننا تطبيق شرط التكميّة لبور، بشكلٍ مشابهٍ لتطبيقه من أجل ذرة الهيدروجين ولكن على مقياس التدريج الماكروسكوبي.

ينص شرط بور على أن عدداً صحيحاً من أطوال موجة دوبروي، $\lambda = h/p$، يجب موائمته على محيط الحلقة؛ $\oint d\vec{r} = \lambda n = hn/\vec{p}$ التي يوضحها الشكل (a)، أو أن

$$\oint \vec{p}\cdot d\vec{r} = hn\,, \qquad (1)$$

حيث يجري التكامل على المحيط الداخلي للحلقة، و n عدد صحيح.

ولرؤية ماذا يحدث بوجود حقل مغناطيسي، يمكننا أن **نضمّن** هذا الحقل في المعادلة (1) **باستخدام** الكمون المتجه والقواعد ذاتها التي وضعت من أجل حالة الميكانيك الكوانتي؛ إذْ يمكننا أن نكتب العلاقة الآتية:

$$\oint \left(\vec{p} - q\vec{A}\right)\cdot d\vec{r} = hn\,. \qquad (2)$$

وذلك من أجل جسيمات كتلتها m_s، وكثافتها n_s، وشحنتها q. ولدينا $\vec{p} = m_s\vec{\upsilon}$؛ وكثافة التيار المرتبط بهذه الجسيمات يساوي $\vec{j} = n_s q\vec{\upsilon}$، بحيث يمكننا كتابة العلاقة الآتية:

$$\frac{m_s}{n_s q}\oint \vec{j}\cdot d\vec{r} - q\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = hn\,. \qquad (3)$$

يمكن إعادة كتابة **التكامل الثاني** في المعادلة (3) باستعمال مبرهنة ستوكس التكاملية للانتقال من التكامل الخطي إلى التكامل السطحي على مساحة الوسط (التجويف) **المحدود بالحلقة**:

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot d\vec{a} = \int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \Phi_B\,, \qquad (4)$$

حيث Φ_B التدفق المغناطيسي **من خلال التجويف** في الحلقة.

بهذا الشكل، تُصبح المعادلة (3) من الشكل الآتي:

$$\frac{m_s}{n_s q^2}\oint \vec{j}\cdot d\vec{r} - \Phi_B = n\frac{h}{q}\,. \qquad (5)$$

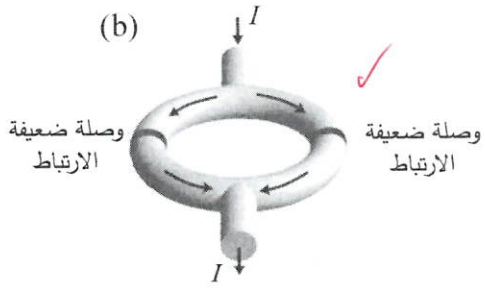
تفترض المعادلة الأخيرة أن التدفق المغناطيسي من خلال الحلقة يمكن أن يتغيّر بوحدات من h/q فقط إذا كانت كثافة التيار في التكامل الأول في المعادلة (5) ثابتة.

يمكننا أن نجري خطوة أخرى بعد، ونضع مسار التكامل الأول في المعادلة (5) **في عمق الحلقة قليلاً، خلف تيارات الحجب تماماً**، التي تتغلغل لتصل إلى عمق تغلغل لندن، λ_L. **عندها**، وفي كثير من الحالات **تكون كثافة** التيار **صغيرة للغاية** لدرجة الإهمال، ومن ثمَّ نحصل على المساواة $\Phi_B = n(h/q)$،

وهذا يعني أن التدفق المغناطيسي من خلال حلقة فائقة الناقلية مُكمّى بوحدات الـ h/q.

مكتبة A to Z

ثانياً– يمكن استثمار تماسك حالة الناقلية الفائقة في ما يسمى أجهزة التداخل الكوانتي فائقة الناقلية **SQUIDs** التي يوضحها الشكل (b).



الفكرة الرئيسة لمبدأ عملها:

- تتألف النبيطة من "شوكتين" فائقتي الناقلية وطبقات أكسيد رقيقة أو تماسات نقطية تقع بينهما (أي ما يسمى وصلات ضعيفة الارتباط):
- تستطيع أزواج كوبر العبور بطريقة النفق عبر تلك الوصلات من ناقلٍ فائقٍ لآخر وتوجد علاقة محددة بين طور حالة الناقلية الفائقة في إحدى الشوكتين وطور حالة الناقلية الفائقة في الشوكة الأخرى.
- إنَّ الحقل المغنطيسي الذي يدخل منتصف تجويف الحلقة عمودياً يؤدي إلى **ظهور تيارٍ فائقٍ** إضافي، يُبقي التدفق من خلال الحلقة **من مضاعفات صحيحة لكوانتم التدفق.**
- **وهذا بدوره يُسببُ فرق طورٍ** بين التيار الذي يعبر إحدى الوصلتين الضعيفتين والتيار الآخر الذي يعبر الوصلة الضعيفة الأخرى.
- **ثمَّ إنَّ** التيار الأعظمي المتدفق من كامل النبيطة يُحدد بمقدار التداخل بين التيار "الأيسر" والتيار "الأيمن" ويُرصد فيه تذبذبات تابعة للحقل المغناطيسي المطبق.
- وهذا يوافق **كمّات تدفقٍ فرديةٍ** تدخل الحلقة.
- بهذه الطريقة **يمكن قياس** أي تغيرٍ يطرأ على الحقل المغناطيسي مهما كان صغيراً.
- إذن، نبائط التداخل الكوانتي فائقة الناقلية SQUIDs حساسة جداً للحقول المغناطيسية البالغة الصغر، ولذلك، يمكن استخدامها لقياس هذه الحقول الضعيفة جداً.

A to Z مكتبة

جامعة طرطوس
كليّة العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2**
لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء
للعام الدراسي 2022-2023/الدورة الفصلية **الثانية**

الاسم:
المدة: **ساعتان**
الدرجة القصوى: **70**

السؤال الأول: (30 درجة)

i. اشرح ما المقصود بنموذج الإلكترون الحر الكوانتي ووضّح كيفية معالجة الإلكترونات الحرة وفق هذا النموذج.

ii. وضّح الفارق ما بين نموذج الإلكترون الحر ونموذج الرابطة الشديدة.

iii. نفرض عند دراسة الحالات الذاتية الكوانتية في نموذج الإلكترون الحر أنه لدينا بلّورة معدنية على هيئة صندوق مكعب الشكل، طول ضلعه جهري، L، **والمطلوب:**

أولاً- كتابة علاقات كلٍ من الشروط الحديّة الدوريّة وحلول معادلة شرودنغر وسويات الطاقة بدلالة المتجه الموجي في الفراغ وذكر ماذا تُمثّل.

ثانياً- رسم السويات الطاقية من أجل $n_y = n_z = 0$ بشكلٍ واضحٍ وكتابة التدريجات المناسبة على المحاور الإحداثية وشرح الرسم بالتفصيل.

ثالثاً- شرح طريقة إسكان الحالات الطاقية واستنتاج العلاقة التي تُحدّد طاقة أعلى سوية مشغولة.

رابعاً- إيجاد علاقة كثافة الحالات من أجل نموذج الإلكترونات الحرة تُعطى بالعلاقة. ماذا تستنتج؟.

السؤال الثاني: (25 درجة)

أولاً- اشرح فكرة عصابات الطاقة الإلكترونية من أجل بلّورتي الصوديوم والسيلكون، موضّحاً الفارق بين سلوكهما بالتفصيل ومستعيناً بالرسم.

ثانياً- عرّف الغرافين ثمَّ اشرح بنية عصابة الطاقة له موضّحاً طبيعة الروابط التي يتألف منها واشرح لماذا يُعدُّ الغرافين نصف فلزٍ؟.

السؤال الثالث: (15 درجة)

لقد استغرقت نظرية BCS المجهرية للناقلية الفائقة وقتاً طويلاً حتى اكتملت، وأحد أسباب ذلك يكمن في أنَّ فرضيتين من أكثر الفرضيات أهميةً التي وضعت لمعالجة الأجسام الصلبة، غير صالحتين في حالة الناقلية الفائقة.

أولاً- اذكر هاتين الفرضيتين.

ثانياً- اشرح هذه النظرية موضحاً المنشأ الفيزيائي لتشكّل أزواج كوبر.

بالتوفيق والنجاح للجميع

طرطوس في 2023/08/06

أ. د. **حسن عبد الكريم سليمان**

A to Z

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 30 درجة

i. نموذج الإلكترون الحر هو قرين كمومي لنموذج درودي التقليدي؛ والغرض منه، الحصول على توصيف بسيط للمعادن، على فرض أن الإلكترونات حرة، بمعنى أنها لا تتأثر مع الأيونات أو مع بعضها بعضاً، ولهذا السبب يسمى هذا النموذج، نموذج **غاز الإلكترون الحر** أيضاً. معالجة الإلكترونات الحرة في نموذج كمومي، تقودنا إلى دراسة مسألة نموذجية- مسألة جسيمة حرة في حفرة كمون؛ وتكمن المسألة عندها، في حل معادلة شرودنغر، عندما تكون الطاقة الكامنة للإلكترون مهملة $U(\vec{r})=0$، وبفرض شروط حديّة محددة. ولكن ما هي هذه الشروط الحديّة التي سنختارها؟. إن الحالة هنا، مشابهة لحالة سلسلة محدودة من الذرات. وأبسط الشروط الحديّة تكمن في جعل التابع الموجي **يتلاشى** عند الحدود، وهذا يوافق تثبيت الذرات عند نهاية السلسلة الذريّة المحدودة. وفي كلتا الحالتين، يؤدي ذلك إلى **أمواج واقفة**.

ii. يُعدُّ تقريب الإلكترون شبه- الحر أكثر من نقطة انطلاق طبيعية **لوصف المعادن**، في حين يُعدُّ تقريب الرابطة الشديدة نقطة الانطلاق الأساسية من أجل البلّورات **المترابطة تساهمياً** أو من أجل الإلكترونات الأكثر **تموضعاً** في المعادن، **كالإلكترونات** d في المعادن الانتقالية. وفي نهاية المطاف، كلا التقريبين جيدان وصقلهما يؤدي إلى نتائج مُرضية بعض الشيء. إلاَّ أن دراسة تقريب الرابطة الشديدة هنا تسمح لنا بالحصول على نظرة أكثر عمقاً لمعنى بنية العصابات الطاقية للأجسام الصلبة.

iii. أولاً- يُعبَّر عن الشروط الحديّة الدوريّة بالمساواة الآتية:

$$\psi(\vec{r})=\psi(x,y,z)=\psi(x+L,y,z)=\psi(x,y+L,z)=\psi(x,y,z+L).$$

حلول معادلة شرودنغر المستقرة هي **موجات مستوية** مستنظمة $\psi(\vec{r})=\left(\sqrt{V}\right)^{-1}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ بحيث تساوي الاحتمالية التكاملية لإيجاد إلكترون في صندوق للواحد.

وهذا التابع الموجي يشابه تماماً التابع الموجي للإلكترونات الحرة الحقيقية، إلاَّ أن قيوداً تُفرض هنا على القيم المسموحة للمتجه الموجي، $\vec{k}$، تفرضها الشروط الحدّيّة الدوريّة:

$$E(\vec{k})=\frac{\hbar^2k^2}{2m_e}=\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right).$$

من حيث الشكل تُمثِّل هذه القيم سويات طاقة متقطعة لأن ثمة قيود على القيم المسموحة للمتجه الموجي، $\vec{k}$، تفرضها الشروط الحدّيّة الدوريّة وهي نفسها المفروضة على الاهتزازات البلورية: $\vec{k}=(k_x,k_y,k_z)=(n_x2\pi/L,n_y2\pi/L,n_z2\pi/L)$ حيث $n_{x,y,z}$ أعداد صحيحة.

ثانياً- إن التباعد بين السويات الطاقية في الشكل يبدو متزايداً من أجل قيم كبيرة لـ n_x، إلاَّ أن حقيقة الأمر ليست كذلك، فهذا التباعد صوريّ، ناتجٌ من فرض الثابتين n_y و n_z مساويان للصفر. في الواقع، التباعد بين السويات الطاقية من رتبة المقدار $\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ (من أجل كل الطاقات) يُعدُّ **صغيراً جداً**، بسبب جهرية المسافة L. ولذلك، يؤدي هذا النموذج إلى سويات طاقية شبه- مستمرة. (يكافئ الرسم)

ثالثاً- نفترض أنه لدينا N إلكتروناً في الحجم المغلق المعطى، بحيث تساوي كثافة إلكترونات الناقلية $n=N/V=N/L^3$. يمكن لهذه الإلكترونات أن تتوزّع في $\frac{1}{2}N$ حالة بأخفض طاقة، طالما أنه يمكن أن يكون

A to Z

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 25 درجة

لشرح فكرة عصابات الطاقة الإلكترونية من أجل بلّورتي الصوديوم Na والسيلكون Si، وتوضيح الفارق بين سلوكهما بالتفصيل والرسم نبدأ بدراسة ذرتي صوديوم، حيث تكون الحالة مشابهة لحالة جزيء هيدروجين، كما في الشكل (a):

- حالما تقترب الذرتان من بعضهما البعض، تتشكل المدارات الجزيئية الرابطة وغير الرابطة.
- فكل ذرة صوديوم تمتلك إلكتروناً واحداً 3s−وبتكيف الإلكترونان في المدار الرابط؛ فهما يمتلكان سبينين **متعاكسين**، لكي يُحققان متطلبات مبدأ باولي، الشكل (a)؛
- يوضح الشكل (b) موضع السويات الطاقية؛ كتابع للمسافة بين الذريّة، حيث تمّ وضع تدريج الطاقة عند الصفر من أجل المسافة البعيدة جداً بين الذرات.

فمن أجل المسافة a تصل السوية الرابطة إلى أخفض قيمة طاقية، وطالما أن السوية الرابطة فقط، تُشغل بإلكترونين، **فلا** يكون لطاقة الحالة غير الرابطة معنى وتزداد الطاقة المكتسبة من أجل المسافة a.

- لنأخذ الآن حالة أكثر من ذرتين:

في هذه الحالة، يؤدي تأثر الحالتين الذريتين إلى تشكّل سويتي طاقة تمتدان على كامل الجزيء.

والحالة هنا، تشابه الحالة الموافقة لوجود N ذرة؛

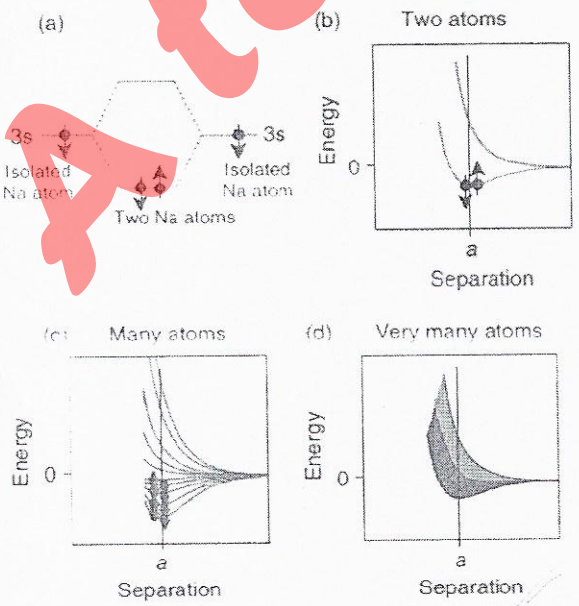
إذْ تنشطر السويات الطاقية الذرية-N إلى N سوية جزيئية غير متحللة.

وعندها يُسكن نصف هذا العدد، $\frac{1}{2}N$؛ كل منها بإلكترونين، كما يظهر في الشكل (c)، حيث تُطبّق المبادئ ذاتها من أجل عدد كبير جداً من السويات (N).

ويوجد هنا شبه– استمرارية للحالات الطاقية؛ بين أخفض سوية وأعلى سوية، حيث يكون نصفها ممتلئ، كما يظهر في الشكل (d).

تسمى شبه– الاستمرارية هذه **عصابة طاقة**.

يمكننا الآن، أن نرى وصفياً، لماذا يُبدي الصوديوم Na سلوكاً فلزياً؛



فنصف العصابة الطاقية لإلكترونات التكافؤ ممتلئ تماماً.

وعند تطبيق حقل كهربائي على عيّنة من Na، تتعرّض الإلكترونات لقوة معاكسة بالاتجاه لاتجاه الحقل، ولكي تتحرك في ذاك الاتجاه، يجب أن تزيد طاقتها الحركية قليلاً، أي يجب أن تذهب إلى حالة طاقية أعلى من حالتها التي كانت فيها قبل تطبيق الحقل الكهربائي بقليل.

وهذا ممكن بسهولة من أجل الإلكترونات المتوافرة في هذه الحالات الطاقية الأعلى المشغولة بها، بسبب وفرة الحالات الشاغرة ذات الطاقات الأعلى من طاقات الحالات المشغولة بقليل.

ولرؤية سلوك مختلف تماماً عن السلوك السابق، ندرس تشكّل عصابات طاقة في السيلكون:

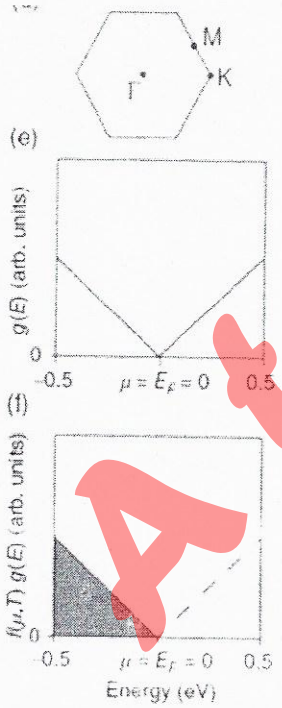
فإلكترونات التكافؤ المنخرطة في الترابط، هي إلكترونان 3s وإلكترونان 3p؛ وحالما تقترب ذرات Si بعضها من البعض، تتهجّن المدارات وتُشكّل عصابتين من الحالات الطاقية **عند مسافة التوازن**، a، تحوي كل منها أربع حالات لكل ذرة Si، أي أن المجموع، ثمان حالات لكل ذرة؛ **اثنتان** منها، أُستمدّت من الحالات الذرية s **وستة** من الحالات الذرية p، على الترتيب.

A to Z

تتألف العصابة الأخفض من المدارات sp^3 وهي مشغولة تماماً بإلكترونات الكافؤ الأربعة لكل ذرة Si، أمّا العصابة الأعلى، فهي شاغرة تماماً، وتوجد بينهما، منطقة طاقية خالية من الحالات، تسمى **فجوة عصابة الطاقة**.

وهذا ما يُفسّر السلوك العازل (من الناحية الكهربائية طبعاً) للسيلكون Si: فعند تطبيق جهد، لا تستطيع إلكترونات العصابة sp^3 الممتلئة أن تُزيد طاقتها الحركيّة بمقدارٍ صغيرٍ، لعدم وجود حالات شاغرة بطاقات أعلى منها بقليل، تستطيع الإلكترونات الانتقال إليها.

شرح البنية الترابطية والإلكترونية للغرافين:



يمتلك الكربون أربعة إلكترونات تكافؤ (اثنان 2s واثنان 2p)، ويمكن بلوغ الترابط في بنية "قرص العسل" للغرافين بصورة رئيسة بعملية تهجين sp^2 بين الحالات s و $p_{x,y}$ لتشكيل روابط σ (سيغما) قوية، والمدارات p_z المتبقية، تخرج من المستوي وتُشكّل روابط π:

- كل ذرة كربون تُسهم في الروابط σ بثلاث إلكترونات وفي الرابطة π بإلكترون واحد. يمتلك الغرافين ذرتين في كل وحدة خلية، أي يمتلك ما مجموعه ستة إلكترونات σ وإلكترونين π.
- بمقدور الإلكترونات σ الستة أن تملأ ثلاث عصابات بشكلٍ كاملٍ (إلكترونان في كل عصابة) والإلكترونان π عصابة واحدة؛ يمكن رؤية ذلك في بنية عصابات الطاقة أيضاً.
- وبالنتيجة لدينا أربع **عصابات مشغولة تماماً**، ومن ثمَّ يمكن للغرافين أن يكون عازلاً/ نصف ناقل.
- الشيء الغريب والملفت للانتباه فيما خصَّ الغرافين يكمن في **عدم امتلاكه لفجوة طاقية** بين العصابة π المشغولة والعصابة π^* الشاغرة.
- تُصادف هذه العصابات في ركن المضلّع- السداسي تماماً، منطقة بريلوان ثنائية- البعد، حيث يسمى هذا الركن النقطة K (كُبّا)، كما في الشكل المجاور.
- يوضح الشكلان (e) و (f) كثافة الحالات وكثافة الحالات المشغولة بجوار طاقة فيرمي، E_F، على الترتيب:

→ فمن أجل الطاقات القريبة كفايةً من E_F، يكون التبدد لكل من العصابات π و π^* خطّياً، وإلى جانب حقيقة أن الغرافين ثنائي- البعد، نحصل على كثافة حالات تُعدُّ خطّيّةً كتابعٍ للطاقة.

→ تؤول هنا كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، E_F، إلى الصفر تماماً، غير أنه لا توجد فجوة طاقية.

→ إذا عرَّفنا معدناً بأنه مادة يقع الكمون الكيميائي (أو طاقة فيرمي) فيها عند طاقةٍ حيث تكون كثافة الحالات محدودةً، فإن **الغرافين ليس معدناً**.

ومن جهة أخرى، لا يمتلك الغرافين فجوة طاقية (منطقة محظورة) بين الحالات الطاقية الأعلى المشغولة والحالات الطاقية الأدنى الشاغرة، وهو ما يمكن إيجاده في حالة عازلٍ/ نصف ناقلٍ.

ومن ثمَّ يسمى الغرافين عادةً إمّا **نصف فلزٍ** وإمّا نصف ناقل بفجوة طاقية صفرية، لأن كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، E_F، تساوي الصفر، ولا توجد فجوة طاقية بين الحالات الطاقية الأعلى المشغولة والحالات الطاقية الأدنى الشاغرة.

A to Z

توزيع الدرجات على جواب السؤال الثالث: 15 درجة

الفرضية الأولى هي تقريب بورن– أوبنهايمر الذي سمح لنا بدراسة الخصائص الإلكترونية والاهتزازية كلٍ على حدة؛ والفرضية الثانية هي تقريب الإلكترون المستقل الذي سمح لنا بدراسة خصائص إلكترونٍ واحدٍ واقعٍ في كمونٍ وسطي لباقي الإلكترونات الأخرى.

تُمثِّل حالة الناقلية الفائقة ظاهرة كمومية على المقياس الماكروسكوبي؛ إذْ يتحقق التابع الموجي الماكروسكوبي، كما في تجمّع بوزة– اينشتاين أو الليزر، بعددٍ كبيرٍ جداً من الجسيمات التي تشغل الحالة الكمومية نفسها.

على الرغم من أنه يجب أن نكون حذرين لدى مقارنة الجسيمات المتجمِّعة في الجسم الصلب مع البوزونات اللامتأثرة مع بعضها البعض، فمن الواضح أن تلك الجسيمات لا يمكن أن تكون الإلكترونات الحرة لكونها فرميونات ويجب أن تخضع لقانون الاستبعاد لباولي.

وكان كوبر قد أدرك أن تشكُّل أزواجٍ إلكترونيةٍ، ينجم عن تجاذبٍ صرفٍ مهما كان ضعيفاً، يحلُّ هذه المعضلة ويوفِّر إمكانيةً لحالةٍ أرضيةٍ جديدةٍ للغاز الإلكتروني بخصائص جديدة تماماً وبطاقةٍ أقل بقليل من الحالة الأرضية الأصلية.

بما أن طاقة الحالة الأرضية الجديدة أخفض، فيمكن أن نتوقع انتقالاً طوريّاً إلى هذه الحالة، على الأقل من أجل درجات الحرارة المنخفضة جداً، حيث ليس للأنتروبية أهمية.

الآلية الممكنة التي تؤمن تجاذباً ضعيفاً غير مباشرٍ بين الإلكترونات هي التأثير المتبادل بين الإلكترونات واهتزازات الشبكة البلّورية، أي ما يسمى بالتأثر الإلكتروني– الفونوني. هذا التأثر ضعيف ويُهمل عادةً عند استخدام تقريب بورن– أوبنهايمر، ولكنه حيوي من أجل الناقلية الفائقة حيث لا مكان لهذا التقريب. فعند وجود إلكترونٍ في موقعٍ ما في الشبكة الأيونية، فإنه يشوِّه الروابط المحيطة به قليلاً بفضل التأثر الكهركدي مع الأيونات الموجبة الشحنة الكهربائية. ويُمكننا تخيّل مثل هذا التشوه الموضعي للشبكة البلّورية كرزم موجية مكوَّنة من فونونات، بشكلٍ مشابهٍ جداً لإلكترونٍ متوضعٍ يمكن أن يبدو كرزمة من أمواج بلوخ.

يكمن التشوه هنا في أن أيونات الشبكة البلّورية تنجذب نحو موقع الإلكترون، مما يؤدي لاستقطابٍ موضعيٍ للشبكة البلّورية، يكون بدوره جاذباً لإلكترونات أخرى. ومن ثمَّ يمكن أن يتوافر تأثر جاذب بين إلكترونين.

لكن هذا المشهد الساكن (على اعتبار أن الإلكترون المعني بطيئٌ جداً أو ساكنٌ) فعلياً لا يعمل، لأن الإلكترون الآخر الذي ينتقل نحو الجزء المستقطب من الشبكة البلّورية "سيشعر" كما في السابق بتنافرٍ كهركدي قوي من قبل الإلكترون الأول؛ فضلاً عن أننا سنرى أن الإلكترونات المسؤولة عن الناقلية الفائقة تمتلك طاقات حركية قريبة من طاقة فيرمي، ومن ثمَّ هي ليست ساكنة.

ثمة مشهد ديناميكي أكثر قبولاً من المشهد الساكن حيث يُظهر إلكتروناً متحركاً في الشبكة البلّورية بمعدّل سرعة عالية، من رتبة $10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$، وجاذباً لأيونات الشبكة الموجبة أثناء حركته. فالشبكة البلّورية الآن مستقطبة، ولكن طالما حركة الأيونات أبطأ بكثير من حركة الإلكترونات، فإن الاستقطاب لا يحدث آنياً بل يستغرق زمناً ما. يمكن تقدير هذا الزمن اللازم لاستقطاب الشبكة البلّورية حيث يجب أن يكون من نفس رتبة زمن حركة الأيونات، $2\pi/\omega_D \approx 10^{-13}\ \mathrm{s}$. وعندها، يكون الإلكترون قد قطع لحظة بلوغ الاستقطاب الأعظمي مسافة $10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \times 10^{-13}\ \mathrm{s} = 100\ \mathrm{nm}$.

بمقدور الإلكترون الآخر الآن، أن يُخفِّض طاقته من خلال حركته خلف الإلكترون الأول؛ فالتنافر الكهركدي بين الإلكترونين سيكون ضعيفاً، لأنهما بعيدان جداً عن بعضهما البعض.

A to Z

لدينا إلكترونين في كل حالة: يجب أن نشغل كل الحالات بحيث تقع في كرة نصف قطرها $n_{\max}$، أو في كرة نصف قطرها $k_{\max}$، بحيث أن: $\frac{1}{2}N=\frac{4}{3}\pi n_{\max}^3$ ؛ نحصل من هذه المساواة على العلاقة $n_{\max}=(3N/8\pi)^{1/3}$ التي تُمكّننا من حساب طاقة أعلى سوية مشغولة بإلكترون: $E_{\max}=\frac{\hbar^2k_{\max}^2}{2m_e}=\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n_{\max}^2$

لهذه الطاقة اسم خاص بها، هو **طاقة فيرمي** ويرمز لها بالرمز E_F ؛ وهي الطاقة الحركيّة الأعلى للإلكترونات في الجسم الصلب.

رابعاً- نبدأ من العلاقة بين طاقة فيرمي، E_F، وكثافة إلكترونات الناقلية، n: $E(\vec{k})=\frac{\hbar^2}{2m_e}(3\pi^2n)^{2/3}$

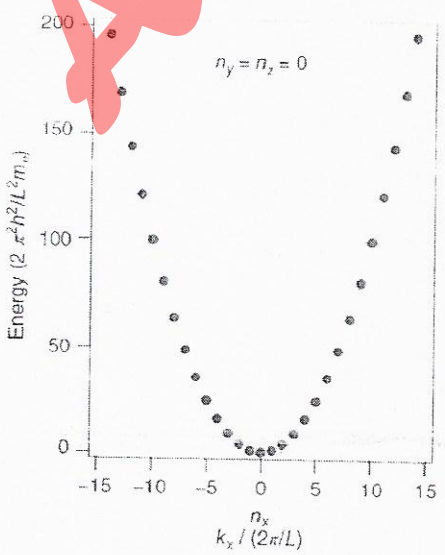
يمكننا حساب **كثافة الحالات**، $g(E)$، في نموذج الإلكترون الحر أي عدد الحالات المتاحة- المرتبط بالطاقة في مجال الطاقة، dE،: استناداً إلى العلاقة الأخيرة، يمكننا كتابة علاقة الطاقة الأعلى المشغولة من أجل N إلكتروناً بالشكل:

$$N(E)=(E(N))^{3/2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{V}{3\pi^2} \quad \text{ومنه:} \quad (E(N))^{3/2}=\left(\frac{\hbar^2}{2m_e}\right)^{3/2}\left(\frac{3\pi^2N}{V}\right)$$

ومن هذه العلاقة نحصل على علاقة العدد الكليّ للحالات، $N(E)$، من أجل الطاقة الأعلى المعطاة، E، بالشكل الآتي:

$$g(E)=\frac{dN(E)}{dE}=\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{d}{dE}\left(E^{3/2}\right)=\frac{3}{2}\frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}E^{1/2}\frac{dE}{dE}=\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}E^{1/2}.$$

نستنتج أن علاقة كثافة الحالات من أجل نموذج الإلكترونات الحرة تأخذ شكل قطعٍ مكافئٍ.



- إذا وجب على الإلكترون الآخر أن يبقى في المسار نفسه، فإن متجهه الموجي، $\vec{k}$ ، إمَّا سيكون نفس المتجه الموجي للإلكترون الأول، وإمَّا معاكساً له تماماً.
- يمكن تبيان أن الحالة الأكثر تفضيلاً من الناحية الطاقية تنشأ عندما يمتلك الإلكترونان متجهين موجيين، $\vec{k}$ ، متعاكسين تماماً وسبينين متعاكسين.
- تسمى الأزواج الإلكترونية المتشكلة من إلكترونات بـ $\vec{k}$ و $-\vec{k}$ وسبين محصّلٍ صفري بأزواج كوبر.

على الرغم من أن هذه الحقائق البسيطة تعطينا تصوراً جيداً للمنشأ الفيزيائي لتشكّل أزواج كوبر، فيجب أن نكون حذرين جداً بالذهاب بها بعيداً.

A to Z

جامعة طرطوس
كليّة العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2**
لطلاب السنة الرابعة فيزياء
للعام الدراسي 2022-2023/الدورة الفصلية الأولى

الاسم:
المدة: **ساعتان**
الدرجة القصوى: 70

السؤال الأول: (20 درجة)

تتصف بعض الفلزات بظاهرة الانعكاسية الضوئية ولتفسيرها نعتبر الضوء الوارد على بلّورةٍ فلزيةٍ موجة كهرطيسية مستوية عرضانية تنتشر في الاتجاه y ، تُعطى مركبة الحقل الكهربائي فيها بالعلاقة، $\vec{E}(y,t)=\vec{E}_0\exp(i(ky-\omega t))$ حيث $\vec{E}_0$ مطاله في **المستوي** (x,z) و $k=2\pi N/\lambda_0$ طويلة متجه الموجة (N قرينة الانكسار العقدية للوسط الفلزي)، **والمطلوب:**

أولاً- كتابة علاقة قرينة الانكسار العقدية للوسط الفلزي وذكر المعنى الفيزيائي لها بالتفصيل؛

ثانياً- كتابة علاقة تابع العازلية العقدي بدلالة قرينة الانكسار العقدية وذكر مدلول كل رمز فيها بالتفصيل؛

ثالثاً- كتابة علاقة مركبة الحقل الكهربائي المعطاة بدلالة N و $\in$. ماذا تستنتج؟؛

رابعاً- كتابة معادلة الحركة للإلكترون في الفلز وحلها، علماً بأن الحقل يقع في الاتجاه x. ماذا تستنتج؟ ثمَّ إيجاد علاقة الاستقطاب الدقيق من أجل بلّورة فلزية بكثافة إلكترونات ناقلية، n؛

خامساً- إيجاد علاقة تابع العازلية بدلالة تواتر الموجة الواردة عليها. ناقش الحالتين الحدّيتين. ماذا تستنتج؟.

السؤال الثاني: (25 درجة)

a) عرّف تقريب الربط المُحكم (الرابطة الشديدة).

b) يُعبّر عن بنية عصابة الطاقة للجسم الصلب بالمعادلة $E(\vec{k})=E_n-\beta-\sum_{\vec{R}\neq 0}\gamma(\vec{R})e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$ ، **والمطلوب: أولاً**- ماذا تصف هذه المعادلة؟ **ثانياً**- قمْ بتعيين بنية عصابة الطاقة من أجل سلسلة ذرية أحادية- البعد، بثابت شبكة a، استناداً إلى المعادلة المعطاة وعلى فرض أن عصابة الطاقة تنتج من المدارات الذّريّة-s ذات الطاقة E_s واعتماداً على بعض الفرضيات التي تُسهّل عملية الجمع فيها **(يجب ذكر هذه الفرضيات)**. أعط تفسيراً فيزيائياً للمعادلة التي تحصل عليها مع ذكر المدلول الفيزيائي لكل رمزٍ فيها ثمَّ ناقشها بالتفصيل.

ثالثاً- عمّم النتيجة التي تحصل عليها من الطلب السابق لإيجاد العصابة الطاقية التالية، الناتجة من السوية الذّريّة-p. ناقش النتيجة التي تحصل عليها بالتفصيل.

السؤال الثالث: (25 درجة)

أولاً- اشرح مفهوم الكتلة الفعّالة بإيجاز واكتب العلاقة الموافقة لها.

ثانياً- يُساهم في الطواعيّة البارامغناطيسية كلاً من بارامغناطيسية كيوري وبارامغناطيسية باولي والمطلوب شرح بارامغناطيسية باولي بالتفصيل **(الرسم غير مطلوب)** وإثبات صحة العلاقة $\chi_m=\frac{1}{V}\mu_0\,\mu_B^2\,g(E_F)$.

ثالثاً- يُعدُّ مفعول ميسنر خاصية أساسية للناقلية الفائقة. اذكر هذه الخاصية.

ملاحظة: للرموز المستخدمة مدلولاتها الفيزيائية المعروفة

بالتوفيق والنجاح للجميع

طرطوس في 2023/01/17

أ. د. حسن عبد الكريم سليمان

حل تصحيحي مسابقة فيزياء والكالة الصلبة (2)

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 20 درجة

$$N = n + i\kappa \,, \qquad (1)$$

حيث n القسم الحقيقي لـ N و κ قسمه التخيلي:

يصف القسم الحقيقي، n، لقرينة الانكسار العقدية تغيّر طول الموجة في المادة ومن ثمّ الانكسار عند السطح الفاصل،

أمّا القسم التخيلي، κ، فيُفسّر التخامد الذي يحدث داخل المادة.

$$N = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{\epsilon_r + i\,\epsilon_i} \,, \qquad (2)$$

حيث ϵ_r و ϵ_i القسمين الحقيقي والتخيلي لتابع العازلية العقدية، ϵ، على الترتيب.

تأخذ علاقة الحقل الكهربائي الموافقة الشكل الآتي:

$$\vec{E}(y,t) = \vec{E}_0 \exp[i\,[(2\pi\, N/\lambda_0)\, y - \omega t]] = \vec{E}_0 \exp(-\kappa y) \exp\left[i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0}\, y - \omega\, t\right)\right] \qquad (3)$$

$$\vec{E}(y,t) = \exp(-\kappa y)\, \vec{E}_0 \exp[i\,(k_0 y - \omega\, t)] \,,$$

حيث $\lambda_0 = 2\pi\, c/\omega$ (c سرعة انتشار الضوء في الخلاء).

وهذا يعني أنّ الموجة المتوغلة في مادة الفلز المدروس تتخامد بمقدار $\exp(-\kappa y)$.

لدراسة حركة إلكترون واحد في الحقل الكهربائي للموجة الكهرطيسية المعطاة في نص السؤال يجب أن يكون استقطاب هذه الموجة، بحيث يقع الحقل $\vec{E}$ في الاتجاه x ومقدار الحقل $\vec{E}$ التابع للزمن، مساوياً $E_0\, e^{-i\omega t}$. وسيتحرك الإلكترون وفقاً لمعادلة الحركة:

$$m_e \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -e\, E_0\, e^{-i\omega t} \,. \qquad (4)$$

والحل المناسب للمعادلة (4) يكون من الشكل:

$$x(t) = A \exp(-i\omega t), \qquad (5)$$

حيث A مطال عقدي.

بالتعويض عن العلاقة (5) في المعادلة (4) نجد أنه فعلاً حلّ لها حيث:

$$m_e \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -e\, E_0 \exp(-i\omega t);$$

$$m_e A(-i\omega)(-i\omega)\exp(-i\omega t) = -e\, E_0 \exp(-i\omega t); \qquad (6)$$

$$m_e A(-i\omega)(-i\omega) = -e\, E_0 \Rightarrow A = \frac{e\, E_0}{m_e \omega^2}$$

وبنتيجة تطبيق الحقل الكهربائي للموجة الكهرطيسية ينزاح الإلكترون من موقعه دورياً، مما يؤدي إلى تغيّرٍ في عزم ثنائي القطب الكهربائي $-e\,x(t)$؛

ومن أجل جسم صلب بكثافة إلكترونات ناقلية، n، الاستقطاب المجهري، $p(t)$ ، الذي ينتج من عزوم ثنائيات- القطب هذه، يساوي:

$$p(t) = -ne\,x(t) = -neA\exp(-i\omega t) = -\frac{ne^2 E_0 \exp(-i\omega t)}{m_e \omega^2}. \qquad (7)$$

ونعلم من جهة أخرى، أنّ العلاقة العامة بين الحقل الكهربائي، E ، وحقل الانزياح الكهربائي، D، تأخذ الشكل

$$D = \epsilon \epsilon_0 E = \epsilon_0 E + p \quad \Rightarrow \quad \epsilon \epsilon_0 E - \epsilon_0 E = p ,$$

$$(\epsilon - 1)\epsilon_0 E = p \quad \Rightarrow \quad \epsilon - 1 = \frac{p}{\epsilon_0 E} \qquad (8)$$

ومن ثمَّ:

$$\epsilon = 1 + \frac{p(t)}{\epsilon_0 E_0 \exp(-i\omega t)} = 1 - \frac{1}{\epsilon_0 E_0 \exp(-i\omega t)} \frac{ne^2 E_0 \exp(-i\omega t)}{m_e \omega^2} . \qquad (9)$$

وباستخدام العلاقة الأخيرة والنتيجة التي حصلنا عليها من أجل الاستقطاب، العلاقة (7)، نحصل على علاقة حساب تابع العازلية:

$$\epsilon = 1 + \frac{p(t)}{\epsilon_0 E_0 \exp(-i\omega t)} = 1 - \frac{1}{\epsilon_0 E_0 \exp(-i\omega t)} \frac{ne^2 E_0 \exp(-i\omega t)}{m_e \omega^2} = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} ;$$

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} ,$$

الذي يحوي ما يسمى تواتر البلازما، ω_p، والذي يُعطى بالعلاقة: $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}$.

أولاً– عندما يكون تواتر الموجة الكهرطيسية الواردة على سطح الفلز أقل من تواتر البلازما، $\omega < \omega_p$، يكون تابع العازلية، ϵ، **حقيقياً وسالباً**، ومن ثمَّ المقدار $\sqrt{\epsilon}$ **تخيلياً صرفاً** والعلاقة (3) تُمثِّل **تغلغلاً للموجة** في الفلز **متخامداً أُسِّياً**. وبشكل مكافئ، نرى بالنسبة لتابع العازلية، ϵ، **السالب**، أن قرينة الانكسار العقدية (1) تحوي المركبة **التخيلية**، $i\kappa$، **فقط**؛ لا يمكن لهذا التخامد أن يكون ناتجاً عن الضياعات اللامرنة، لأن العلاقة (4) لم تأخذ بالحسبان مثل هذه العمليات. وبما أن الضوء لم يخترق الفلز، والطاقة مُصانة، **فيجب أن ينعكس**.

ثانياً– عندما $\omega > \omega_p$، يكون تابع العازلية، ϵ، **حقيقياً وموجباً** والعلاقة (3) تُمثِّل موجةً ضوئيةً منتشرة في الفلز. تكمن حقيقة الأمر في أن الفلزات عاكسة للضوء ذي **التواتر المنخفض**، ولكنها تُصبح شفافةً من أجل الضوء ذي التواتر المرتفع. والانتقال هنا يحدث عند تواترٍ مساوٍ لتواتر البلازما.

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 25 درجة

أولاً – "تقريب الربط المحكم (الرابطة الشديدة)": هو تصميم لتابع موجة بلوخ يُمثَّل **بتركيبٍ خطّيٍ لمدارات ذرية** (LCAO) أي بتوابع موجية شديدة التوضع لذرات تؤلّف جسماً صلباً ويهدف إلى وصف بنيته الإلكترونية.

ثانياً– تصف المعادلة المعطاة **كيفية تحوّل** السويات الذّريّة، E_n ، إلى عصابة طاقية عند انتظام الذرات في شبكة بلوريّة.

إن عملية الجمع في المعادلة المعطاة تقتصر فقط على أقرب المجاورات لذرة، عند $+a$ و $-a$:

وبما أن **التوابع الموجية الذّريّة-s متناظرة كروياً**، فإن $\gamma_s = \gamma(-a) = \gamma(a)$ ، وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد:

$$E_s(\vec{k}) = E_s - \beta_s - \gamma_s\left(e^{ika} + e^{-ika}\right) = E_s - \beta_s - 2\gamma_s \cos ka,$$

حيث β_s هي قيمة β المحسوبة من أجل هذه العصابة-s.

تُمثّل المعادلة الأخيرة **العصابة الطاقية الأدنى** للجسم الصلب المدروس والشكل المبين أدناه يوضح شكلها.

ويمكن مناقشة هذه النتيجة كما يأتي:

- تملك العصابة-s أدنى طاقة عند النقطة $k = 0$ وأقصى طاقة عند النقطة $k = \pi/a$ ، أي أنها تقع في حدود منطقة بريلوان الأولى.
- نلاحظ أن التبدد الذي يظهر في المعادلة الأخيرة مشابهٌ جداً للعصابة الطاقية الأدنى المحسوبة في **تقريب الإلكترون شبه– الحر**.
- مركز العصابة-s هنا منزاح عن الطاقة الذّريّة E_s بمقدار $-\beta_s$ ، وعادةً يكون هذا الانزياح صغيراً جداً.

يُعدُّ تعميم هذه النتيجة لتشمل سويات طاقة ذريّة أخرى بسيطاً، والشكل المبين أدناه يوضح أيضاً نتيجة الحساب من أجل العصابة الطاقية التالية، الناتجة من **السوية الذّريّة-p**. ونرى مرةً أخرى، أن هذه العصابة مشابهة جداً لنتيجة تقريب الإلكترون شبه– الحر.

وجدنا أيضاً فجوة عصابة طاقية عند النقطة $k = \pi/a$: تُحدد أبعادها:

بالفاصل الطاقي بين السويات-s والسويات-p، والفارق بين الانزياحين β_s و β_p ، **وعرض** العصابتين الطاقيتين. يمكن عرض العوامل التي تؤثر في العرض الطاقي المطلق لعصابة من العصابات الطاقية في نموذج البعد الواحد، الذي ندرسه هنا وفق الآتي: **يُعطى العرض الطاقي** بالكمية $2\gamma_s$ ، حيث ينشأ **العامل 2** من عدد المجاورات الأقرب للذرة المعطاة **والحدّ** γ_s من تراكب التوابع الموجية والكمون.

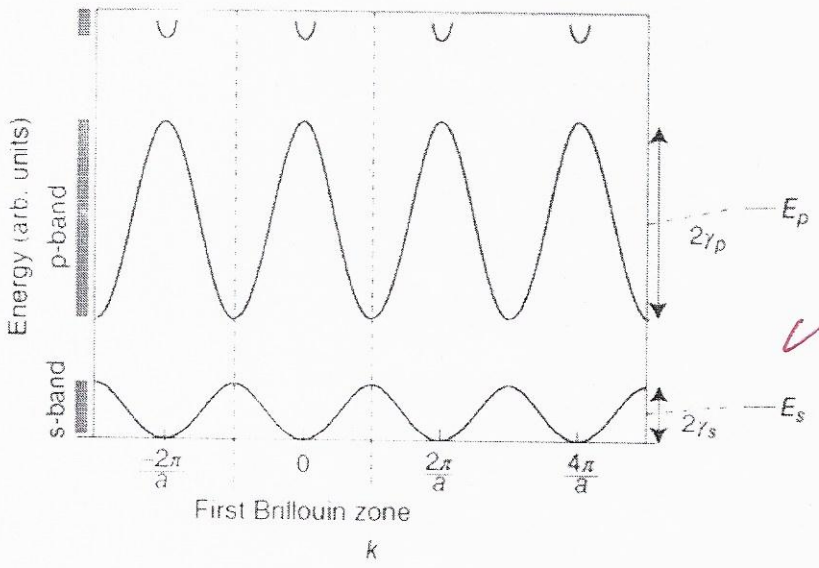
فالعدد التساندي العالي للذرات، الذي يكون متوافراً عادةً في **البنيات المتراصة** للمعادن، يُنتج عرض عصابة طاقة كبيراً.

ولقيمة γ_s أهمية أكبر في تحديد عرض العصابة الطاقية عادةً بسبب التناقص الشديد جداً للتوابع الموجية عند ابتعادها عن النواة.

→ فمن أجل بنية ما معطاة، سيؤدي تابع موجي ذرّيّ ما متوضّع بشدة بجوار النواة إلى عصابة طاقة أضيق بشكل ملحوظ من عصابة الطاقة التي يؤدي إليها تابع موجي أقل توضّعاً.

→ فعلى سبيل المثال: تؤدي **سوية ذرية-3d** إلى عصابة طاقة أضيق بكثير من تلك العصابة التي تؤدي إليها **السوية-4s**، على الرغم من أن السويات الذّريّة متشابهة جداً بالطاقة.

- ثمة حالة حدّية لتابع موجي متوضّع، تتمثل في السوية الداخلية (1s) لذرة ثقيلة: فالتوابع الموجية 1s للذرات المتجاورة لا تتراكب على الإطلاق في الجسم الصلب **والعصابة-1s الناتجة**، تمتلك عرضاً قريباً من الصفر، أي أنها مستوية بالكامل؛ إذْ تحتفظ بسلوكها الذّريّ المتوضّع.



توزيع الدرجات على جواب السؤال الثالث: 25 درجة

أولاً– تعبر الكتلة الفعّالة عن مقدار تأثير قوة الحقل البلّوري على حركة الجسيم/ حامل الشحنة الكهربائية في البلّورة ويُعبّر عنها بالعلاقة $m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2E(k)}{dk^2} \right)^{-1}$ وتتناسب عكساً مع مقدار تقوس عصابات الطاقة.

ويمكن أن يبدو مفهوم **الكتلة الفعّالة** في البداية اصطناعياً نوعاً ما، إلاّ أنه يسمح لنا بوصف الناقلية بمعادلة حركة تقليدية، كما في نموذج درودي. **الفعل الوحيد للجسم الصلب يكمن في أنه يُغيّر الكتلة الفعّالة للإلكترونات**، ويمكن أن يكون هذا الفعل دراماتيكياً:

إذْ يمكن أن تكون الكتلة الفعّالة **أقل** بكثير أو **أكبر** بكثير من كتلة الإلكترون الحُرّ، ويمكن أن تكون أيضاً **سالبةً**. بالطبع، من أجل الإلكترونات الحرة، تساوي الكتلة الفعّالة كتلة الإلكترون، m_e.

إن مفهوم الكتلة الفعّالة يعود بنا إلى علاقة درودي من أجل الناقلية الكهربائية، $\sigma = ne^2\tau / m_e$. إذا عالجنا الناقلية في نموذجٍ كمومي، بدءاً من علاقة مشابهة للعلاقة $a = -\frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E(k)}{dk^2}eE$، فإن علاقة الناقلية النهائية ستأخذ نفس شكل العلاقة شبه التقليدية. لقد رأينا سابقاً أن الإلكترونات في العصابات الممتلئة جزئياً التي يجب دراستها لحساب الناقلية، هي **تلك الإلكترونات الواقعة بالقرب من طاقة فرمي فقط**، ولهذا السبب لا بد من:

- ❖ استبدال الكتلة في العلاقة شبه– التقليدية **بالكتلة الفعّالة** عند طاقة فرمي؛
- ❖ وزمن الاسترخاء سيكون زمن استرخاءٍ من أجل الإلكترونات الواقعة بالقرب من طاقة فرمي،
- ❖ والكثافة الإلكترونية، n، ستبقى ظاهرةً كما هي، ولكن ليس لأن كل الإلكترونات تُسهم في التيار؛ إذْ سبب ظهور الكثافة الإلكترونية، n، في المعادلة، يكمن في أن **عدد الإلكترونات عند طاقة فيرمي يتعلق بالكثافة الإلكترونية**. وهذا واضح تماماً في نموذج الإلكترون الحر حيث بُعد k_F ومن ثمَّ بُعد "كرة فرمي" يتعلق بتركيز الإلكترونات.

ثانياً– تُبدي الإلكترونات الحرة سلوكاً بارامغناطيسياً:

- فإذا امتلك كلّ إلكترونٍ حرٍ سبيناً قيمته $\frac{1}{2}$ وعزماً مغناطيسياً μ_B، فمن المرجّح أن تشارك الإلكترونات الحرة في تمغنط الإشباع للجسم الصلب بقيمة تساوي حاصل ضرب μ_B في كثافة الإلكترونات.
- يتم بلوغ هذا الإشباع عند اصطفاف كل العزوم المغناطيسية بشكلٍ **موازٍ** للحقل الخارجي (أو اصطفاف السبينات بشكلٍ **مساير** للحقل). غير أن حقيقة الأمر ليست كذلك على الإطلاق والطواعيّة البارامغناطيسية للإلكترونات الحرة صغيرة جداً فعلياً.
- يمكن فهم الطواعيّة البارامغناطيسية لإلكترونات حرة وحسابها باستخدام الشكل المبين أدناه:

جرى تصنيف الحالات المشغولة بإلكترونات حرة في الشكل (a) إلى فئتين:

واحدة بعزومٍ مغناطيسيةٍ **مسايرةٍ** لحقل خارجي، B_0، وأخرى بعزومٍ مغناطيسيةٍ **موازيةٍ** له؛ افترض هنا أن يكون هذا الحقل الخارجي صفراً تقريباً.

- يُظهر الشكل (b) ماذا يحدث عند ازدياد B_0 حتى قيمة محدودة. ترفع الإلكترونات طاقتها أو تُخفّضها بمقدار $\mu_B B_0$ تبعاً لاتجاه عزومها المغناطيسية بالنسبة لاتجاه الحقل الخارجي.

- بما أن μ_B صغير جداً، فإن هذا التغيّر الطاقي يكون صغيراً جداً، أياً يكن الحقل الخارجي الذي يمكن بلوغه، إذ يبلغ هذا التغيّر نحو 10^{-5} eV، وهو أقل بكثير من الفاصل الطاقي بين قاع العصابة الطاقية وطاقة فيرمي.
- وبما أن هذا الانزياح حدث، فإن الإلكترونات التي انتقلت إلى ما فوق طاقة فيرمي تستطيع تخفيض طاقاتها بقلب سبيناتها حيث تُصبح الإلكترونات بعزمٍ مغناطيسي موازٍ للحقل الخارجي، كما يوضح الشكل (c).
- وهذا يؤدي إلى توافر إلكترونات بعزمٍ مغناطيسي موازٍ للحقل بعدد أكبر من عدد الإلكترونات المتوافرة بعزمٍ مغناطيسي مسايرٍ له، أي أن هذا الانزياح يؤدي إلى استجابة بارامغناطيسية.

لإيجاد χ_m، يجب أن نحدد كمية الإلكترونات التي تقلب سبيناتها لكي تمتلك عزماً مغناطيسياً موازيا للحقل الخارجي؛ تُمثَّل هذه الإلكترونات في الشكل (c) بالقطعة الرمادية الفاتحة حيث تبلغ مساحة كل قطعة $\frac{1}{2} g(E_F)\mu_B B_0$.

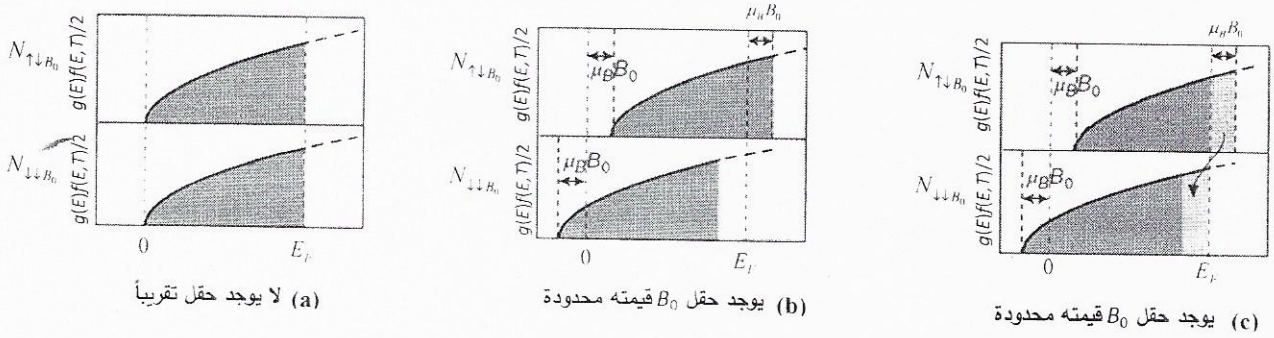
ولهذا السبب، يكون الفارق بين الإلكترونات التي عزومها المغناطيسية موازية للحقل وتلك التي عزومها مسايرة له مساوياً

$$N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0} = g(E_F)\mu_B B_0 ,$$

حيث تُشير الأسهم إمَّا إلى أن العزوم والحقل متوازية وإمَّا أنها متسايرة.

ومن ثمَّ يبلغ التمغنط المحصّل:

$$M = \frac{1}{V}\left(N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0}\right)\mu_B = \frac{1}{V} g(E_F)\mu_B^2 B_0 ,$$



(a) لا يوجد حقل تقريباً (b) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة (c) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة

ومن ثمَّ تُصبح علاقة الطواعيّة المغناطيسية، χ_m، من الشكل:

$$\chi_m = \frac{1}{V}\mu_0 \mu_B^2 g(E_F),$$

والتي قيمتها صغيرة، ومن نفس رتبة الطواعيّات الدايامغناطيسية.

فالحقل اللازم لصفّ كل السبينات لا يكفي أن يتحقق الشرط $\mu_B B_0 >> k_B T$ فقط، وإنما يجب أن تتحقق المتراجحة $\mu_B B_0 > E_F$، أي يجب أن يكون مقدار التغيّر الطاقي الذي تتعرض له الإلكترونات نتيجة تطبيق حقل خارجي أكبر من طاقة فيرمي أيضاً، وهو مقدار كبير جداً هنا. في حقيقة الأمر، تختلف بارامغناطيسية باولي عن بارامغناطيسية كيوري تماماً: ففي بارامغناطيسية كيوري، فعلياً يمكن بلوغ التمغنط القوي، لأن ما تحتاجه الطاقة المغناطيسية، فقط أن تكون أعلى بكثير من الطاقة الحرارية. أمَّا من أجل بارامغناطيسية باولي، فإنها بحاجة لأن تتجاوز طاقة فيرمي، وهذا أمر غير ممكن.

ثالثاً- تنص الخاصية التي تتصف بها الناقلية الفائقة على أن الناقل الفائق يُبدي دايامغنطيسية مثالية، أي أنَّ **طواعيّته** المغنطيسية تساوي سالب واحد، $\chi_m = -1$، ومن ثمَّ تمغنط **الناقل الفائق**، $\vec{M} = -\vec{B}_0 / \mu_0$، يلغي الحقل الخارجي، $\vec{B}_0$، داخله بالكامل.

أ. د.

جامعة طرطوس
كليّة العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2**
لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء
للعام الدراسي 2021-2022/الدورة **التكميلية**

الاسم:
المدة: **ساعتان**
الدرجة القصوى: **70**

السؤال الأول: (20 درجة)

تكمن إحدى الصفات المميزة والمهمة للفلزات في قدرتها على حجب الحقول الكهربائية:

أولاً– اشرح ماذا يُقصد بمفعول الحجب الفلزي مع كتابة العلاقات المناسبة.

ثانياً– صفْ وارسم شكل منحني كثافة الحالات المشغولة في درجة الصفر المطلق في حالتين؛ بعيداً عن الذرة الشائبة (الشحنة الموجبة المتناظرة كروياً) الموجودة في الفلز وقريباً منها؛ ثمَّ أحسب كثافة الشحنة المتراكمة في جوارها r، إذا علمت أن طاقتها الكامنة أقل من طاقة فيرمي بكثير.

ثالثاً– أوجد علاقة الكمون $\phi(r)$ بتطبيق معادلة بواسُون في الإحداثيات الكروية. ماذا تستنتج؟. ثمَّ ناقش علاقة طول حجب توماس– فيرمي.

السؤال الثاني: (30 درجة)

أولاً– اشرح فكرة عصابات الطاقة الإلكترونية من أجل بلّورتي الصوديوم والسيلكون، موضّحاً الفارق بين سلوكهما بالتفصيل ومستعيّناً بالرسم.

ثانياً– عرّف الغرافين ثمَّ اشرح بنية عصابة الطاقة له موضّحاً طبيعة الروابط التي يتألف منها واشرح لماذا يُعدُّ الغرافين نصف فلزٍ؟.

السؤال الثالث: (20 درجة)

يُساهم في الطواعيّة البارامغناطيسية بارامغناطيسية كيوري وبارامغناطيسية باولي والمطلوب شرح بارامغناطيسية **باولي** بالتفصيل مرضِّحاً إجابتك بالرسم ثمَّ إيجاد علاقة الطواعيّة المغنطيسية الموافقة ومناقشتها فيزيائياً.

ملاحظة: للرموز المستخدمة مدلولاتها الفيزيائية المعروفة

بالتوفيق والنجاح للجميع

طرطوس في 2022/09/15

أ. د. **حسن عبد الكريم سليمان**

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 22 درجة

لشرح مفعول الحجب ندرس في البداية كمون كولون الناتج عن شحنة نقطية موجبة، q، في الخلاء:

$$\phi_0(r)=\frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad (1)$$

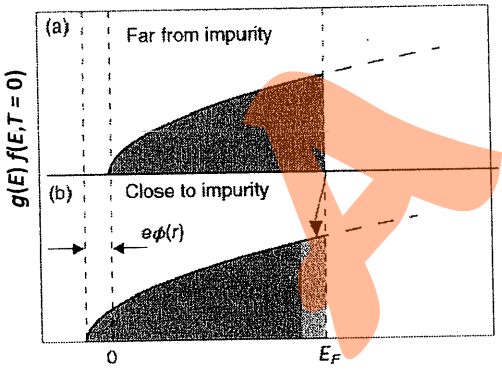
حيث r المسافة بدءاً من الشحنة.

لا تتغيّر هذه النتيجة كثيراً عندما نضع الشحنة النقطية في عازلٍ؛ إذْ علينا أن نستبدل ϵ_0 بـ $\epsilon\epsilon_0$ فقط، حيث ϵ ثابت العزل للعازل. فينخفض الكمون الكليّ بمقدار العامل الثابت ϵ. ولكن، إذا وضعنا الشحنة النقطية الموجبة في فلزٍ، فإنها ستجذب الإلكترونات المحيطة بها حيث تكون هذه الإلكترونات حرة الحركة باتجاه الشحنة النقطية، **مما يؤدي** إلى ظهور غمامة إلكترونية سالبة حول الشحنة النقطية، **تُخفِّضُ الكمون الكليّ بشدة** عند المسافات الكبيرة. وهذا هو مفعول الحجب الفلزي الذي سنصفه الآن كمياً.

لندرس الآن **شحنة نقطية موجبة في فلزٍ**، يُعطى كمونها بالعلاقة (1). هذا الكمون متناظر كروياً، ويؤدي إلى غمامة إلكترونية حول الذرة الشائبة، كمونها، $\phi_s(r)$، أيضاً متناظر كروياً. يُشير تراكب الكمونين إلى أن الكمون الكليّ يساوي

$$\boxed{\phi(r)=\phi_0(r)+\phi_s(r)}$$

إذا فرضنا أن الطاقة الكامنة، $e\phi(r)$، صغيرة بالمقارنة مع طاقة فيرمي، E_F، بحيث يتغيّر الكمون الكليّ، $\phi(r)$، ببطءٍ في الفراغ، وأن درجة الحرارة تساوي 0 K، فيمكن وصف الحجب بالصورة التي يوضحها الشكل المجاور؛ فبعيداً عن الشائبة حيث الكمون، $\phi(r)$، يساوي الصفر فعلياً، تمتلئ الحالات الشاغرة بالإلكترونات في الفلز حتى طاقة فرمي، ولكن بجوار الشائبة، "تشعر" الإلكترونات بطاقة كهركدة إضافية من $e\phi(r)$، بحيث تكون طاقات كل الحالات أقل. وهذا يوافق انزياحاً لكثافة الحالات نحو الطاقات الأخفّض (من أجل شحنة نقطية موجبة)؛ وبدوره يؤدي هذا الانزياح إلى حالةٍ، حيث تستطيع الإلكترونات الموجودة في الفلز، الانتقال إلى الحالات الطاقية الأخفّض المتاحة الواقعة بجوار الشائبة وإشغالها (الساحة الرمادية الفاتحة في الشكل) حتى بلوغ وضع التوازن. وعندها، تساوي كثافة الشحنة المتراكمة في جوار r إلى حاصل ضرب $-e$ في أبعاد الساحة الرمادية الفاتحة، مما يؤدي إلى المساواة: $\rho(r)=-e^2\frac{1}{V}g(E_F)\phi(r)$. (2)



يمكن الاعتقاد بأن هذا التدفق للشحنة **سيؤدي لانخفاض الشحنة** في باقي الفلز؛ وهذا أيضاً صحيح، ولكن حجم الجسم الصلب، أُفترض كبيراً جداً بالمقارنة مع المساحة حول الشائبة، بحيث يمكن إهمال هذا الانخفاض.

ثالثاً- بتطبيق معادلة بواسُّون، $\nabla^2\phi(\vec{r})=-\rho(\vec{r})/\epsilon_0$، واستخدام العلاقة (2) و كتابة مؤثر لابلاس، ∇^2، بالإحداثيات الكروية والاستفادة من أنَّ $\phi(\vec{r})$ يتعلق بالمسافة r فقط ولا يتعلق بالاتجاه، نحصل على العلاقة الآتية:

$$\nabla^2\phi(\vec{r})=\frac{\partial^2\phi(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}=\frac{e^2}{V\epsilon_0}g(E_F)\phi(r). \qquad (3)$$

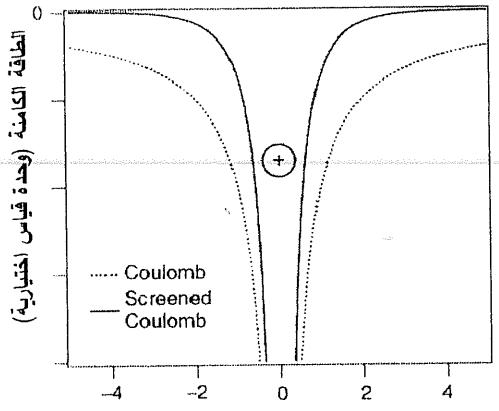
يأخذ حل هذه المعادلة التفاضلية الشكل الآتية: $\phi(r)=c\frac{1}{r}e^{r/r_0}$، (4)

حيث c ثابت و r_{TF} مقدار، يسمى طول حجب توماس– فيرمي ويُعطى بالعلاقة $r_{TF} = \sqrt{V \in_0 / e^2 \; g(E_F)}$

يمكن تثبيت الثابت c في العلاقة (4) بأخذ علاقة كمون كولون غير المحجوب من أجل الشحنة النقطية الموجبة، $\phi_0(r)$، في العلاقة (1)، واستعادتها من أجل حالة، تؤول فيها كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، $g(E_F)$، إلى الصفر، أي عندما يُصبح الفلز مشابهاً للخلاء. ومن أجل $g(E_F)$ صغيرة، ستكون المسافة r_{TF} كبيرة جداً والتابع الأُسّي في العلاقة (4) **يبدو مساوياً للواحد**. ولذلك يجب أن نختار الثابت c بحيث تتحقق المساواة الآتية:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{q}{r} e^{r/r_{TF}} \; ,$$

إنَّ قيمة r_{TF} في معظم الفلزات صغيرة جداً، من رتبة أنغستروم، ثم إنَّ القسم الأُسّي في العلاقة (6-25) **يجعل الكمون المحجوب** (كمون الحجب) يتناقص على مقياس الطول نفسه، بسرعة **أكبر بكثير من سرعة تناقص** كمون كولون غير المحجوب.



توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 30 درجة

لشرح فكرة عصابات الطاقة الإلكترونية من أجل بلّورتي الصوديوم Na والسيلكون Si، وتوضيح الفارق بين سلوكهما بالتفصيل والرسم نبدأ بدراسة ذرتي صوديوم، حيث تكون الحالة مشابهة لحالة جزيء هيدروجين، كما في الشكل (a):

- حالما تقترب الذرتان من بعضها البعض، تتشكل المدارات الجزيئية الرابطة وغير الرابطة.
- فكل ذرة صوديوم تمتلك إلكتروناً واحداً 3s وبتكيّف الإلكترونان في المدار الرابط؛ فهما يمتلكان سبينين **متعاكسين**، لكي يُحققان متطلبات مبدأ باولي، الشكل (a)؛
- يوضح الشكل (b) موضع السويات الطاقية؛ كتابع للمسافة بين الذريّة، حيث تمّ وضع تدريج الطاقة عند الصفر من أجل المسافة البعيدة جداً بين الذرات.

فمن أجل المسافة a تصل السوية الرابطة إلى أخفض قيمة طاقية، وطالما أن السوية الرابطة فقط، تُشغل بإلكترونين، **فلا** يكون لطاقة الحالة غير الرابطة معنى وتزداد الطاقة المكتسبة من أجل المسافة a.

- لنأخذ الآن حالة أكثر من ذرتين:

في هذه الحالة، يؤدي تأثر الحالتين الذريتين إلى تشكّل سويتي طاقة تمتدان على كامل الجزيء.

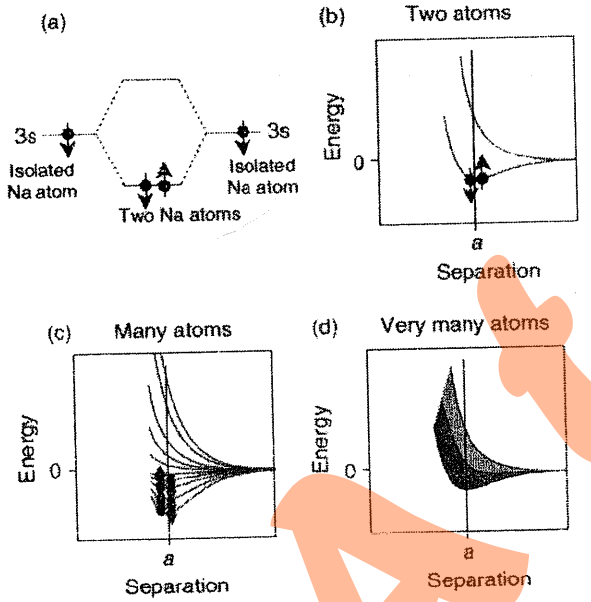
والحالة هنا، تشابه الحالة الموافقة لوجود N ذرة؛

إذْ تنشطر السويات الطاقية الذرية-N إلى N سوية جزيئية غير متحللة.

وعندها يُسكن نصف هذا العدد، $\frac{1}{2}N$ ؛ كل منها بإلكترونين، كما يظهر في الشكل (c)، حيث تُطبّق المبادئ ذاتها من أجل عدد كبير جداً من السويات (N).

ويوجد هنا شبه- استمرارية للحالات الطاقية؛ بين أخفض سوية وأعلى سوية، حيث يكون نصفها ممتلئ، كما يظهر في الشكل (d).

تسمى شبه- الاستمرارية هذه **عصابة طاقة**.



يمكننا الآن، أن نرى وصفياً، لماذا يُبدي الصوديوم Na سلوكاً فلزياً؛

فنصف العصابة الطاقية لإلكترونات التكافؤ ممتلئ تماماً.

وعند تطبيق حقل كهربائي على عيّنة من Na، تتعرّض الإلكترونات لقوة معاكسة بالاتجاه لاتجاه الحقل، ولكي تتحرك في ذاك الاتجاه، يجب أن تزيد طاقتها الحركية قليلاً، أي يجب أن تذهب إلى حالة طاقية أعلى من حالتها التي كانت فيها قبل تطبيق الحقل الكهربائي بقليل.

وهذا ممكن بسهولة من أجل الإلكترونات المتوافرة في هذه الحالات الطاقية الأعلى المشغولة بها، بسبب وفرة الحالات الشاغرة ذات الطاقات الأعلى من طاقات الحالات المشغولة بقليل.

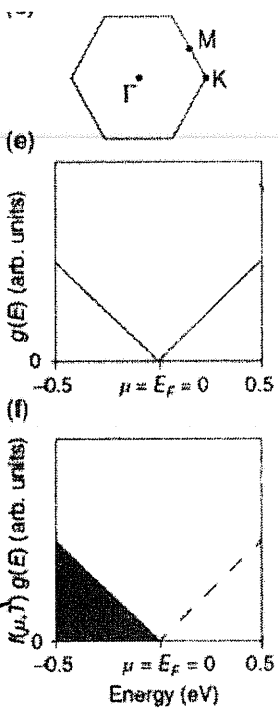
ولرؤية سلوك مختلف تماماً عن السلوك السابق، ندرس تشكّل عصابات طاقة في السيلكون:

فإلكترونات التكافؤ المنخرطة في الترابط، هي إلكترونان 3s وإلكترونان 3p؛ وحالما تقترب ذرات Si بعضها من البعض، تتهجّن المدارات وتُشكّل عصابتين من الحالات الطاقية **عند مسافة التوازن**، a، تحوي كل منها أربع حالات لكل ذرة Si، أي أن المجموع، ثمان حالات لكل ذرة؛ **اثنتان** منها، أُستمدّت من الحالات الذرية s **وستة** من الحالات الذرية p، على الترتيب.

تتألف العصابة الأخفض من المدارات sp^3 وهي مشغولة تماماً بالكترونات التكافؤ الأربعة لكل ذرة Si، أمّا العصابة الأعلى، فهي شاغرة تماماً، وتوجد بينهما، منطقة طاقية خالية من الحالات، تسمى **فجوة عصابة الطاقة**.

وهذا ما يُفسّر السلوك العازل (من الناحية الكهربائية طبعاً) للسيليكون Si: فعند تطبيق جهد، لا تستطيع إلكترونات العصابة sp^3 الممتلئة أن تُزيد طاقتها الحركيّة بمقدارٍ صغيرٍ، لعدم وجود حالات شاغرة بطاقات أعلى منها بقليل، تستطيع الإلكترونات الانتقال إليها.

شرح البنية الترابطية والإلكترونية للغرافين:



يمتلك الكربون **أربعة إلكترونات تكافؤ** (اثنان 2s واثنان 2p)، ويمكن بلوغ الترابط في بنية "قرص العسل" للغرافين بصورة رئيسة بعملية تهجينٍ sp^2 بين الحالات s و $p_{x,y}$ لتشكيل روابط σ (سيغما) قوية، والمدارات p_z المتبقية، تخرج من المستوي وتُشكّل روابط π:

- كل ذرة كربون تُسهم في الروابط σ بثلاث إلكترونات وفي الرابطة π بإلكترون واحد.
- يمتلك الغرافين ذرتين في كل وحدة خلية، أي يمتلك ما مجموعه ستة إلكترونات σ وإلكترونين π.
- بمقدور الإلكترونات σ الستة أن تملأ ثلاث عصابات بشكلٍ كاملٍ (إلكترونان في كل عصابة) والإلكترونان π عصابة واحدة؛ يمكن رؤية ذلك في بنية عصابات الطاقة أيضاً.
- وبالنتيجة لدينا أربع **عصابات مشغولة تماماً**، ومن ثمَّ يمكن للغرافين أن يكون عازلاً/ نصف ناقل.
- الشيء الغريب والملفت للانتباه فيما خصَّ الغرافين يكمن في **عدم امتلاكه لفجوة طاقية** بين العصابة π المشغولة والعصابة π^* الشاغرة.
- تُصادف هذه العصابات في ركن المضّلع- السداسي تماماً، منطقة بريلوان ثنائية- البعد، حيث يسمى هذا الركن النقطة K (كَبَا)، كما في الشكل المجاور.
- يوضح الشكلان (e) و (f) كثافة الحالات وكثافة الحالات المشغولة بجوار طاقة فيرمي، E_F، على الترتيب:

← فمن أجل الطاقات القريبة كفايةً من E_F، يكون التبدد لكل من العصابات π و π^* خطّياً، وإلى جانب حقيقة أن الغرافين ثنائي- البعد، نحصل على كثافة حالات تُعدُّ خطّيّةً كتابع للطاقة.

← تؤول هنا كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، E_F، إلى الصفر تماماً، غير أنه لا توجد فجوة طاقية.

← إذا عرَّفنا معدناً بأنه مادة يقع الكمون الكيميائي (أو طاقة فيرمي) فيها عند طاقةٍ حيث تكون كثافة الحالات محدودةً، فإن **الغرافين ليس معدناً**.

ومن جهة أخرى، لا يمتلك الغرافين فجوة طاقية (منطقة محظورة) بين الحالات الطاقية الأعلى المشغولة والحالات الطاقية الأدنى الشاغرة، وهو ما يمكن إيجاده في حالة عازلٍ/ نصف ناقلٍ.

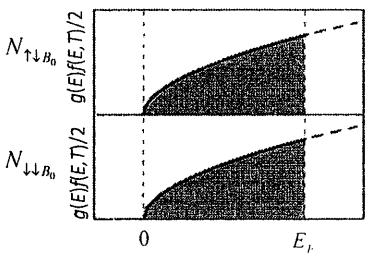
ومن ثمّ يسمى الغرافين عادةً إمّا **نصف فلزٍ** وإمّا نصف ناقل بفجوة طاقية صفرية، لأن كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، E_F، تساوي الصفر، ولا توجد فجوة طاقية بين الحالات الطاقية الأعلى المشغولة والحالات الطاقية الأدنى الشاغرة.

توزيع الدرجات على جواب السؤال الثالث: 20 درجة

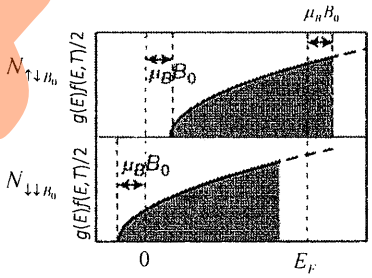
- تُبدي الإلكترونات الحرة سلوكاً بارامغناطيسياً: فإذا امتلك كلّ إلكترونٍ حرٍ سبيناً قيمته $\frac{1}{2}$ وعزماً مغناطيسياً μ_B، فمن المرجّح أن تشارك الإلكترونات الحرة في تمغنط الإشباع للجسم الصلب بقيمة تساوي حاصل ضرب μ_B في كثافة الإلكترونات.
- يتم بلوغ هذا الإشباع عند اصطفاف كل العزوم المغناطيسية بشكلٍ موازٍ للحقل الخارجي (أو اصطفاف السبينات بشكلٍ مسايرٍ للحقل). غير أن حقيقة الأمر ليست كذلك على الإطلاق والطواعيّة البارامغناطيسية للإلكترونات الحرة صغيرة جداً فعلياً.
- يمكن فهم الطواعيّة البارامغناطيسية لإلكترونات حرة وحسابها باستخدام الشكل المجاور:

جرى تصنيف الحالات المشغولة بإلكترونات حرة في الشكل (a) إلى فئتين: واحدة بعزومٍ مغناطيسيةٍ مسايرةٍ لحقل خارجي، B_0، وأخرى بعزومٍ مغناطيسيةٍ موازيةٍ له؛ افترض هنا أن يكون هذا الحقل الخارجي صفراً تقريباً.

- يُظهر الشكل (b) ماذا يحدث عند ازدياد B_0 حتى قيمة محدودة. ترفع الإلكترونات طاقتها أو تُخفِّضها بمقدار $\mu_B B_0$ تبعاً لاتجاه عزومها المغناطيسية بالنسبة لاتجاه الحقل الخارجي.
- بما أن μ_B صغير جداً، فإن هذا التغيّر الطاقي يكون صغيراً جداً، أياً يكن الحقل الخارجي الذي يمكن بلوغه، إذْ يبلغ هذا التغيّر نحو 10^{-5} eV، وهو أقل بكثير من الفاصل الطاقي بين قاع العصابة الطاقية وطاقة فيرمي.
- وبما أن هذا الانزياح حدث، فإن الإلكترونات التي انتقلت إلى ما فوق طاقة فيرمي تستطيع تخفيض طاقاتها بقلب سبيناتها حيث تُصبح الإلكترونات بعزمٍ مغناطيسيٍ موازٍ للحقل الخارجي، كما يوضح الشكل (c).
- وهذا يؤدي إلى توافر إلكترونات بعزمٍ مغناطيسيٍ موازٍ للحقل بعدد أكبر من عدد الإلكترونات المتوافرة بعزمٍ مغناطيسيٍ مسايرٍ له، أي أن هذا الانزياح يؤدي إلى استجابة بارامغناطيسية.

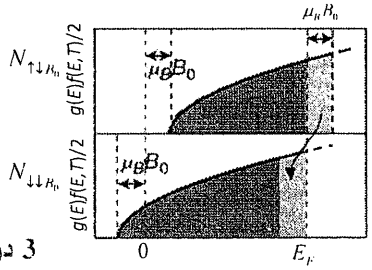


(a) لا يوجد حقل تقريباً



(b) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة

3 درجات



(c) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة

لإيجاد χ_m ، يجب أن نحدد كمية الإلكترونات التي تقلب سبيناتها لكي تمتلك عزماً مغناطيسياً موازياً للحقل الخارجي؛ تُمثَّل هذه الإلكترونات في الشكل (c) بالقطعة الرمادية الفاتحة حيث تبلغ مساحة كل قطعة $\frac{1}{2}g(E_F)\mu_B B_0$.

ولهذا السبب، يكون الفارق بين الإلكترونات التي عزومها المغناطيسية موازية للحقل وتلك التي عزومها مسايرة له مساوياً

$$N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0} = g(E_F)\mu_B B_0 ,$$

حيث تُشير الأسهم إمَّا إلى أن العزوم والحقل متوازية وإمَّا أنها متسايرة.

ومن ثمَّ يبلغ التمغنط المحصّل: $M = \frac{1}{V}\left(N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0}\right)\mu_B = \frac{1}{V}g(E_F)\mu_B^2 B_0$ ،

ومن ثمَّ تُصبح علاقة الطواعيّة المغناطيسية، χ_m ، من الشكل: $\chi_m = \frac{1}{V}\mu_0\,\mu_B^2\,g(E_F)$،

والتي قيمتها صغيرة، ومن نفس رتبة الطواعيّات الدايامغناطيسية.

فالحقل اللازم لصفّ كل السبينات لا يكفي أن يتحقق الشرط $\mu_B B_0 >> k_B T$ فقط، وإنما يجب أن تتحقق المتراجحة $\mu_B B_0 > E_F$ ، أي يجب أن يكون مقدار التغيّر الطاقي الذي تتعرض له الإلكترونات نتيجة تطبيق حقل خارجي أكبر من طاقة فيرمي أيضاً، وهو مقدار كبير جداً هنا. في حقيقة الأمر، تختلف بارامغناطيسية باولي عن بارامغناطيسية كيوري تماماً: ففي بارامغناطيسية كيوري، فعلياً يمكن بلوغ التمغنط القوي، لأن ما تحتاجه الطاقة المغناطيسية، فقط أن تكون أعلى بكثير من الطاقة الحرارية. أمَّا من أجل بارامغناطيسية باولي، فإنها بحاجة لأن تتجاوز طاقة فيرمي، وهذا أمر غير ممكن.

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2**
لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء
للعام الدراسي 2021-2022/الدورة الفصلية **الثانية**

الاسم:
المدة: **ساعتان**
الدرجة القصوى: **70**

السؤال الأول: (25 درجة)

تتصف بعض الفزات بظاهرة الانعكاسية الضوئية ولتفسيرها نعتبر الضوء الوارد على بلّورةٍ فلزيةٍ عليها موجة كهرطيسية مستوية عرضانية تنتشر في الاتجاه y ، تُعطى مركبة الحقل الكهربائي فيها بالعلاقة، $\vec{E}(y,t)=\vec{E}_0\exp(i(ky-\omega t))$ حيث $\vec{E}_0$ مطاله في **المستوي** (x,z) و $k=2\pi N/\lambda_0$ طويلة متجه الموجة (N قرينة الانكسار العقدية للوسط الفلزي)، والمطلوب:

أولاً- كتابة علاقة قرينة الانكسار العقدية للوسط الفلزي وذكر المعنى الفيزيائي لها بالتفصيل؛ **ثانياً**- كتابة علاقة تابع العازلية العقدي بدلالة قرينة الانكسار العقدية وذكر مدلول كل رمز فيها بالتفصيل؛ **ثالثاً**- كتابة علاقة مركبة الحقل الكهربائي المعطاة بدلالة N و $\in$. ماذا تستنتج؟؛ رابعاً- كتابة معادلة الحركة للإلكترون في الفلز وحلها، علماً بأن الحقل يقع في الاتجاه x. ماذا تستنتج؟ ثمَّ إيجاد علاقة الاستقطاب الدقيق من أجل بلّورة فلزية بكثافة إلكترونات ناقلية، n؛ **خامساً**- إيجاد علاقة تابع العازلية بدلالة تواتر الموجة الواردة عليها. ناقش الحالتين الحدّيتين. ماذا تستنتج؟.

سادساً- تعريف تواتر البلازما ثمَّ توضيح معنى وقوعه في منطقة الإشعاع فوق البنفسجي البعيد من أجل الفلزات.

السؤال الثاني: (30 درجة)

أولاً- اشرح فكرة عصابات الطاقة الإلكترونية من أجل بلّورتي الصوديوم والسيليكون، موضّحاً الفارق بين سلوكهما بالتفصيل ومستعيناً بالرسم.

ثانياً- عرّف الغرافين ثمَّ اشرح بنية عصابة الطاقة له موضّحاً طبيعة الروابط التي يتألف منها واشرح لماذا يُعدُّ الغرافين نصف فلزٍ ؟.

السؤال الثالث: (15 درجة)

يُساهم في الطواعيّة البارامغناطيسية كلاً من بارامغناطيسية كيوري وبارامغناطيسية باولي والمطلوب شرح بارامغناطيسية باولي بالتفصيل مرضّحاً إجابتك بالرسم وإثبات صحة العلاقة $\chi_m=\frac{1}{V}\mu_0\,\mu_B^2\,g(E_F)$.

ملاحظة: للرموز المستخدمة مدلولاتها الفيزيائية المعروفة

بالتوفيق والنجاح للجميع

طرطوس في 2022/07/31

أ. د. **حسن عبد الكريم سليمان**

A to Z

سلم تصحيح مسابقة فيزياء الحالة الصلبة - 2 / فصل ثاني

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 25 درجة

$$N = n + i\kappa , \qquad (1)$$

حيث n القسم الحقيقي لـ N و κ قسمه التخيلي:

يصف القسم الحقيقي، n، لقرينة الانكسار العقدية تغيّر طول الموجة في المادة ومن ثمّ الانكسار عند السطح الفاصل، أمّا القسم التخيلي، κ، فيُفسّر التخامد الذي يحدث داخل المادة.

$$N = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{\epsilon_r + i\epsilon_i} , \qquad (2)$$

حيث ϵ_r و ϵ_i القسمين الحقيقي والتخيلي لتابع العازلية العقدية، ϵ، على الترتيب.

تأخذ علاقة الحقل الكهربائي الموافقة الشكل الآتي:

$$\vec{E}(y,t) = \vec{E}_0 \exp[i\,[(2\pi N/\lambda_0)\,y - \omega t]] = \vec{E}_0 \exp(-\kappa y)\exp\left[i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0}\,y - \omega\, t\right)\right] \qquad (3)$$

$$\vec{E}(y,t) = \exp(-\kappa y)\,\vec{E}_0 \exp[i(k_0 y - \omega\, t)] ,$$

حيث $\lambda_0 = 2\pi\, c/\omega$ (c سرعة انتشار الضوء في الخلاء).

وهذا يعني أنّ الموجة المتوغلة في مادة الفلز المدروس تتخامد بمقدار $\exp(-\kappa y)$.

لدراسة حركة إلكترون واحد في الحقل الكهربائي للموجة الكهرطيسية المعطاة في نص السؤال يجب أن يكون استقطاب هذه الموجة، بحيث يقع الحقل $\vec{E}$ في الاتجاه x ومقدار الحقل $\vec{E}$ التابع للزمن، مساوياً $E_0\, e^{-i\omega t}$. وسيتحرك الإلكترون وفقاً لمعادلة الحركة:

$$m_e \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -e\,E_0\, e^{-i\omega t} . \qquad (4)$$

والحل المناسب للمعادلة (4) يكون من الشكل:

$$x(t) = A\exp(-i\omega t), \qquad (5)$$

حيث A مطال عقدي.

بالتعويض عن العلاقة (5) في المعادلة (4) نجد أنه فعلاً حلّ لها حيث:

$$\begin{aligned} & m_e \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -e\,E_0\exp(-i\omega t); \\ & m_e A(-i\omega)(-i\omega)\exp(-i\omega t) = -e\,E_0\exp(-i\omega t); \\ & m_e A(-i\omega)(-i\omega) = -e\,E_0 \Rightarrow \quad A = \frac{e\,E_0}{m_e\omega^2} \end{aligned} \qquad (6)$$

وبنتيجة تطبيق الحقل الكهربائي للموجة الكهرطيسية ينزاح الإلكترون من موقعه دورياً، مما يؤدي إلى تغيّر في عزم ثنائي القطب الكهربائي $-e\,x(t)$؛

ومن أجل جسم صلب بكثافة إلكترونات ناقلية، n، الاستقطاب المجهري، $p(t)$، الذي ينتج من عزوم ثنائيات- القطب هذه، يساوي:

$$p(t) = -ne\,x(t) = -neA\exp(-i\omega t) = -\frac{ne^2E_0\exp(-i\omega t)}{m_e\omega^2} . \qquad (7)$$

ونعلم من جهة أخرى، أنّ العلاقة العامة بين الحقل الكهربائي، E، وحقل الانزياح الكهربائي، D، تأخذ الشكل

$$D = \epsilon\epsilon_0 E = \epsilon_0 E + p \quad \Rightarrow \quad \epsilon\epsilon_0 E - \epsilon_0 E = p,$$
$$(\epsilon - 1)\epsilon_0 E = p \quad \Rightarrow \quad \epsilon - 1 = \frac{p}{\epsilon_0 E} \qquad (8)$$

ومن ثمَّ:

$$\epsilon = 1 + \frac{p(t)}{\epsilon_0 E_0 \exp(-i\omega t)} = 1 - \frac{1}{\epsilon_0 E_0 \exp(-i\omega t)} \frac{ne^2 E_0 \exp(-i\omega t)}{m_e \omega^2}. \qquad (9)$$

وباستخدام العلاقة الأخيرة والنتيجة التي حصلنا عليها من أجل الاستقطاب، العلاقة (7)، نحصل على علاقة حساب تابع العازلية:

$$\epsilon = 1 + \frac{p(t)}{\epsilon_0 E_0 \exp(-i\omega t)} = 1 - \frac{1}{\epsilon_0 E_0 \exp(-i\omega t)} \frac{ne^2 E_0 \exp(-i\omega t)}{m_e \omega^2} = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2};$$
$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

الذي يحوي ما يسمى تواتر البلازما، ω_p، والذي يُعطى بالعلاقة: $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}$.

أولاً– عندما يكون تواتر الموجة الكهرطيسية الواردة على سطح الفلز أقل من تواتر البلازما، $\omega < \omega_p$، يكون تابع العازلية، ϵ، **حقيقياً وسالباً**، ومن ثمَّ المقدار $\sqrt{\epsilon}$ **تخيلياً صرفاً** والعلاقة (3) تُمثِّل **تغلغلاً للموجة** في الفلز **متخامداً أُسَـيّاً**. وبشكل مكافئ، نرى بالنسبة لتابع العازلية، ϵ، **السالب**، أن قرينة الانكسار العقدية (1) تحوي المركبة **التخيلية**، $i\kappa$، **فقط**؛

لا يمكن لهذا التخامد أن يكون ناتجاً عن الضياعات اللامرنة، لأن العلاقة (4) لم تأخذ بالحسبان مثل هذه العمليات. وبما أن الضوء لم يخترق الفلز، والطاقة مُصانة، **فيجب أن ينعكس**.

ثانياً– عندما $\omega > \omega_p$، يكون تابع العازلية، ϵ، **حقيقياً وموجباً** والعلاقة (3) تُمثِّل موجةً ضوئيةً منتشرة في الفلز. تكمن حقيقة الأمر في أن الفلزات عاكسة للضوء ذي **التواتر المنخفض**، ولكنها تُصبح شفافةً من أجل الضوء ذي التواتر المرتفع. والانتقال هنا يحدث عند تواترٍ مساوٍ لتواتر البلازما.

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 30 درجة

لشرح فكرة عصابات الطاقة الإلكترونية من أجل بلّورتي الصوديوم Na والسيلكون Si، وتوضيح الفارق بين سلوكهما بالتفصيل والرسم نبدأ بدراسة ذرتي صوديوم، حيث تكون الحالة مشابهة لحالة جزيء هيدروجين، كما في الشكل (a):

- حالما تقترب الذرتان من بعضها البعض، تتشكل المدارات الجزيئية الرابطة وغير الرابطة.
- فكل ذرة صوديوم تمتلك إلكتروناً واحداً 3s ويتكيّف الإلكترونان في المدار الرابط؛ فهما يمتلكان سبينين **متعاكسين**، لكي يُحقّقان ستطلبات مبدأ باولي، الشكل (a)؛
- يوضح الشكل (b) موضع السويات الطاقية؛ كتابع للمسافة بين الذريّة، حيث تمّ وضع تدريج الطاقة عند الصفر من أجل المسافة البعيدة جداً بين الذرات.

فمن أجل المسافة a تصل السوية الرابطة إلى أخفض قيمة طاقية، وطالما أن السوية الرابطة فقط، تُشغل بإلكترونين، **فلا** يكون لطاقة الحالة غير الرابطة معنى وتزداد الطاقة المكتسبة من أجل المسافة a.

- لنأخذ الآن حالة أكثر من ذرتين:

في هذه الحالة، يؤدي تأثر الحالتين الذريتين إلى تشكّل سويتي طاقة تمتدان على كامل الجزيء.

والحالة هنا، تشابه الحالة الموافقة لوجود N ذرة؛

إذْ تتشطر السويات الطاقية الذرية-N إلى N سوية جزيئية غير متحللة.

وعندها يُسكن نصف هذا العدد، $\frac{1}{2}N$؛ كل منها بإلكترونين، كما يظهر في الشكل (c)، حيث تُطبّق المبادئ ذاتها من أجل عدد كبير جداً من السويات (N).

ويوجد هنا شبه- استمرارية للحالات الطاقية؛ بين أخفض سوية وأعلى سوية، حيث يكون نصفها ممتلئ، كما يظهر في الشكل (d).

تسمى شبه- الاستمرارية هذه **عصابة طاقة**.

يمكننا الآن، أن نرى وصفياً، لماذا يُبدي الصوديوم Na سلوكاً فلزياً؛

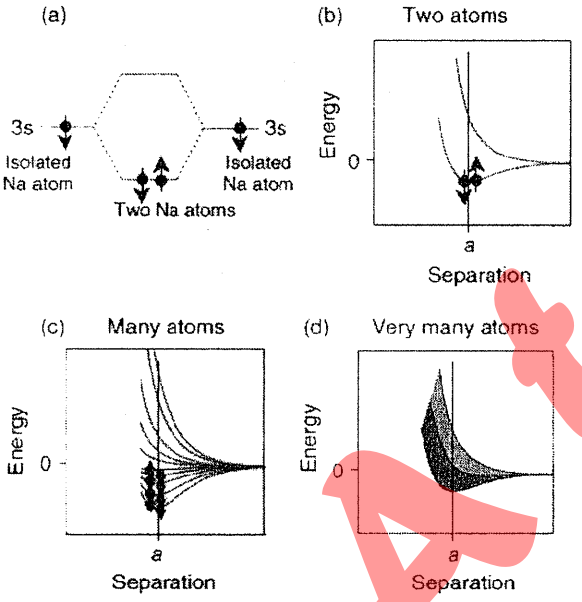
فنصف العصابة الطاقية لإلكترونات التكافؤ ممتلئ تماماً.

وعند تطبيق حقل كهربائي على عيّنة من Na، تتعرّض الإلكترونات لقوة معاكسة بالاتجاه لاتجاه الحقل، ولكي تتحرك في ذاك الاتجاه، يجب أن تزيد طاقتها الحركية قليلاً، أي يجب أن تذهب إلى حالة طاقية أعلى من حالتها التي كانت فيها قبل تطبيق الحقل الكهربائي بقليل.

وهذا ممكن بسهولة من أجل الإلكترونات المتوافرة في هذه الحالات الطاقية الأعلى المشغولة بها، بسبب وفرة الحالات الشاغرة ذات الطاقات الأعلى من طاقات الحالات المشغولة بقليل.

ولرؤية سلوك مختلف تماماً عن السلوك السابق، ندرس تشكّل عصابات طاقة في السيلكون:

فإلكترونات التكافؤ المنخرطة في الترابط، هي إلكترونان 3s وإلكترونان 3p؛ وحالما تقترب ذرات Si بعضها من البعض، تتهجّن المدارات وتُشكّل عصابتين من الحالات الطاقية **عند مسافة التوازن**، a، تحوي كل منها أربع حالات لكل ذرة Si، أي أن المجموع، ثمان حالات لكل ذرة؛ **اثنتان** منها، أُستمدّت من الحالات الذرية s **وستة** من الحالات الذرية p، على الترتيب.

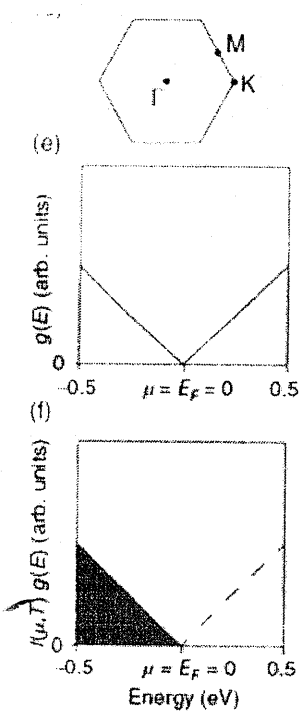


A to Z

تتألف العصابة الأخفض من المدارات sp^3 وهي مشغولة تماماً بإلكترونات التكافؤ الأربعة لكل ذرة Si، أمّا العصابة الأعلى، فهي شاغرة تماماً، وتوجد بينهما، منطقة طاقية خالية من الحالات، تسمى **فجوة عصابة الطاقة**.

وهذا ما يُفسّر السلوك العازل (من الناحية الكهربائية طبعاً) للسيلكون Si: فعند تطبيق جهد، لا تستطيع إلكترونات العصابة sp^3 الممتلئة أن تُزيد طاقتها الحركيّة بمقدارٍ صغيرٍ، لعدم وجود حالات شاغرة بطاقات أعلى منها بقليل، تستطيع الإلكترونات الانتقال إليها.

شرح البنية الترابطية والإلكترونية للغرافين:



يمتلك الكربون **أربعة إلكترونات تكافؤ** (اثنان 2s واثنان 2p)، ويمكن بلوغ الترابط في بنية "قرص العسل" للغرافين بصورة رئيسة بعملية تهجينٍ sp^2 بين الحالات s و $p_{x,y}$ لتشكيل روابط σ (سيغما) قوية، والمدارات p_z المتبقية، تخرج من المستوي وتُشكّل روابط π:

- كل ذرة كربون تُسهم في الروابط σ بثلاث إلكترونات وفي الرابطة π بإلكترون واحد. يمتلك الغرافين ذرتين في كل وحدة خلية، أي يمتلك ما مجموعه ستة إلكترونات σ وإلكترونين π.
- بمقدور الإلكترونات σ الستة أن تملأ ثلاث عصابات بشكلٍ كاملٍ (إلكترونان في كل عصابة) والإلكترونان π عصابة واحدة؛ يمكن رؤية ذلك في بنية عصابات الطاقة أيضاً.
- وبالنتيجة لدينا أربع **عصابات مشغولة تماماً**، ومن ثمَّ يمكن للغرافين أن يكون عازلاً/ نصف ناقل.
- الشيء الغريب والملفت للانتباه فيما خصَّ الغرافين يكمن في **عدم امتلاكه لفجوة طاقية** بين العصابة π المشغولة والعصابة π^* الشاغرة.
- تُصادف هذه العصابات في ركن المضلّع- السداسي تماماً، منطقة بريلوان ثنائية- البعد، حيث يسمى هذا الركن النقطة K (كَبّا)، كما في الشكل المجاور.
- يوضح الشكلان (e) و (f) كثافة الحالات وكثافة الحالات المشغولة بجوار طاقة فيرمي، E_F، على الترتيب:

→ فمن أجل الطاقات القريبة كفايةً من E_F، يكون التبدد لكل من العصابات π و π^* خطّياً، وإلى جانب حقيقة أن الغرافين ثنائي- البعد، نحصل على كثافة حالات تُعدُّ خطّيَةً كتابعٍ للطاقة.

→ تؤول هنا كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، E_F، إلى الصفر تماماً، غير أنه لا توجد فجوة طاقية.

→ إذا عرَّفنا معدناً بأنه مادة يقع الكمون الكيميائي (أو طاقة فيرمي) فيها عند طاقةٍ حيث تكون كثافة الحالات محدودةً، فإن **الغرافين ليس معدناً**.

ومن جهة أخرى، لا يمتلك الغرافين فجوة طاقية (منطقة محظورة) بين الحالات الطاقية الأعلى المشغولة والحالات الطاقية الأدنى الشاغرة، وهو ما يمكن إيجاده في حالة عازلٍ/ نصف ناقلٍ.

ومن ثمَّ يسمى الغرافين عادةً إمَّا **نصف فلزٍ** وإمَّا نصف ناقل بفجوة طاقية صفرية، لأن كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، E_F، تساوي الصفر، ولا توجد فجوة طاقية بين الحالات الطاقية الأعلى المشغولة والحالات الطاقية الأدنى الشاغرة.

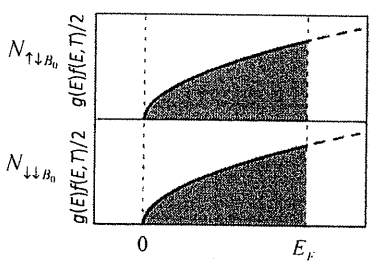
A to Z

توزيع الدرجات على جواب السؤال الثالث: 15 درجة

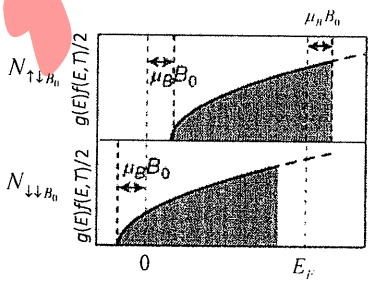
- تُبدي الإلكترونات الحرة سلوكاً بارامغناطيسياً: فإذا امتلك كلّ إلكترونٍ حرٍ سبيناً قيمته $\frac{1}{2}$ وعزماً مغناطيسياً μ_B، فمن المرجّح أن تشارك الإلكترونات الحرة في تمغنط الإشباع للجسم الصلب بقيمة تساوي حاصل ضرب μ_B في كثافة الإلكترونات.
- يتم بلوغ هذا الإشباع عند اصطفاف كل العزوم المغناطيسية بشكلٍ موازٍ للحقل الخارجي (أو اصطفاف السبينات بشكلٍ مسايرٍ للحقل). غير أن حقيقة الأمر ليست كذلك على الإطلاق والطواعيّة البارامغناطيسية للإلكترونات الحرة صغيرة جداً فعلياً.
- يمكن فهم الطواعيّة البارامغناطيسية لإلكترونات حرة وحسابها باستخدام الشكل المجاور:

جرى تصنيف الحالات المشغولة بإلكترونات حرة في الشكل (a) إلى فئتين: واحدة بعزومٍ مغناطيسيةٍ مسايرةٍ لحقل خارجي، B_0، وأخرى بعزومٍ مغناطيسيةٍ موازيةٍ له؛ افترض هنا أن يكون هذا الحقل الخارجي صفراً تقريباً.

- يُظهر الشكل (b) ماذا يحدث عند ازدياد B_0 حتى قيمة محدودة. ترفع الإلكترونات طاقتها أو تُخفِّضها بمقدار $\mu_B B_0$ تبعاً لاتجاه عزومها المغناطيسية بالنسبة لاتجاه الحقل الخارجي.
- بما أن μ_B صغير جداً، فإن هذا التغيّر الطاقي يكون صغيراً جداً، أياً يكن الحقل الخارجي الذي يمكن بلوغه، إذْ يبلغ هذا التغيّر نحو 10^{-5} eV، وهو أقل بكثير من الفاصل الطاقي بين قاع العصابة الطاقية وطاقة فيرمي.
- وبما أن هذا الانزياح حدث، فإن الإلكترونات التي انتقلت إلى ما فوق طاقة فيرمي تستطيع تخفيض طاقاتها بقلب سبيناتها حيث تُصبح الإلكترونات بعزمٍ مغناطيسيٍ موازٍ للحقل الخارجي، كما يوضح الشكل (c).
- وهذا يؤدي إلى توافر إلكترونات بعزمٍ مغناطيسيٍ موازٍ للحقل بعدد أكبر من عدد الإلكترونات المتوافرة بعزمٍ مغناطيسيٍ مسايرٍ له، أي أن هذا الانزياح يؤدي إلى استجابة بارامغناطيسية.

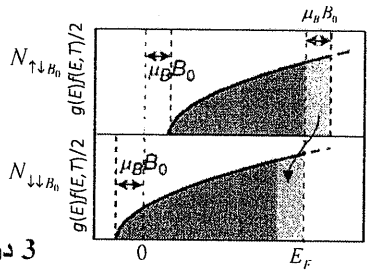


(a) لا يوجد حقل تقريباً



(b) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة

3 درجات



(c) يوجد حقل B_0 قيمته محدودة

A to Z

لإيجاد χ_m ، يجب أن نحدد كمية الإلكترونات التي تقلب سبيناتها لكي تمتلك عزماً مغناطيسياً موازياً للحقل الخارجي؛ تُمثَّل هذه الإلكترونات في الشكل (c) بالقطعة الرمادية الفاتحة حيث تبلغ مساحة كل قطعة $\frac{1}{2}g(E_F)\mu_B B_0$.

ولهذا السبب، يكون الفارق بين الإلكترونات التي عزومها المغناطيسية موازية للحقل وتلك التي عزومها مسايرة له مساوياً

$$N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0} = g(E_F)\mu_B B_0 ,$$

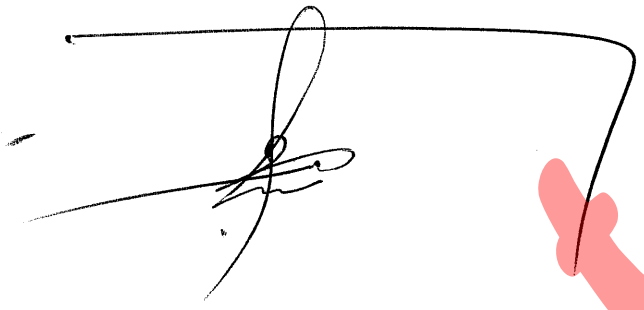
حيث تُشير الأسهم إمَّا إلى أن العزوم والحقل متوازية وإمَّا أنها متسايرة.

ومن ثمَّ يبلغ التمغنط المحصِّل: $$M = \frac{1}{V}\left(N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0}\right)\mu_B = \frac{1}{V}g(E_F)\mu_B^2 B_0 ,$$

ومن ثمَّ تُصبح علاقة الطواعيّة المغناطيسية، χ_m ، من الشكل: $$\chi_m = \frac{1}{V}\mu_0 \mu_B^2 g(E_F),$$

والتي قيمتها صغيرة، ومن نفس رتبة الطواعيّات الدايامغناطيسية.

فالحقل اللازم لصفّ كل السبينات لا يكفي أن يتحقق الشرط $\mu_B B_0 >> k_B T$ فقط، وإنما يجب أن تتحقق المتراجحة $\mu_B B_0 > E_F$ ، أي يجب أن يكون مقدار التغيّر الطاقي الذي تتعرض له الإلكترونات نتيجة تطبيق حقل خارجي أكبر من طاقة فيرمي أيضاً، وهو مقدار كبير جداً هنا. في حقيقة الأمر، تختلف بارامغناطيسية باولي عن بارامغناطيسية كيوري تماماً: ففي بارامغناطيسية كيوري، فعلياً يمكن بلوغ التمغنط القوي، لأن ما تحتاجه الطاقة المغناطيسية، فقط أن تكون أعلى بكثير من الطاقة الحرارية. أمَّا من أجل بارامغناطيسية باولي، فإنها بحاجة لأن تتجاوز طاقة فيرمي، وهذا أمر غير ممكن.



A to Z

جامعة طرطوس
كليّة العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2**
لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء
للعام الدراسي 2021-2022/الدورة الفصلية **الأولى**

الاسم:
المدة: **ساعتان**
الدرجة القصوى: **70**

السؤال الأول: (23 درجة)

لتفسير انعكاسية الفلزات (المعادن) نعتبر الضوء الوارد عليها موجة كهرطيسية مستوية عرضانية، تُعطى مركبة الحقل الكهربائي فيها لدى انتشارها في الاتجاه x بالعلاقة، $\vec{E}(x,t)=\vec{E}_0\, e^{i(kx-\omega t)}$ حيث $\vec{E}_0$ مطاله في المستوي (y,z) و $k=2\pi N/\lambda_0$ طويلة متجه الموجة (N قرينة الانكسار العقدية للوسط الفلزي)، والمطلوب:

1. كتابة علاقة قرينة الانكسار العقدية للوسط الفلزي وذكر المعنى الفيزيائي لقسميها بالتفصيل؛
2. كتابة علاقة تابع العازلية العقدي بدلالة قرينة الانكسار العقدية وذكر مدلول كل رمز فيها بالتفصيل؛
3. كتابة علاقة مركبة الحقل الكهربائي المعطاة بدلالة N و $\in$. **ماذا تستنتج؟**؛
4. كتابة معادلة الحركة للإلكترون في الفلز وحلها، علماً بأن الحقل يقع في الاتجاه y. **ماذا تستنتج؟**؛
5. إيجاد علاقة الاستقطاب الدقيق من أجل بلّورة فلزية بكثافة إلكترونات ناقلية، n؛
6. إيجاد علاقة تابع العازلية بدلالة تواتر الموجة الواردة عليها. **ناقش** الحالتين الحدّيتين. **ماذا تستنتج؟**.
7. عرّف تواتر البلازما ثمَّ وضّح ماذا يعني وقوعه في منطقة الإشعاع فوق البنفسجي البعيد من أجل الفلزات.

السؤال الثاني: (22 درجة)

تكمن إحدى الصفات المميزة والمهمة للفلزات (المعادن) في قدرتها على حجب الحقول الكهربائية:

أولاً– اشرح ماذا يُقصد بمفعول الحجب الفلزي مع كتابة العلاقات المناسبة.

ثانياً– صفْ وارسم شكل منحني كثافة الحالات المشغولة في درجة الصفر المطلق في حالتين؛ بعيداً عن الذرة الشائبة (الشحنة الموجبة المتناظرة كروياً) الموجودة في الفلز(المعدن) وقريباً منها؛ ثمَّ أحسب كثافة الشحنة المتراكمة في جوارها r، إذا علمت أن طاقتها الكامنة أقل بكثير من طاقة فيرمي.

ثالثاً– أوجد علاقة الكمون $\phi(r)$ بتطبيق معادلة بواسُون في الإحداثيات الكروية. **ماذا تستنتج؟**. ثمَّ ناقش علاقة طول حجب توماس– فيرمي.

السؤال الثالث: (10 درجة)

أولاً– عرّف بلوخ واذكر خصائصه. **ثانياً**– عرّف تقريب الربط المُحكم (الرابطة الشديدة). **ثالثاً**– اشرح مفهوم الكتلة الفعّالة بإيجاز واكتب العلاقة الموافقة لها.

السؤال الرابع: (15 درجة)

أولاً– ماذا يُقصد بمفعول ميّسنر. **ثانياً**– اشرح منشأ التمغنط الماكروسكوبي $\vec{M}$ في الناقل الفائق بالتفصيل مبيّناً أنّه مختلف تماماً عن منشأ التمغنط الماكروسكوبي في المواد الدايامغناطيسية العادية.

ثالثاً– اشرح الفرق ما بين مادة افتراضية تُصبح ناقلاً مثالياً بمقاومة نوعية تساوي الصفر تحت درجة الحرارة الحدّية T_c وناقلٍ فائقٍ حقيقي، يُظهر مفعول ميّسنر موضّحاً إجابتك بالرسم الدقيق.

ملاحظة: للرموز المستخدمة مدلولاتها الفيزيائية المعروفة

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2022/01/17

أ. د. **حسن عبد الكريم سليمان**

مكتبة A to Z

هالة صليبة (ا ع ر ف)
2022

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 23 درجة

$$N = n + i\kappa\,, \tag{1}$$

حيث n القسم الحقيقي لـ N و κ قسمه التخيلي:

يصف القسم الحقيقي، n، لقرينة الانكسار العقدية تغيّر طول الموجة في المادة ومن ثمَّ الانكسار عند السطح الفاصل، أمَّا القسم التخيلي، κ، فيُفسِّر التخامد الذي يحدث داخل المادة.

$$N = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{\epsilon_r + i\,\epsilon_i}\,, \tag{2}$$

حيث ϵ_r و ϵ_i القسمين الحقيقي والتخيلي لتابع العازلية العقدية، ϵ، على الترتيب.

تأخذ علاقة الحقل الكهربائي الموافقة الشكل الآتي:

$$\vec{\mathrm{E}}(x,t) = \vec{\mathrm{E}}_0\, \mathrm{e}^{\,i\left[(2\pi N/\lambda_0)x - \omega t\right]} = \vec{\mathrm{E}}_0\, \mathrm{e}^{-\kappa x}\, \mathrm{e}^{\,i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0}x - \omega t\right)} = \mathrm{e}^{-\kappa x}\, \vec{\mathrm{E}}_0\, \mathrm{e}^{\,i(k_0 x - \omega t)}\,, \tag{3}$$

حيث $\lambda_0 = 2\pi\, c/\omega$ (c سرعة انتشار الضوء في الخلاء).

وهذا يعني أنَّ الموجة المتغلغلة في المادة المدروسة تتخامد بمقدار $\mathrm{e}^{-\kappa x}$.

لدراسة حركة إلكترون واحد في الحقل الكهربائي للموجة الكهرطيسية المعطاة في نص السؤال يجب أن يكون استقطاب هذه الموجة، بحيث يقع الحقل $\vec{\mathrm{E}}$ في الاتجاه y ومقدار الحقل $\vec{\mathrm{E}}$ التابع للزمن، مساوياً $\mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t}$. وسيتحرك الإلكترون وفقاً لمعادلة الحركة:

$$m_e \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -e\, \mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\,. \tag{4}$$

والحل المناسب للمعادلة (4) يكون من الشكل:

$$y(t) = A\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\,, \tag{5}$$

حيث A مطال عقدي.

بالتعويض عن العلاقة (5) في المعادلة (4) نجد أنه فعلاً حلّ لها حيث:

$$\begin{aligned} & m_e \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -e\, \mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\,; \\ & m_e A(-i\omega)(-i\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t} = -e\, \mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\,; \\ & m_e A(-i\omega)(-i\omega) = -e\, \mathrm{E}_0 \Rightarrow \quad A = \frac{e\, \mathrm{E}_0}{m_e \omega^2} \end{aligned} \tag{6}$$

وبنتيجة تطبيق الحقل الكهربائي للموجة الكهرطيسية ينزاح الإلكترون من موقعه دورياً، مما يؤدي إلى تغيّرٍ في عزم ثنائي القطب الكهربائي $-e\, y(t)$؛

ومن أجل جسم صلب بكثافة إلكترونات ناقلية، n، الاستقطاب المجهري، $p(t)$، الذي ينتج من عزوم ثنائيات- القطب هذه، يساوي:

$$p(t) = -ne\, y(t) = -neA\, \mathrm{e}^{-i\omega t} = -\frac{ne^2 \mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t}}{m_e \omega^2}\,. \tag{7}$$

ونعلم من جهة أخرى، أنَّ العلاقة العامة بين الحقل الكهربائي، E، وحقل الانزياح الكهربائي، D، تأخذ الشكل

$$D=\epsilon\epsilon_0 E=\epsilon_0 E+p \;\Rightarrow\; \epsilon\epsilon_0 E-\epsilon_0 E=p,$$

$$(\epsilon-1)\epsilon_0 E=p \;\Rightarrow\; \epsilon-1=\frac{p}{\epsilon_0 E} \qquad (8)$$

ومن ثمَّ:

$$\epsilon=1+\frac{p(t)}{\epsilon_0 E_0 e^{-i\omega t}}=1-\frac{1}{\epsilon_0 E_0 e^{-i\omega t}}\frac{ne^2 E_0 e^{-i\omega t}}{m_e\omega^2}. \qquad (9)$$

وباستخدام العلاقة الأخيرة والنتيجة التي حصلنا عليها من أجل الاستقطاب، العلاقة (7)، نحصل على علاقة حساب تابع العازلية:

$$\epsilon=1+\frac{p(t)}{\epsilon_0 E_0 e^{-i\omega t}}=1-\frac{1}{\epsilon_0 E_0 e^{-i\omega t}}\frac{ne^2 E_0 e^{-i\omega t}}{m_e\omega^2}=1-\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e\omega^2}=1-\frac{\omega_P^2}{\omega^2},$$

الذي يحوي ما يسمى تواتر البلازما، ω_P، والذي يُعطى بالعلاقة: $\boxed{\omega_P^2=\frac{ne^2}{m_e\epsilon_0}}$.

أولاً– عندما تواتر الموجة الكهرطيسية أقل من تواتر البلازما، $\omega<\omega_P$، يكون تابع العازلية، ϵ، **حقيقياً وسالباً**، ومن ثمَّ المقدار $\sqrt{\epsilon}$ **تخيلياً صرفاً** والعلاقة (3) تُمثِّل **تغلغلاً للموجة** في الجسم الصلب **متخامداً أُسِّيّاً**. وبشكل مكافئ، نرى بالنسبة لتابع العازلية، ϵ، السالب، أن قرينة الانكسار العقدية (1) تحوي المركبة التخيلية، $i\kappa$، فقط. لا يمكن للتخامد أن يكون ناتجاً عن الضياعات اللامرنة، لأن العلاقة (4) لم تأخذ بالحسبان مثل هذه العمليات. وبما أن الضوء لم يخترق الجسم الصلب، والطاقة محفوظة، **فيجب أن ينعكس.**

ثانياً– عندما $\omega>\omega_P$، يكون تابع العازلية، ϵ، **حقيقياً وموجباً** والعلاقة (3) تُمثِّل موجةً ضوئيةً منتشرة في الفلز. تكمن حقيقة الأمر في أن الفلزات عاكسة للضوء ذي التواتر المنخفض، ولكنها تُصبح شفافةً من أجل الضوء ذي التواتر المرتفع. والانتقال هنا يحدث عند تواتر، يساوي تواتر البلازما.

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 22 درجة

لشرح مفعول الحجب ندرس في البداية كمون كولون الناتج عن شحنة نقطية موجبة، q، في الخلاء:

$$\phi_0(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad (1)$$

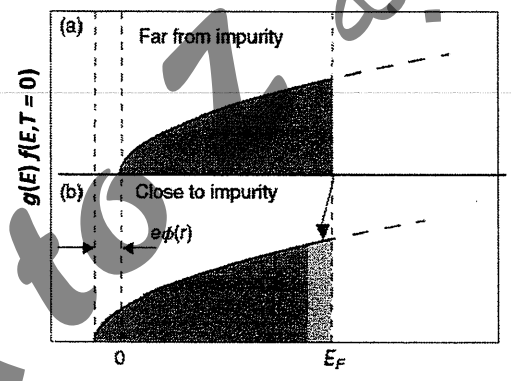
حيث r المسافة بدءاً من الشحنة.

لا تتغيّر هذه النتيجة كثيراً عندما نضع الشحنة النقطية في عازلٍ؛ إذْ علينا أن نستبدل ϵ_0 بـ $\epsilon\epsilon_0$ فقط، حيث ϵ ثابت العزل للعازل. فَينخفض الكمون الكليّ بمقدار العامل الثابت ϵ. ولكن، إذا وضعنا الشحنة النقطية الموجبة في فلزٍ، فإنها ستجذب الإلكترونات المحيطة بها حيث تكون هذه الإلكترونات حرة الحركة باتجاه الشحنة النقطية، **مما يؤدي** إلى ظهور غمامة إلكترونية سالبة حول الشحنة النقطية، **تُخفِّضُ الكمون الكليّ بشدة** عند المسافات الكبيرة. وهذا هو مفعول الحجب الفلزي الذي سنصفه الآن كميّاً.

لندرس الآن **شحنة نقطية موجبة في فلزٍ**، يُعطى كمونها بالعلاقة (1). هذا الكمون متناظر كروياً، ويؤدي إلى غمامة إلكترونية حول الذرة الشائبة، كمونها، $\phi_s(r)$، أيضاً متناظر كروياً. يُشير تراكب الكمونين إلى أن الكمون الكليّ يساوي

$$\boxed{\phi(r)=\phi_0(r)+\phi_s(r)}$$

إذا فرضنا أن الطاقة الكامنة، $e\phi(r)$، صغيرة بالمقارنة مع طاقة فيرمي، E_F، بحيث يتغيّر الكمون الكليّ، $\phi(r)$، ببطءٍ في الفراغ، وأن درجة الحرارة تساوي 0 K، فيمكن وصف الحجب بالصورة التي يوضحها الشكل المجاور؛ فبعيداً عن الشائبة حيث الكمون، $\phi(r)$، يساوي الصفر فعلياً، تمتلئ الحالات الشاغرة بالإلكترونات في الفلز حتى طاقة فرمي، ولكن بجوار الشائبة، "تشعر" الإلكترونات بطاقة كهركدة إضافية من $e\phi(r)$، بحيث تكون طاقات كل الحالات أقل. وهذا يوافق انزياحاً لكثافة الحالات نحو الطاقات الأخفّض (من أجل شحنة نقطية موجبة)؛ وبدوره يؤدي هذا الانزياح إلى حالةٍ، حيث تستطيع الإلكترونات الموجودة في الفلز، الانتقال إلى الحالات الطاقية الأخفّض المتاحة الواقعة بجوار الشائبة وإشغالها (الساحة الرمادية الفاتحة في الشكل) حتى بلوغ وضع التوازن. وعندها، تساوي كثافة الشحنة المتراكمة في جوار r إلى حاصل ضرب $e-$ في أبعاد الساحة الرمادية الفاتحة، مما يؤدي إلى المساواة: $\rho(r)=-e^2\frac{1}{V}g(E_F)\phi(r)$. (2)



يمكن الاعتقاد بأن هذا التدفق للشحنة **سيؤدي لانخفاض الشحنة** في باقي الفلز؛ وهذا أيضاً صحيح، ولكن حجم الجسم الصلب، أُفترض كبيراً جداً بالمقارنة مع المساحة حول الشائبة، بحيث يمكن إهمال هذا الانخفاض.

ثالثاً- بتطبيق معادلة بواسُون، $\nabla^2\phi(\vec{r})=-\rho(\vec{r})/\in_0$، واستخدام العلاقة (2) و كتابة مؤثر لابلاس، ∇^2، بالإحداثيات الكروية والاستفادة من أنَّ $\phi(\vec{r})$ يتعلق بالمسافة r فقط ولا يتعلق بالاتجاه، نحصل على العلاقة الآتية:

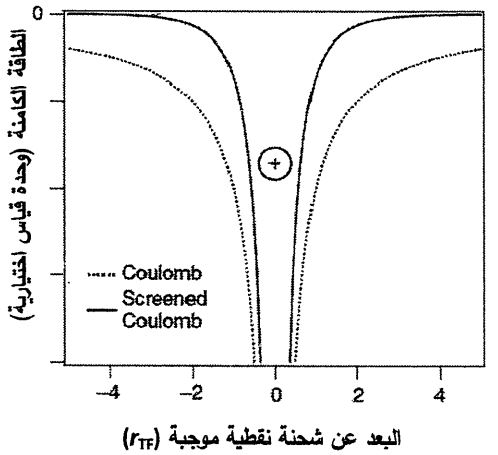
$$\nabla^2\phi(\vec{r})=\frac{\partial^2\phi(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}=\frac{e^2}{V\in_0}g(E_F)\phi(r). \qquad (3)$$

يأخذ حل هذه المعادلة التفاضلية الشكل الآتية: $\phi(r)=c\frac{1}{r}e^{r/r_{TF}}$, (4)

حيث c ثابت و r_{TF} مقدار، يسمى طول حجب توماس- فيرمي ويُعطى بالعلاقة $r_{TF}=\sqrt{V\in_0/e^2\,g(E_F)}$

يمكن تثبيت الثابت c في العلاقة (4) بأخذ علاقة كمون كولون غير المحجوب من أجل الشحنة النقطية الموجبة، $\phi_0(r)$، في العلاقة (1)، واستعادتها من أجل حالة، تؤول فيها كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، $g(E_F)$، إلى الصفر، أي عندما يُصبح الفلز مشابهاً للخلاء. ومن أجل $g(E_F)$ صغيرة، ستكون المسافة r_{TF} كبيرة جداً والتابع الأُسّي في العلاقة (4) **يبدو مساوياً للواحد**. ولذلك يجب أن نختار الثابت c بحيث تتحقق المساواة الآتية:

$$\phi(r)=\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r}e^{r/r_{TF}},$$



إنَّ قيمة r_{TF} في معظم الفلزات صغيرة جداً، من رتبة أنغستروم، ثم إنَّ القسم الأُسّي في العلاقة (6-25) **يجعل الكمون المحجوب** (كمون الحجب) يتناقص على مقياس الطول نفسه، بسرعة **أكبر بكثير من سرعة تناقص** كمون كولون غير المحجوب.

توزيع الدرجات على جواب السؤال الثالث: 10 درجة

أولاً- تابع **بلوخ** هو تابع موجي عام يُعدُّ حلاً لمعادلة شرودنغر ويصف حركة الإلكترونات في كمون شبكة بلّورية دورية غير متنهٍ ويُمثِّل موجة مستوية راحلة في الشبكة البلّورية سعتها متغيرة ودورية بدورية الشبكة البلّورية ويُعطى بالمساواة:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} ,$$

حيث $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ تابع دوري بدورية شبكة برافيه البلّورية ويساوي: $u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R}).$

ثانياً- تقريب الرابطة الشديدة:

هو تصميم لتابع موجة بلوخ يُمثَّل **بتركيبٍ خطّيٍ لمدارات ذرية** (LCAO) أي بدوالٍ موجيةٍ شديدة التوضع لذرات تؤلّف جسماً صلباً ويهدف إلى وصف بنيته الإلكترونية. وهو طريقة لحساب حالات الطاقة والدوال الموجية للإلكترونات في جسمٍ صلبٍ، يُفترض في الدالة الموجية فيه أن تساوي مجموع الدوال الموجية الذّريّة المركّزة على كل ذرة في الشبكة البلّورية، وأن تكون كل منها مضروبة بعامل الطَّور. وتصلح هذه الطريقة لمستويات الطاقة العميقة.

ثالثاً- هي معيار لتأثير كمون حقل الشبكة البلّورية على حركة حامل الشحنة الكهربائية وتُعطى بالعلاقة

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2 E(k)}{dk^2} \right)^{-1} .$$

وتعبّر عن تناسب الكتلة الفعّالة عكسياً مع تقوّس عصابات الطاقة.

مكتبة A to Z

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الرابع: 15 درجة

أولاً- يُعدُّ مفعول ميّسنر **خاصية** أساسية للناقل الفائق و**تكمن** في أن الناقل الفائق يُبدي دايامغناطيسية **مثالية**، أي أنه يمتلك طواعيّةً مغناطيسيةً تساوي سالب واحد، $\chi_m = -1$، ومن ثمَّ تمغنطاً، $\vec{M} = -\vec{B}_0 / \mu_0$، يلغي الحقل الخارجي، $\vec{B}_0$، داخل الناقل الفائق بالكامل.

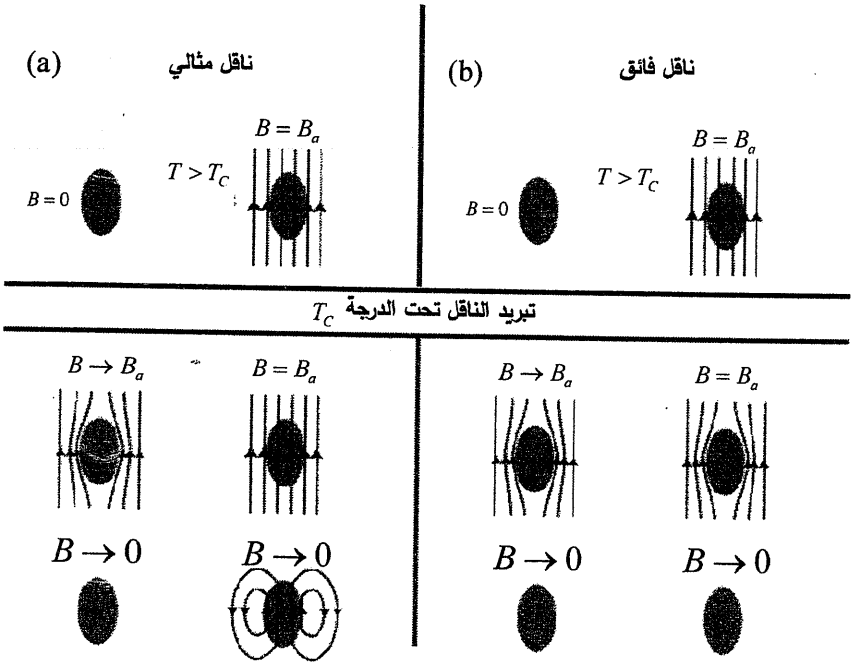
ثانياً- إن منشأ التمغنط الماكروسكوبي، $\vec{M}$، في الناقل الفائق مختلف تماماً عن التمغنط الماكروسكوبي في المواد الدايامغناطيسية العادية. فالدايامغناطيسية في المواد العادية تنتج من عزوم مغناطيسية ميكروسكوبية تتحرَّض بالحقل المغناطيسي الخارجي في كامل الجسم الصلب، أمَّا في ناقلٍ فائقٍ، فالتمغنط، $\vec{M}$، ينتج من تيارات فائقة ماكروسكوبية، تتدفق في الطبقة السطحية للعيّنة وتُبقي داخلها خالياً من الحقل المغناطيسي.

ثالثاً- من أجل ناقلٍ مثاليٍ، يُعطى كامل فيزياء هذا المفعول بقانون فاراداي بشكله التكاملي: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$، حيث يؤخذ التكامل على طول مسار مغلق في الناقل؛ لا يمكن لحقل كهربائي أن يتوافر على طول هكذا مسارٍ مغلقٍ من أجل ناقلٍ مثاليٍ الذي يعني أن كامل التكامل يتلاشى والتدفق المغناطيسي من خلال حلقة التكامل ثابت.

يوضح الشكل (a) المرافق هذا السلوك لناقلٍ مثاليٍ يقع في حقل مغناطيسي حيث:

نبدأ بعينتين تقعان فوق الدرجة الحدّية T_C، إحداهما تقع حقل مغناطيسي مطبق، $\vec{B}_a$، والأخرى في منطقة خالية منه؛ ثمَّ تُبرَّد كلتا العينتين إلى ما دون T_C، حيث تنخفض المقاومة النوعيّة للناقل المثالي حتى الصفر.

ثمَّ يُطبق حقل مغناطيسي على الناقل المثالي الذي كان سابقاً في منطقةٍ خاليةٍ منه (العيّنة الأولى) فنلاحظ أنَّ كامل الحقل يُطرد منه بسبب قانون فاراداي ويبقى القسم الداخلي من الناقل خالياً منه، أمَّا من أجل العيّنة الأخرى فلا يتغيّر شيئاً لأن الحقل كان قد تغلغل فيها قبل الانتقال إلى ما دون T_C (أي قبل التبريد).



لندرس الآن ناقلاً فائقاً حقيقياً يُبدي مفعول ميّسنر، كما يوضح الشكل (b):

من جديد نبدأ بعينتين في الحالة الطبيعية؛ واحدة من دون تغلغلٍ لحقل مغناطيسي والأخرى بوجود هذا الحقل.

بما أن العينتين تُبرَّدان إلى ما دون T_C، ففي كلتا الحالتين يُطرد الحقل المغناطيسي منهما، أي أنَّ داخل الناقل الفائق خاليٌ من الحقل، بصرف النظر عن تاريخ العيّنة.

A to Z مكتبة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر فيزياء الحالة الصلبة 2
لطلاب السنة الرابعة فيزياء
للعام الدراسي 2020-2021/الدورة التكميلية

الاسم:
المدة: ساعتان
الدرجة القصوى: 70

السؤال الأول: (27 درجة)

أولاً- عدّد فرضيات الأساسية لنموذج درودي ثمّ اشرحها بالتفصيل مع ذكر مرتبة القيم العددية للمتحولات المختلفة (من سرعة انسياق وسطية وزمن استرخاء، الخ) التي توضّح تلك الفرضيات.

ثانياً- من نتائج نموذج درودي نذكر تفسير الناقلية الكهربائية للمعادن في حالة التيار المستمر؛ والمطلوب دراسة سلوك الإلكترونات في المعادن عند تطبيق حقل كهربائي خارجي واستنتاج علاقات الناقلية والمقاومة النوعيتين والحركيّة (مع شرح ما يلزم).

السؤال الثاني: (23 درجة)

I. اشرح ما المقصود بنموذج الإلكترون الحر الكوانتي ووضّح كيفية معالجة الإلكترونات الحرة وفق هذا النموذج.

II. وضّح الفارق ما بين نموذج الإلكترون الحر ونموذج الرابطة الشديدة.

III. نفرض عند دراسة الحالات الذاتية الكوانتية في نموذج الإلكترون الحر أنه لدينا بلّورة معدنية على هيئة صندوق مكعب الشكل، طول ضلعه جهري، L. والمطلوب:

أولاً- كتابة علاقات كلٍ من الشروط الحديّة الدوريّة وحلول معادلة شرودنغر وسويات الطاقة بدلالة المتجه الموجي في الفراغ وذكر ماذا تُمثِّل.

ثانياً- رسم السويات الطاقية من أجل $n_y = n_z = 0$ بشكلٍ واضحٍ وكتابة التدريجات المناسبة على المحاور الإحداثية وشرح الرسم بالتفصيل.

ثالثاً- شرح طريقة إسكان الحالات الطاقية واستنتاج العلاقة التي تُحدِّد طاقة أعلى سوية مشغولة.

رابعاً- إيجاد علاقة كثافة الحالات من أجل نموذج الإلكترونات الحرة تُعطى بالعلاقة. ماذا تستنتج؟.

السؤال الثالث: (20 درجة)

أولاً- اشرح فكرة عصابات الطاقة الإلكترونية من أجل بلّورتَي الصوديوم Na والسيلكون Si، موضّحاً الفارق بين سلوكهما بالتفصيل ومستعيّناً بالرسم.

ثانياً- وضّح لماذا يُعدُّ الغرافين نصف معدنٍ.

ملاحظة: للرموز المستخدمة مدلولاتها الفيزيائية المعروفة

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2021/09/28

أ. د. حسن عبد الكريم سليمان

جامعة طرطوس	امتحان مقرر فيزياء الحالة الصلبة (2)	الاسم:
كلية العلوم	لطلاب السنة الرابعة فيزياء	المدة: ساعتان
قسم الفيزياء	للعام الدراسي 2020-2021/الدورة الامتحانية الثانية	الدرجة القصوى: 70

السؤال الأول: 30 درجة 27

تكمن إحدى الصفات المميزة والمهمة للمعادن في قدرتها على حجب الحقول الكهربائية؛ والمطلوب:

أولاً- شرح ماذا يُقصد بمفعول الحجب المعدني مع كتابة العلاقات المناسبة.

ثانياً- وصف شكل منحني كثافة الحالات المشغولة في درجة الصفر المطلق ورسمه في حالتين؛ بعيداً عن الذرة الشائبة الموجودة في المعدن وقريباً منها، ثمَّ حساب كثافة الشحنة المتراكمة في جوارها r، إذا علمت أن طاقتها الكامنة أقل بكثير من طاقة فيرمي.

ثالثاً- إيجاد علاقة الكمون $\phi(r)$ بتطبيق معادلة بواسون في الإحداثيات الكروية. ماذا تستنتج؟

رابعاً- مناقشة علاقة طول حجب توماس- فيرمي بالتفصيل.

السؤال الثاني: 31 درجة 23

أولاً- عرّف تابع بلوخ واذكر خصائصه. **ثانياً-** ماذا يُقصد بعبارة "تقريب الرابطة الشديدة".

ثالثاً- اشرح ماذا تصف المعادلة $E(\vec{k}) = E_n - \beta - \sum_{\vec{R}\neq 0} \gamma(\vec{R}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$ وأوجد علاقة عصابات الطاقة من أجل سلسلة ذريّة أحادية البعد علماً بأن عملية الجمع في العلاقة المعطاة تقتصر على أقرب المجاورات لذرة ما ثمَّ ناقش النتيجة التي تحصل عليها وارسم شكل العصابات الطاقية الناتجة s و p من أجل قيمتين لـ k في مركز منطقة بريلوان وعند حدودها.

رابعاً- ما هي العوامل التي تؤثر في العرض الطاقي المطلق للعصابات الطاقية.

خامساً- ما الفارق بين التابعين الموجيين $\psi(+)$ و $\psi(-)$ وماذا يُميِّل كل منهما.

السؤال الثالث: 20 درجة

أولاً- اشرح ماذا يُقصد بمفعول ميسنر.

ثانياً- اشرح منشأ التمغنط الماكروسكوبي $\vec{M}$ في الناقل الفائق بالتفصيل مبيّناً أنّه مختلف تماماً عن منشأ التمغنط الماكروسكوبي في المواد الدايامغناطيسية العادية.

ثالثاً- اشرح الفرق ما بين مادة افتراضية تُصبح ناقلاً مثالياً بمقاومة نوعية تساوي الصفر تحت درجة الحرارة الحدّية T_c وناقلٍ فائقٍ حقيقي، يُظهر مفعول ميسنر موضّحاً إجابتك بالرسم الدقيق.

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2021/08/09

أ. د. حسن عبد الكريم سليمان

مركز تصوير كلية العلوم

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 25 درجة

يُعبَّر كمون كولون الناتج عن شحنة نقطية موجبة، q، في الخلاء بالعلاقة $\phi_0(r) = q/4\pi \in_0 r$ حيث r المسافة بدءاً من الشحنة. درجتان

وعندما نضع الشحنة النقطية في عازلٍ علينا أن نستبدل $\in_0$ بـ $\in \in_0$ فقط، حيث $\in$ ثابت العزل للعازل.

فينخفض الكمون الكليّ بمقدار العامل الثابت $\in$. درجة واحدة

ولكن، إذا وضعنا الشحنة النقطية الموجبة في معدنٍ، فإنها تجذب الإلكترونات المحيطة بها؛ وبشكلٍ مخالفٍ تماماً لحالة وضعها في عازلٍ؛ تكون هذه الإلكترونات حرة الحركة باتجاه الشحنة النقطية؛

وهذا يؤدي إلى ظهور غمامة إلكترونية سالبة حولها، تُخفِّضُ الكمون الكليّ بشدة عند المسافات الكبيرة. درجتان

وهذا هو مفعول الحجب المعدني الذي سنصفه الآن كمياً.

لندرس شحنة نقطية موجبة في معدن، يُعطى كمونها بالعلاقة السابقة $\phi_0(r) = q/4\pi \in_0 r$:

هذا الكمون متناظر كروياً، ويؤدي إلى غمامة إلكترونية حول الذرة الشائبة، كمونها، $\phi_s(r)$، متناظر كروياً أيضاً.

يُشير تراكب الكمونين إلى أن الكمون الكليّ يساوي $\phi(r) = \phi_0(r) + \phi_s(r)$.

إذا فرضنا أن الطاقة الكامنة، $e\phi(r)$، صغيرة بالمقارنة مع طاقة فيرمي، E_F، بحيث يتغيّر الكمون الكليّ، $\phi(r)$، ببطءٍ في الفراغ، وأن درجة الحرارة تساوي $0\,K$، فيمكن وصف الحجب بالصورة التي يوضحها الشكل المجاور. ثلاث درجات

فبعيداً عن الشائبة حيث الكمون، $\phi(r)$، يساوي الصفر فعلياً، تمتلئ الحالات الفارغة من الإلكترونات في المعدن حتى طاقة فيرمي، ولكن بجوار الشائبة، تمتلئ

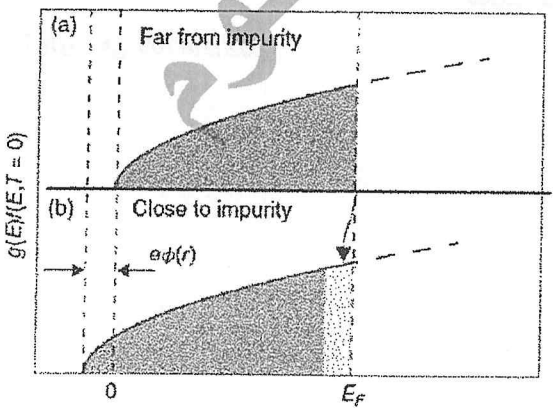
"تشعر" الإلكترونات بطاقة كهرساكنة إضافية من $e\phi(r)$؛ بحيث تكون طاقات كل الحالات أقل.

وهذا يوافق انزياحاً لكثافة الحالات نحو الطاقات الأخفض (من أجل شحنة نقطية موجبة)؛ ثلاث درجات

وبدوره يؤدي هذا الانزياح إلى حالةٍ، حيث بمقدور الإلكترونات الساكنة في المعدن، الانتقال إلى الحالات الطاقية الأخفض المتاحة الواقعة بجوار الشائبة وإشغالها (الساحة الرمادية الفاتحة في الشكل) حتى بلوغ وضع التوازن.

وعندها، تساوي كثافة الشحنة المتراكمة في جوار r إلى حاصل ضرب $-e$ في أبعاد الساحة الرمادية الفاتحة، مما يؤدي إلى المساواة $\rho(r) = -e^2 \frac{1}{V} g(E_F)\phi(r)$. ثلاث درجات

يمكن الاعتقاد بأن هذا التدفق للشحنة سيؤدي لانخفاض الشحنة في باقي المعدن؛ وهذا أيضاً صحيح، ولكن حجم الجسم الصلب، أفترض كبيراً جداً بالمقارنة مع المساحة حول الشائبة، بحيث يمكن إهمال هذا الانخفاض. درجة واحدة



على الرغم من أننا نعرف الآن كثافة الشحنة المتولّدة بالكمون الكليّ، إلاّ أننا ما نزال نجهل الكمون.

والذي يمكننا إيجاده بتطبيق معادلة بواسون، $\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\in_0$، واستخدام علاقة الكمون.

وبما أن الكمون يتصف بالتناظر الكروي، فإن كل شيء يتعلق

بالمسافة، r، فقط ولا توجد تابعية زاوية لهذا الكمون؛ فأفضل طريقة لحل المسألة المطروحة تكمن في كتابة مؤثر لابلاس، ∇^2، في **الإحداثيات الكروية** والاستفادة من كون $\phi(\vec{r})$ يتعلق بالمسافة r فقط ولا يتعلق بالاتجاه.

في هذه الحالة، نحصل على العلاقة الآتية: ثلاث درجات

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{\partial^2\phi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = \frac{e^2}{V\in_0} g(E_F)\phi(r). \qquad (1)$$

والآن يجب إيجاد حلٍ لهذه المعادلة التفاضلية، حيث ليس صعباً أن نجد أن العلاقة الآتية (من خلال التعويض عنها في المعادلة (1)) هي حل لها:

$$\phi(r) = c\frac{1}{r}e^{r/r_{TF}}, \qquad (2)$$

حيث c ثابت و r_{TF} مقدار، يسمى **طول حجب توماس- فيرمي** ويُعطى بالعلاقة الآتية: ثلاث درجات

$$r_{TF} = \sqrt{\frac{V\in_0}{e^2\, g(E_F)}}. \qquad (3)$$

يمكن تثبيت الثابت c في العلاقة (2) بأخذ علاقة كمون كولون **غير المحجوب** من أجل الشحنة النقطية الموجبة، $\phi_0(r)$، في علاقة الكمون، واستعادتها من أجل حالة، تؤول فيها كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، $g(E_F)$، إلى الصفر، أي عندما يُصبح المعدن مشابهاً للخلاء.

ومن أجل $g(E_F)$ صغيرة، ستكون المسافة r_{TF} كبيرة جداً والتابع الأُسّي في العلاقة (2) يبدو مساوياً للواحد.

ولذلك يجب أن نختار الثابت c بحيث تتحقق المساواة: درجتان

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r}e^{r/r_{TF}}, \qquad (4)$$

التي تُعدُّ نتيجةً نهائيةً.

قيمة r_{TF} في معظم المعادن صغيرة جداً، من رتبة $1\,\text{Å}$، فضلاً عن أن القسم الأُسّي في العلاقة (4) يجعل الكمون المحجوب (كمون الحجب) يتناقص على نفس تدريج الطول، أكبر بكثير من سرعة تناقص كمون كولون غير المحجوب.

وهذا يؤكد النتيجة المتوقعة، التي تنص على حدوث حجب الكمون الكهرساكن في المعدن بسرعة كبيرة جداً. درجتان

في الواقع، يمكن استخدام الحجب الفعّال، كإثبات لكي نفسّر لماذا تكون الإلكترونات حرة داخل المعدن في المقام الأول؛ فبحجب فعّال كهذا، من غير الممكن جعل الإلكترونات تتموضع بجوار كمون الأيون، لأن الكمون الأيوني المحجوب ضعيف جداً.

درجتان

مركز تصوير كلية العلوم

أولاً– تابع بلوخ واذكر خصائصه: 6 درجات

- تابع **بلوخ** هو تابع موجي عام يُعدُّ حلاً لمعادلة شرودنغر
- ويصف حركة الإلكترونات في كمون شبكة بلّورية دورية غير متنهٍ
- ويُمثِّل موجة مستوية راحلة في الشبكة البلّورية سعتها متغيرة ودورية بدورية الشبكة البلّورية
- ويُعطى بالمساواة:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

حيث $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ تابع دوري بدورية شبكة برافيه البلّورية ويساوي:

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R}).$$

ثانياً– "تقريب الرابطة الشديدة":

هو تصميم لتابع موجة بلوخ يُمثَّل **بتركيبٍ خطّيٍ لمدارات ذرية** (LCAO) أي بتوابع موجية شديدة التوضع لذرات تؤلّف جسماً صلباً ويهدف إلى وصف بنيته الإلكترونية.

ثالثاً–

- تصف المعادلة المعطاة كيف تتحوّل السويات الذرّية، E_n، إلى عصابة طاقية عند انتظام الذرات في شبكة بلوريّة.
- إن عملية الجمع في المعادلة المعطاة تقتصر فقط على أقرب المجاورات لذرة، عند $+a$ و $-a$: وبما أن **التوابع الموجية الذرّية-s متناظرة كروياً**، فإن $\gamma_s = \gamma(-a) = \gamma(a)$، وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد:

$$E_s(\vec{k}) = E_s - \beta_s - \gamma_s\left(e^{ika} + e^{-ika}\right) = E_s - \beta_s - 2\gamma_s \cos ka,$$

- حيث β_s هي قيمة β المحسوبة من أجل هذه العصابة-s.

تُمثِّل المعادلة الأخيرة **العصابة الطاقية الأدنى** للجسم الصلب المدروس والشكل المبين أدناه يوضح شكلها.

ويمكن مناقشة هذه النتيجة كما يأتي:

- فالعصابة-s تملك أدنى طاقة عند النقطة $k=0$ وأقصى طاقة عند النقطة $k=\pi/a$، أي أنها تقع في حدود منطقة بريلوان الأولى.
- نلاحظ أن التبدد الذي يظهر في الشكل المبين أدناه وبطبيعة الحال في المعادلة الأخيرة مشابة جداً للعصابة الطاقية الأدنى المحسوبة في **تقريب الإلكترون شبه– الحر.**
- مركز العصابة-s هنا منزاح عن الطاقة الذرّية E_s بمقدار $-\beta_s$، وعادةً يكون هذا الانزياح صغيراً جداً.
- يُعدُّ تعميم هذه النتيجة لتشمل سويات طاقة ذريّة أخرى بسيطاً، والشكل المبين أدناه يوضح أيضاً نتيجة الحساب من أجل العصابة الطاقية التالية، الناتجة من **السوية الذّريّة-p**. ونرى مرةً أخرى، أن هذه العصابة مشابهة جداً لنتيجة تقريب الإلكترون شبه– الحر.

وجدنا أيضاً فجوة عصابة طاقية عند النقطة $k=\pi/a$: تُحدد أبعادها:

- بالفاصل الطاقي بين السويات-s والسويات-p، والفارق بين الانزياحين β_s و β_p، وعرض العصابتين الطاقيتين.

يمكن عرض العوامل التي تؤثر في العرض الطاقي المطلق لعصابة من العصابات الطاقية في نموذج البعد الواحد، الذي ندرسه هنا وفق الآتي: يُعطى العرض الطاقي بالكمية $2\gamma_s$، حيث ينشأ

← **العامل 2** من عدد المجاورات الأقرب للذرة المعطاة؛

← **والحدّ** γ_s من تراكب التوابع الموجية والكمون.

- فالعدد التساندي العالي للذرات، الذي يكون متوافراً عادةً في **البنيات المتراصة** للمعادن، ينتج عرض عصابة طاقة كبيراً.
- ولقيمة γ_s أهمية أكبر في تحديد عرض العصابة الطاقية عادةً بسبب التناقص الشديد جداً للتوابع الموجية عند ابتعادها عن النواة.

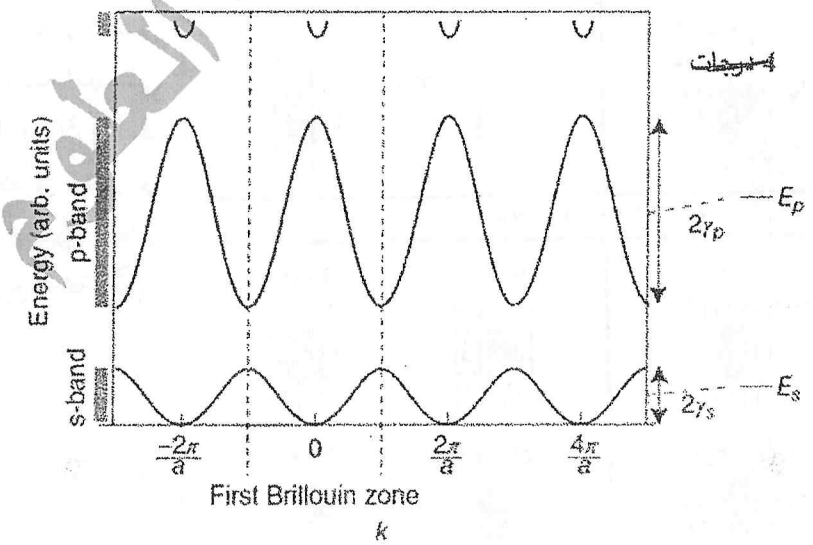
← فمن أجل بنية ما معطاة، سيؤدي تابع موجي ذرّي ما متوضّع بشدة بجوار النواة إلى عصابة طاقة أضيق بشكل ملحوظ من عصابة الطاقة التي يؤدي إليها تابع موجي أقل توضّعاً.

← فعلى سبيل المثال: تؤدي **سوية ذرية-3d** إلى عصابة طاقة أضيق بكثير من تلك العصابة التي تؤدي إليها **السوية-4s**، على الرغم من أن السويات الذرّية متشابهة جداً بالطاقة.

- ثمة حالة حدّية لتابع موجي متوضّع، تتمثل في السوية الداخلية (1s) لذرة ثقيلة: فالتوابع الموجية 1s للذرات المتجاورة لا تتراكب على الإطلاق في الجسم الصلب **والعصابة-1s الناتجة**، تمتلك عرضاً قريباً من الصفر، أي أنها مستوية بالكامل؛ إذْ تحتفظ بسلوكها الذرّي المتوضّع.

خامساً- يوافق التابع الموجي $\psi(+)$ الذي يمتلك الطاقة الأخفض، عند النقطة $k=\pi/a$، التابع الموجي s، الذي يتفق هنا مع تراكم الكثافة الاحتمالية بالقرب من القلوب الأيونية.

أمّا التابع الموجي $\psi(-)$ الذي يؤدي إلى الحالة الطاقية الأعلى عندما $k=\pi/a$، ذات عقدة الكثافة الاحتمالية عند القلوب الأيونية فيوافق التابع الموجي p، الذي يمتلك عقدةً هنا أيضاً.



توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثالث: 20 درجة

أولاً- يُعدُّ مفعول ميسنر خاصيةً أساسية للناقل الفائق وتكمن في أن **الناقل الفائق** يُبدي دايامغناطيسية مثالية، أي أنه يمتلك طواعيةً مغناطيسيةً تساوي سالب واحد، $\chi_m = -1$ ، ومن ثمَّ تمغنطاً، $\vec{M} = -\vec{B}_0 / \mu_0$ ، يلغي الحقل الخارجي، $\vec{B}_0$ ، داخل الناقل الفائق بالكامل. (3)

ثانياً- إن منشأ التمغنط الماكروسكوبي، $\vec{M}$ ، في الناقل الفائق مختلف تماماً عن التمغنط الماكروسكوبي في المواد الدايامغناطيسية العادية. فالدايامغناطيسية في المواد العادية تنتج من عزوم مغناطيسية ميكروسكوبية تتحرّض بالحقل المغناطيسي الخارجي في كامل الجسم الصلب، أمّا في ناقلٍ فائقٍ، فالتمغنط، $\vec{M}$ ، ينتج من تيارات فائقة ماكروسكوبية، تتدفق في الطبقة السطحية للعيّنة وتُبقي داخلها خالياً من الحقل المغناطيسي. (3)

ثالثاً- من أجل ناقلٍ مثاليٍ، يُعطى كامل فيزياء هذا المفعول بقانون فاراداي بشكله التكاملي: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$,

حيث يؤخذ التكامل على طول مسار مغلق في الناقل؛ لا يمكن لحقل كهربائي أن يتوافر على طول هكذا مسار مغلق من (1) أجل ناقلٍ مثاليٍ الذي يعني أن كامل التكامل يتلاشى والتدفق المغناطيسي من خلال حلقة التكامل ثابت. (2)

يوضح الشكل (a) المرافق هذا السلوك لناقلٍ مثاليٍ يقع في حقل مغناطيسي حيث:

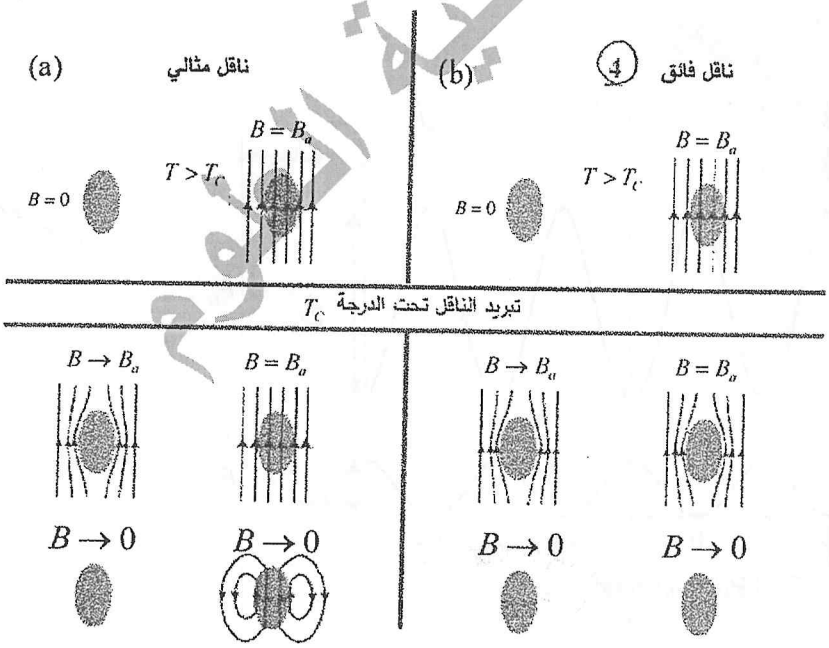
نبدأ بعينتين تقعان فوق الدرجة الحدّية T_C ، إحداهما تقع في حقل مغناطيسي مطبق، $\vec{B}_a$ ، والأخرى في منطقة خالية منه؛ (1)

ثمَّ تُبرَّد كلتا العينتين إلى ما دون T_C ، حيث تنخفض المقاومة النوعيّة للناقل المثالي حتى الصفر. (1)

ثمَّ يُطبق حقل مغناطيسي على الناقل المثالي الذي كان سابقاً في منطقةٍ خاليةٍ منه (العيّنة الأولى) فنلاحظ أنَّ كامل الحقل يُطرد منه بسبب قانون فاراداي ويبقى القسم الداخلي من الناقل خالياً منه، أمّا من أجل العيّنة الأخرى فلا يتغيّر شيئاً لأن الحقل كان قد تغلغل فيها قبل الانتقال إلى ما دون T_C (أي قبل التبريد). (2)

لندرس الآن ناقلاً فائقاً حقيقياً يُبدي مفعول ميسنر، كما يوضح الشكل (b):

- من جديد نبدأ بعينتين في الحالة الطبيعية؛ واحدة من دون تغلغلٍ لحقل مغناطيسي والأخرى بوجود هذا الحقل.
- بما أن العينتين تُبرَّدان إلى ما دون T_C ، ففي كلتا الحالتين يُطرد الحقل المغناطيسي منهما، أي أنَّ داخل الناقل الفائق خاليٌ من الحقل، بصرف النظر عن تاريخ العيّنة. (2)



موقع تصوير كلية العلوم

جامعة طرطوس كليّة العلوم قسم الفيزياء	امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2** لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء للعام الدراسي 2020-**2021**/الدورة الفصلية **الأولى**	الاسم: - المدة: الدرجة صوى

السؤال الأول: (30 درجة)

أولاً- اشرح الفرضيات الأساسية لنموذج درودي بالتفصيل مع ذكر مرتبة القيم العددية للمتحولات المختلفة (من سرعة انسياق وسطية وزمن استرخاء، الخ) التي توضّح تلك الفرضيات.

ثانياً- من نتائج نموذج درودي نذكر تفسير الناقلية الكهربائية للمعادن في حالة التيار المستمر؛ والمطلوب دراسة سلوك الإلكترونات في المعادن عند تطبيق حقل كهربائي خارجي واستنتاج علاقات الناقلية والمقاومة النوعيتين والحركيّة (مع شرح ما يلزم).

السؤال الثاني: (22 درجة)

I. اشرح ما المقصود بنموذج الإلكترون الحر الكوانتي ووضّح كيفية معالجة الإلكترونات الحرة وفق هذا النموذج.

II. نفرض عند دراسة الحالات الذاتية الكوانتية في نموذج الإلكترون الحر أنه لدينا بلّورة معدنية على هيئة صندوق مكعب الشكل، طول ضلعه جهري، L، **والمطلوب:**

أولاً- كتابة علاقات كلٍ من الشروط الحديّة الدوريّة وحلول معادلة شرودنغر وسويات الطاقة بدلالة المتجه الموجي في الفراغ وذكر ماذا تُمثِّل.

ثانياً- رسم السويات الطاقية من أجل $n_y = n_z = 0$ بشكلٍ واضحٍ وكتابة التدريجات المناسبة على المحاور الإحداثية وشرح الرسم بالتفصيل.

ثالثاً- شرح طريقة إسكان الحالات الطاقية واستنتاج العلاقة التي تُحدِّد طاقة أعلى سوية مشغولة.

رابعاً- إيجاد علاقة كثافة الحالات من أجل نموذج الإلكترونات الحرة، ماذا تستنتج؟.

السؤال الثالث: (18 درجة)

أولاً- اشرح ماذا يُقصد بمفعول ميّسنر.

ثانياً- اشرح منشأ التمغنط الماكروسكوبي $\vec{M}$ في الناقل الفائق بالتفصيل مبيّناً أنّه مختلف تماماً عن منشأ التمغنط الماكروسكوبي في المواد الدايامغناطيسية العادية.

ثالثاً- اشرح الفرق ما بين مادة افتراضية تُصبح ناقلاً مثالياً بمقاومة نوعية تساوي الصفر تحت درجة الحرارة الحدّية T_c وناقلٍ فائقٍ حقيقيٍ، يُظهر مفعول ميّسنر موضّحاً إجابتك بالرسم الدقيق.

ملاحظة: للرموز المستخدمة مدلولاتها الفيزيائية المعروفة

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2021/01/24

أ. د. **حسن عبد الكريم سليمان**

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2**
لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء
للعام الدراسي 2019-2020/الدورة الفصلية **الثانية**

الاسم:
المدة: **ساعتان**
الدرجة القصوى: **70**

السؤال الأول: (40 درجة)

عند دراسة الطواعية المغناطيسية الطرديّة لإلكترونات الناقلية الكهربائية لمعدن وفق نظرية الإلكترونات الحرة فرضنا درجة حرارته صفر كلفن حيث تكون جميع الحالات ذات الطاقة الدنيا مشغولة بإلكترونين متعاكسين بالسبين عندما $B=0$.

أولاً- ما هي محصِّلة العزم المغناطيسي للغاز الإلكتروني في هذه الحالة؟. وماذا يمثِّل المخطط البياني لتحولات كثافة الحالات الطاقية بقسميّه؟.

ثانياً- ماذا يحصل لطاقة الإلكترونات وتعدادها في كل جزءٍ من المخطط البياني المذكور أعلاه عندما $\vec{B}\neq 0$ ؟. وضّح ذلك بالتفصيل مستعيناً بالرسم الدقيق.

ثالثاً- يُعطى تمغنط وحدة حجم المعدن الناتج من تدوير السبينات بالعلاقة $M=\mu_B\left(n_+-n_-\right)$. أثبت أنه يمكن كتابتها بالشكل $M=\mu_B^2\,B\,N(E)$ (مع مناقشتها)، علماً بأن $N(E_F)=\frac{3n}{2E_F}=\frac{3n}{2k_BT_F}$ و $-\frac{\partial f}{\partial E}=\delta(E-E_F)$.

رابعاً- أوجد استناداً إلى المعطيات الواردة في الطلب **ثالثاً** علاقة الطواعية المغناطيسية وناقشها بالتفصيل.

السؤال الثاني: (30 درجة)

أولاً- عرّف تابع بلوخ واذكر خصائصه. **ثانياً**- ماذا يُقصد بعبارة "تقريب الرابطة الشديدة".

ثالثاً- **اشرح** ماذا تصف المعادلة $E(\vec{k})=E_n-\beta-\sum_{\vec{R}\neq 0}\gamma(\vec{R})e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$ وأوجد علاقة عصابات الطاقة من أجل سلسلة ذريّة أحادية البعد علماً بأن عملية الجمع في العلاقة المعطاة تقتصر على أقرب المجاورات لذرةٍ ما ثمَّ ناقش النتيجة التي تحصل عليها وارسم شكل العصابات الطاقية الناتجة s و p من أجل قيمتين لـ k في مركز منطقة بريلوان وعند حدودها.

رابعاً- ما هي العوامل التي تؤثر في العرض الطاقي المطلق للعصابات الطاقية.

خامساً- ما الفارق بين التابعين الموجيين $\psi(+)$ و $\psi(-)$ وماذا يُمثِّل كل منهما.

ملاحظة: للرموز المستخدمة مدلولاتها الفيزيائية المعروفة

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2020/08/17

أ. د. حسن عبد الكريم سليمان

سلم توزيع الدرجات على أجوبة مقرر فيزياء الحالة الصلبة 2

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 40 درجة

أولاً– يكون العزم المغناطيسي المحصّل للغاز الإلكتروني مساوياً للصفر ويمثّل المخطط البياني لتحولات تابع كثافة الحالات الطاقية $N(E)$ بدلالة الطاقة E قطعاً مكافئاً مشغولاً تماماً حتى سويّة فيرمي. درجتان + درجتان

ثانياً– 17 درجة

عندما $\vec{B}\neq 0$ **تتناقص** طاقات الإلكترونات التي **سبيناتها توازي** الحقل المغناطيسي المطبّق بمقدار $\mu_B B$ ، درجتان

لأن الطاقة الكامنة الناتجة عن تطبيق حقل مغناطيسي خارجي $\vec{B}$ تُعطى بالعلاقة $U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$: درجتان

وعندما يوازي $\vec{\mu}_e$ الحقل $\vec{B}$ تكون الزاوية بينهما صفراً ومن ثمّ: $U'=-\mu B$ حيث $\mu_e=\mu_B$ (μ_B مغناطون بور) في حالة إلكترون واحد. درجتان

أمّا الإلكترونات ذات **السّبين المعاكس** للحقل المغناطيسي المطبّق **فتزداد** طاقاتها بنفس المقدار السابق $U''=+\mu B$.

وهذا ما يؤدي إلى انزياح منحنيي كثافة الحالات الطاقية ذات السّبين الموازي للحقل المغناطيسي والسّبين المعاكس له بالنسبة لبعضهما البعض بكميّة طاقيّة مقدارها $2\mu B$ (أي يؤدي إلى ظهور فرق في سويتي فيرمي يساوي $E''_F-E'_F=2\mu B$)، كما يوضح الشكل (b): 5 درجات

- إن عدد الإلكترونات في كل توزّع لن يبقى ثابتاً، لأن ذلك يستوجب أن تكون الطاقة العظمى للإلكترونات ذات السّبين المعاكس للحقل المغناطيسي المطبّق أكبر من تلك للإلكترونات ذات السّبين الموازي له. درجتان
- ويمكننا الحصول على طاقة أدنى للجملة المدروسة بتدوير السّبينات لدى جزءٍ من الإلكترونات الواقعة في القسم الأيمن من القطع المكافئ وانتقالها إلى قسمه الأيسر، كما يوضح الشكل (c)، ما يعني استعادة مستوى فيرمي المشترك. 4 درجات

ثالثاً– 10 درجات

لنفرض أن الكميّة $N_{\mp}(E)\,dE$ تمثّل كثافة الحالات الواقعة في المجال الطاقي dE للإلكترونات ذات السّبين المعاكس للحقل $(-)$ والموازي له $(+)$ على الترتيب.

ونعدُّ الإلكترون متفاعلاً مع $\vec{B}$ فقط من خلال سَبينه.

عندها يكون التأثير الوحيد للحقل $\vec{B}$ متمثلاً في انزياح سويات الطاقة بمقدار $\mp\mu_B B$ من دون تغيير طبيعة توزّعها.

ولهذا السبب، يكون تركيز السويات السّبينية المعاكسة $(-)$ ذات الطاقة E **بوجود الحقل المغناطيسي** $\vec{B}$ مطابقاً لتركيز السويات السّبينية $(-)$ ذات الطاقة $(E+\mu B)$ **من دون وجود الحقل المغناطيسي** $\vec{B}$.

ويُقال الكلام ذاته بالنسبة لتركيز السويات السّبينية الموافقة $(+)$ ،

وبناءً على ما تقدم نستطيع كتابة العلاقة الآتية:

$$N_{\mp}(E)=\frac{1}{2}N(E\pm\mu_B B)\cong\frac{1}{2}\left[N(E)\pm\mu_B B\frac{\partial N(E)}{\partial E}\right]. \qquad (1)$$

ومن ثمّ يساوي تركيز الإلكترونات من كلا النوعين إلى:

$$n_{\mp}(E)=\int_0^{\infty}N_{\mp}(E)\,f(E)\,dE=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}N_{\mp}(E)\,f(E)\,dE\pm\frac{1}{2}\,\mu_B B\int_0^{\infty}\frac{\partial N(E)}{\partial E}\,f(E)\,dE\,. \qquad (2)$$

وبالتعويض عن العلاقتين الأخيرتين في العلاقة المعطاة في نص السؤال نجد أن التمغنَط يساوي إلى:

$$M = \mu_B^2 B \int_0^\infty \frac{\partial N(E)}{\partial E} f(E)\, dE = \mu_B^2 B \int_0^\infty N(E)\left(-\frac{\partial f(E)}{\partial E}\right) dE . \qquad (3)$$

وباستكمال المعادلة الأخيرة بطريقة التجزئة مع الأخذ بالحسبان أن $N(E=0)=0$; و $f(E=\infty)=0$ في درجة الصفر المطلق، فضلاً عن إدخال تابع الواحدة للطاقة عند مستوي فيرمي المعطى وخصائص تابع فيرمي:

نحصل على المعادلة الآتية: $M = \mu_B^2 B\, N(E_F)$,

رابعاً– 9 درجات

يمكن حساب الطواعية المغناطيسية χ من العلاقة $M = \chi H$ حيث $B = \mu_0 H$ والأخذ بالحسبان علاقة كثافة الحالات المعطاة عند مستوى فيرمي $N(E_F)$. ومن ثمَّ:

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{M\mu_0}{B} = \frac{\mu_B^2 B\, N(E_F)\mu_0}{B} = \frac{3n\mu_0\mu_B^2}{2k_B T_F} . \qquad (4)$$

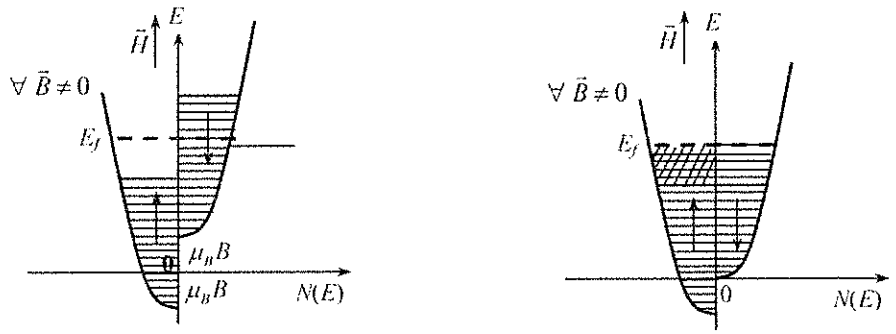
حيث T_F درجة حرارة تخلخل الغاز الإلكتروني وتتعيّن بالعلاقة الآتية:

- بما أن درجة حرارة فيرمي T_F تفوق كثيراً درجة انصهار المعدن T، فإن الطواعيّة المغناطيسية χ المعرّفة بالمعادلة (4) تسمى **طواعية باولي للمغناطيسية الطرديّة** وهي مستقلة عن درجة الحرارة مما يتفق مع القياسات التجريبية لاسيما من أجل القلويات. وتُفسّر الاختلافات البسيطة عن القياسات التجريبية بإهمال الدراسة النظرية للتآثر الإلكتروني–الإلكتروني.
- يمتلك الغاز الإلكتروني مغنطة عكسية، تظهر نتيجة تأثير الحقل الخارجي في حركة الإلكترونات الحرة. فالحقل المغناطيسي يؤثر في الإلكترونات المتحركة فيُجبرها على الحركة اللولبية بين التصادمات، ولكن هذا الفعل يكون صغيراً جداً بحيث يمكن إهماله أمام فعل المغناطيسية الطرديّة.

أولاً– عرّف تابع بلوخ واذكر خصائصه: 6 درجات

- تابع **بلوخ** هو تابع موجي عام يُعدُّ حلاً لمعادلة شرودنغر
- ويصف حركة الإلكترونات في كمون شبكة بلّورية دورية غير متنهٍ
- ويُمثِّل موجة مستوية راحلة في الشبكة البلّورية سعتها متغيرة ودورية بدورية الشبكة البلّورية
- ويُعطى بالمساواة: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$,

حيث $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ تابع دوري بدورية شبكة برافيه البلّورية ويساوي: $u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R})$.



ثانياً– ماذا يُقصد بعبارة "تقريب الرابطة الشديدة":

هو تصميم لتابع موجة بلوخ يُمثَّل **بتركيبٍ خطّيٍ لمدارات ذريّة** (LCAO) أي بتوابع موجية شديدة التوضع لذرات تؤلّف جسماً صلباً ويهدف إلى وصف بنيته الإلكترونية. درجتان

ثالثاً–

- تصف المعادلة المعطاة كيف تتحوّل السويات الذّريّة، E_n ، إلى عصابة طاقية عند انتظام الذرات في شبكة بلوريّة.
- إن عملية الجمع في المعادلة المعطاة تقتصر فقط على أقرب المجاورات لذرةٍ، عند $+a$ و $-a$: وبما أن **التوابع الموجية الذّريّة-s متناظرة كروياً**، فإن $\gamma_s = \gamma(-a) = \gamma(a)$ ، وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد:

$$E_s(\vec{k}) = E_s - \beta_s - \gamma_s\left(e^{ika} + e^{-ika}\right) = E_s - \beta_s - 2\gamma_s \cos ka,$$

- حيث β_s هي قيمة β المحسوبة من أجل هذه العصابة-s.

تُمثِّل المعادلة الأخيرة **العصابة الطاقية الأدنى** للجسم الصلب المدروس والشكل المبين أدناه يوضح شكلها. 6 درجات

ويمكن مناقشة هذه النتيجة كما يأتي:

- فالعصابة-s تملك أدنى طاقة عند النقطة $k = 0$ وأقصى طاقة عند النقطة $k = \pi/a$ ، أي أنها تقع في حدود منطقة بريلوان الأولى.
- نلاحظ أن التبدد الذي يظهر في الشكل المبين أدناه وبطبيعة الحال في المعادلة الأخيرة مشابهٌ جداً للعصابة الطاقية الأدنى المحسوبة في **تقريب الإلكترون شبه– الحر**.
- مركز العصابة-s هنا منزاح عن الطاقة الذّريّة E_s بمقدار $-\beta_s$ ، وعادةً يكون هذا الانزياح صغيراً جداً.
- يُعدّ تعميم هذه النتجة لتشمل سويات طاقة ذريّة أخرى بسيطاً، والشكل المبين أدناه يوضح أيضاً نتيجة الحساب من أجل العصابة الطاقية التالية، الناتجة من **السوية الذّريّة-p**. ونرى مرةً أخرى، أن هذه العصابة مشابهة جداً لنتيجة تقريب الإلكترون شبه– الحر. 4 درجات

وجدنا أيضاً فجوة عصابة طاقية عند النقطة $k = \pi/a$: تُحدد أبعادها:

- بالفاصل الطاقي بين السويات-s والسويات-p،
- والفارق بين الانزياحين β_s و β_p ،
- وعرض العصابتين الطاقيتين. 3 درجات

يمكن عرض العوامل التي تؤثر في العرض الطاقي المطلق لعصابة من العصابات الطاقية في نموذج البعد الواحد، الذي ندرسه هنا وفق الآتي:

- يُعطى العرض الطاقي بالكمية $2\gamma_s$ ، حيث ينشأ
  - ← **العامل 2** من عدد المجاورات الأقرب للذرة المعطاة؛
  - ← **والحدّ** γ_s من تراكب التوابع الموجية والكمون. 3 درجات
- فالعدد التساندي العالي للذرات، الذي يكون متوافراً عادةً في **البنيات المتراصة** للمعادن، يُنتج عرض عصابة طاقة كبيراً.
- ولقيمة γ_s أهمية أكبر في تحديد عرض العصابة الطاقية عادةً بسبب التناقص الشديد جداً للتوابع الموجية عند ابتعادها عن النواة.

← فمن أجل بنية ما معطاة، سيؤدي تابع موجي ذرّي ما متوضّع بشدة بجوار النواة إلى عصابة طاقة أضيق بشكل ملحوظ من عصابة الطاقة التي يؤدي إليها تابع موجي أقل توضّعاً. 3 درجات

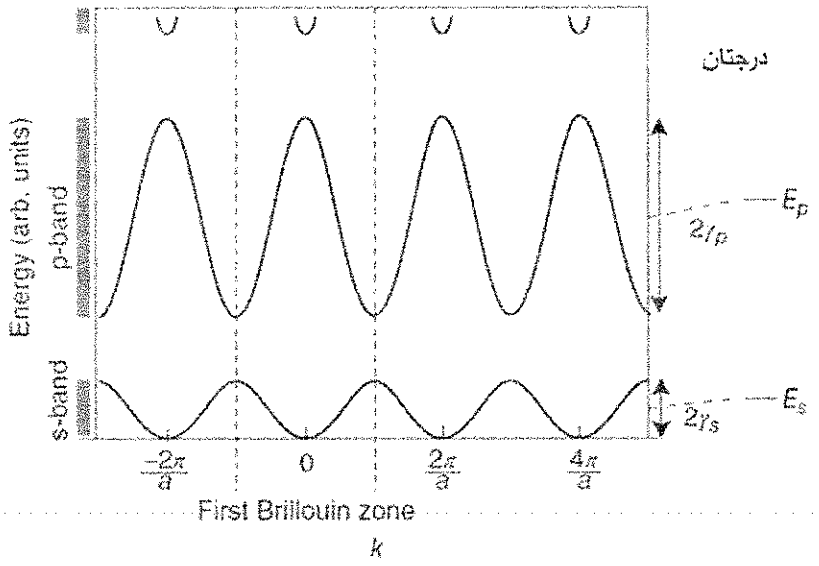
← فعلى سبيل المثال: تؤدي **سوية ذرية-3d** إلى عصابة طاقة أضيق بكثير من تلك العصابة التي تؤدي إليها **السوية-4s**، على الرغم من أن السويات الذّريّة متشابهة جداً بالطاقة.

- ثمة حالة حدّية لتابع موجي متوضّع، تتمثل في السوية الداخلية (1s) لذرة ثقيلة: فالتوابع الموجية 1s للذرات المتجاورة لا تتراكب على الإطلاق في الجسم الصلب **والعصابة-1s الناتجة**، تمتلك عرضاً قريباً من الصفر، أي أنها مستوية بالكامل؛ إذْ تحتفظ بسلوكها الذّريّ المتوضّع. درجة واحدة

خامساً-

❖ يوافق التابع الموجي $\psi(+)$ الذي يمتلك الطاقة الأخفض، عند النقطة $k=\pi/a$، التابع الموجي s، الذي يتفق هنا مع تراكم الكثافة الاحتمالية بالقرب من القلوب الأيونية.

❖ أمّا التابع الموجي $\psi(-)$ الذي يؤدي إلى الحالة الطاقية الأعلى عندما $k=\pi/a$، ذات عقدة الكثافة الاحتمالية عند القلوب الأيونية فيوافق التابع الموجي p، الذي يمتلك عقدةً هنا أيضاً. 4 درجات



توزيع الدرجات على جواب السؤال الاختياري الثاني:

- تُبدي الإلكترونات الحرة سلوكاً بارامغناطيسياً: فإذا امتلك كلّ إلكترونٍ حرٍ سبيناً قيمته $\frac{1}{2}$ وعزماً مغناطيسياً μ_B، فمن المرجّح أن تشارك الإلكترونات الحرة في تمغنط الإشباع للجسم الصلب بقيمة تساوي حاصل ضرب μ_B في كثافة الإلكترونات. درجتان
- يتم بلوغ هذا الإشباع عند اصطفاف كل العزوم المغناطيسية بشكلٍ موازٍ للحقل الخارجي (أو اصطفاف السبينات بشكلٍ مسايرٍ للحقل). غير أن حقيقة الأمر ليست كذلك على الإطلاق والطواعيّة البارامغناطيسية للإلكترونات الحرة صغيرة جداً فعلياً. درجتان
- يمكن فهم الطواعيّة البارامغناطيسية لإلكترونات حرة وحسابها باستخدام الشكل المجاور :
  - جرى تصنيف الحالات المشغولة بإلكترونات حرة في الشكل (a) إلى فئتين: درجتان

واحدة بعزومٍ مغناطيسيةٍ مسايرةٍ لحقل خارجي، B_0 ،

وأخرى بعزومٍ مغناطيسيةٍ موازيةٍ له؛ افترض هنا أن يكون هذا الحقل الخارجي صفراً تقريباً.

- يُظهر الشكل (b) ماذا يحدث عند ازدياد B_0 حتى قيمة محدودة. ترفع الإلكترونات طاقتها أو تُخفِّضها بمقدار $\mu_B B_0$ تبعاً لاتجاه عزومها المغناطيسية بالنسبة لاتجاه الحقل الخارجي. درجتان
- بما أن μ_B صغير جداً، فإن هذا التغيّر الطاقي يكون صغيراً جداً، أياً يكن الحقل الخارجي الذي يمكن بلوغه، إذْ يبلغ هذا التغيّر نحو 10^{-5} eV، وهو أقل بكثير من الفاصل الطاقي بين قاع العصابة الطاقية وطاقة فيرمي. درجتان
- وبما أن هذا الانزياح حدث، فإن الإلكترونات التي انتقلت إلى ما فوق طاقة فيرمي تستطيع تخفيض طاقاتها بقلب سبيناتها حيث تُصبح الإلكترونات بعزمٍ مغناطيسيٍ موازٍ للحقل الخارجي، كما يوضح الشكل (c). درجتان
- وهذا يؤدي إلى توافر إلكترونات بعزمٍ مغناطيسيٍ موازٍ للحقل بعدد أكبر من عدد الإلكترونات المتوافرة بعزمٍ مغناطيسيٍ مسايرٍ له، أي أن هذا الانزياح يؤدي إلى استجابة بارامغناطيسية. درجتان

حساب χ_m : 5 درجات

لحساب χ_m ، يجب أن نحدد كمية الإلكترونات التي تقلب سبيناتها لكي تمتلك عزماً مغناطيسياً موازياً للحقل الخارجي؛ تُمثَّل هذه الإلكترونات في الشكل (c) بالقطعة الرمادية الفاتحة حيث تبلغ مساحة كل قطعة $\frac{1}{2} g(E_F)\mu_B B_0$.

- ولهذا السبب، يكون الفارق بين الإلكترونات التي عزومها المغناطيسية موازية للحقل وتلك التي عزومها مسايرة له مساوياً

$$N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0} = g(E_F)\mu_B B_0 ,$$

حيث تُشير الأسهم إمّا إلى أن العزوم والحقل متوازية وإمّا أنها متسايرة.

ومن ثمَّ يبلغ التمغنط المحصّل: $$M = \frac{1}{V}\left(N_{\downarrow\downarrow B_0} - N_{\downarrow\uparrow B_0}\right)\mu_B = \frac{1}{V} g(E_F)\mu_B^2 B_0 ,$$

ومن ثمَّ تُصبح علاقة الطواعية المغناطيسية، χ_m ، من الشكل: $$\chi_m = \frac{1}{V}\mu_0 \mu_B^2 g(E_F),$$

والتي قيمتها صغيرة، ومن نفس رتبة الطواعيّات الدايامغناطيسية.

فالحقل اللازم لصف كل السبينات لا يكفي أن يتحقق الشرط $\mu_B B_0 >> k_B T$ فقط، وإنما يجب أن تتحقق المتراجحة $\mu_B B_0 > E_F$ ، أي يجب أن يكون مقدار التغيّر الطاقي الذي تتعرض له الإلكترونات نتيجة تطبيق حقل خارجي أكبر من طاقة فيرمي أيضاً، وهو مقدار كبير جداً هنا. في حقيقة الأمر، تختلف بارامغناطيسية باولي عن بارامغناطيسية كيوري تماماً: ففي بارامغناطيسية كيوري، فعلياً يمكن بلوغ التمغنط القوي، لأن ما تحتاجه الطاقة المغناطيسية، فقط أن تكون أعلى بكثير من الطاقة الحرارية. أمّا من أجل بارامغناطيسية باولي، فإنها بحاجة لأن تتجاوز طاقة فيرمي، وهذا أمر غير ممكن.

جامعة طرطوس | امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة (2)** | الاسم:

كلية العلوم | لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء | المدة: **ساعتان**

قسم الفيزياء | للعام الدراسي 2019-**2020**/الدورة الامتحانية **الأولى** | الدرجة القصوى: **70**

السؤال الأول: 25 درجة

تكمن إحدى الصفات المميزة والمهمة للمعادن في قدرتها على حجب الحقول الكهربائية. والمطلوب:

أولاً- شرح ماذا يقصد بمفعول الحجب المعدني مع كتابة العلاقات المناسبة.

ثانياً- وصف ورسم شكل منحني كثافة الحالات المشغولة في درجة الصفر المطلق في حالتين؛ بعيداً عن الذرة الشائبة (الشحنة الموجبة المتناظرة كرويا) الموجودة في المعدن وقريباً منها؛ **ثمَّ حساب** كثافة الشحنة المتراكمة في جوارها r، إذا علمت أن طاقتها الكامنة أقل بكثير من طاقة فيرمي.

ثالثاً- إيجاد علاقة الكمون $\phi(r)$ بتطبيق معادلة بواسون في الإحداثيات الكروية. **ماذا تستنتج؟. وناقش** علاقة طول حجب توماس- فيرمي.

السؤال الثاني: 20 درجة

ليكن لدينا إلكترون يتحرك في الحالة الطبيعية حول نواته وفق مسار محدد نصف قطره r، ولنطبق حقلاً مغناطيسياً شدته $\vec{B}$ على مكان تواجد هذا الإلكترون، ونطلب ما يأتي: **أولاً- ما هو تأثير** تطبيق الحقل المغناطيسي على الحركة الطبيعية للإلكترون حول النواة عندما يكون هذا الحقل عمودياً على مستوي حركته.

ثانياً- اكتب علاقة التواتر الموافقة لهذه الحركة **ووضّح** فيما إذا كان هذا التواتر متساوٍ من أجل كل الإلكترونات.

ثالثاً- ماذا تكافئ الحركة الإضافية للإلكترون **وماذا ينتج عنها؟. اكتب** العلاقات الموافقة لذلك.

رابعاً- استنتج علاقة **لانجفان** ثم أعط تفسيراً فيزيائياً مناسباً لها علماً بأن القيمة الوسطية لمربع البعد بين النواة والإلكترون في الإحداثيات الأسطوانية تساوي $\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle z^2\rangle$ ومساحة السطح الذي يمسحه الإلكترون بسبب الحركة الإضافية يساوي $\pi\langle\rho^2\rangle = \pi\{\langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle\}$ وتوزع الشحنة الإلكترونية كروي التناظر.

السؤال الثالث: 25 درجة

أولاً- إن وجود جسم صلب في حقل كهربائي $\vec{E}$ يسبب استقطاباً عازلياً $\vec{P}$ لهذا الجسم يساوي $\vec{P} = \chi_e \in_0 \vec{E}$، حيث χ_e الطواعيّة الكهربائية و $\in_0$ السماحية العازلية للخلاء **والمطلوب مناقشة** الآلية الميكروسكوبية للاستقطاب.

ثانياً- تربط علاقة كلاوزيوس- موسوتي الاستقطابية المجهرية α للذرات المؤلفة للجسم الصلب بثابت العازلية $\in$؛ **والمطلوب استنتاج** هذه العلاقة موضحاً في أثناء ذلك **المقصود** بالحقل الموضعي $\vec{E}_{loc} = \frac{1}{3}(\in +2)\vec{E}$ في المادة العازلة علماً بأن $\chi_e = \in -1$.

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2020/01/19

أ. د. حسن عبد الكريم سليمان

سلم تصحيح مقترح من لجنة المادة الصلبة (2)

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 25 درجة

يُعتبَر كمون كولون الناتج عن شحنة نقطية موجبة، q، في الخلاء بالعلاقة $\phi_0(r) = q/4\pi \in_0 r$ حيث r المسافة بدءاً من الشحنة. درجتان

وعندما نضع الشحنة النقطية في **عازلٍ** علينا أن نستبدل $\in_0$ بـ $\in \in_0$ فقط، حيث $\in$ ثابت العزل للعازل.

فينخفض الكمون الكليّ بمقدار العامل الثابت $\in$. درجة واحدة

ولكن، إذا وضعنا **الشحنة النقطية الموجبة** في **معدنٍ**، فإنها تجذب الإلكترونات المحيطة بها؛ وبشكلٍ مخالفٍ تماماً لحالة وضعها في عازلٍ، تكون هذه الإلكترونات حرة الحركة باتجاه الشحنة النقطية؛

وهذا يؤدي إلى ظهور **غمامة إلكترونية سالبة** حولها، **تُخفِّض** الكمون الكليّ بشدة عند المسافات الكبيرة.

وهذا هو **مفعول الحجب المعدني** الذي سنصفه الآن كمياً. درجتان

لندرس شحنة نقطية موجبة في معدن، يُعطى كمونها بالعلاقة السابقة $\phi_0(r) = q/4\pi \in_0 r$:

هذا الكمون متناظر كروياً، ويؤدي إلى غمامة إلكترونية حول الذرة الشائبة، كمونها، $\phi_s(r)$، متناظر كروياً أيضاً.

يُشير تراكب الكمونين إلى أن الكمون الكليّ يساوي $\phi(r) = \phi_0(r) + \phi_s(r)$.

إذا فرضنا أن الطاقة الكامنة، $e\phi(r)$، صغيرة بالمقارنة مع طاقة فيرمي، E_F، بحيث يتغيّر الكمون الكليّ، $\phi(r)$، ببطء في الفراغ، وأن درجة الحرارة تساوي $0\ K$، فيمكن وصف الحجب بالصورة التي يوضحها الشكل المجاور. ثلاث درجات

فبعيداً عن الشائبة حيث الكمون، $\phi(r)$، **يساوي الصفر** فعلياً، تمتلئ الحالات الفارغة من الإلكترونات في المعدن حتى طاقة فيرمي، ولكن **بجوار الشائبة**،

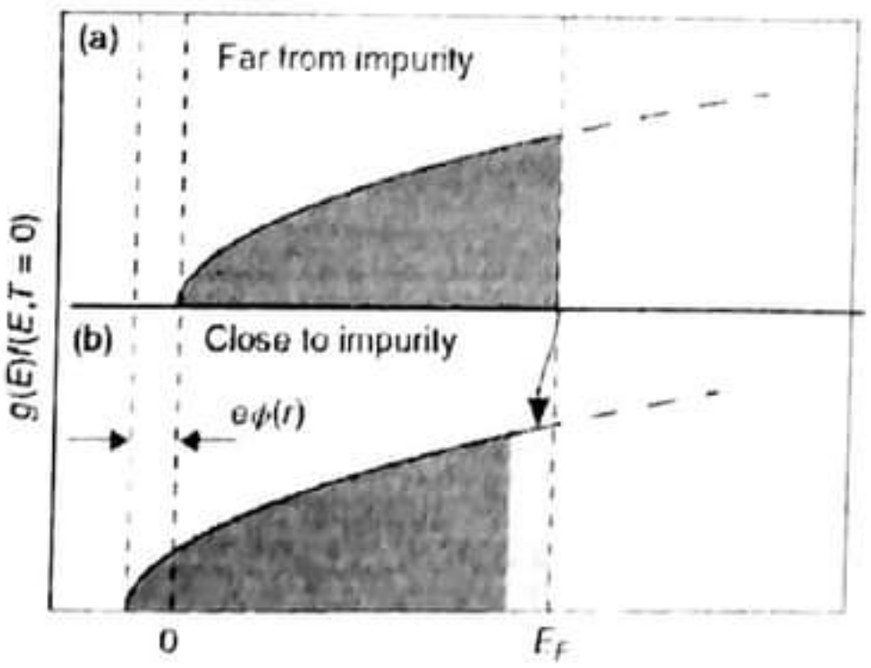
"تشعر" الإلكترونات بطاقة كهرساكنة إضافية من $e\phi(r)$، بحيث تكون طاقات كل الحالات **أقل**.

وهذا يوافق انزياحاً لكثافة الحالات نحو الطاقات الأخفض (من أجل شحنة نقطية موجبة)؛ ثلاث درجات

وبدوره يؤدي هذا الانزياح إلى حالة، حيث بمقدور **الإلكترونات الساكنة** في المعدن، الانتقال إلى الحالات الطاقية **الأخفض** المتاحة الواقعة بجوار الشائبة وإشغالها (الساحة الرمادية الفاتحة في الشكل) حتى بلوغ وضع التوازن.

وعندها، تساوي كثافة الشحنة المتراكمة في جوار r إلى حاصل ضرب $-e$ في أبعاد الساحة الرمادية الفاتحة، مما يؤدي إلى المساواة $\rho(r) = -e^2 \frac{1}{V} g(E_F)\phi(r)$. ثلاث درجات

يمكن الاعتقاد بأن هذا التدفق للشحنة **سيؤدي لانخفاض** الشحنة في باقي المعدن؛ وهذا أيضاً صحيح، ولكن حجم الجسم الصلب، أفترض كبيراً جداً بالمقارنة مع المساحة حول الشائبة، بحيث يمكن إهمال هذا الانخفاض. درجة واحدة



على الرغم من أننا نعرف الآن كثافة الشحنة المتولّدة بالكمون الكليّ، إلاّ أننا ما نزال نجهل الكمون.

والذي يمكننا إيجاده بتطبيق معادلة بواسون، $\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\in_0$، واستخدام علاقة الكمون.

وبما أن الكمون يتصف بالتناظر الكروي، فإن كل شيء يتعلق

بالمسافة، r، فقط ولا توجد تابعية زاوية لهذا الكمون؛ فأفضل طريقة لحل المسألة المطروحة تكمن في كتابة مؤثر لابلاس، ∇^2، في **الإحداثيات الكروية** والاستفادة من كون $\phi(r)$ يتعلق بالمسافة r فقط ولا يتعلق بالاتجاه.

في هذه الحالة، نحصل على العلاقة الآتية: درجتان

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{\partial^2\phi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = \frac{e^2}{V\epsilon_0}g(E_f)\phi(r). \qquad (1)$$

والآن يجب إيجاد حل لهذه المعادلة التفاضلية، حيث ليس صعباً أن نجد أن العلاقة الآتية (من خلال التعويض عنها في المعادلة (1)) هي حل لها: درجة واحدة

$$\phi(r) = c\frac{1}{r}e^{r/r_{TF}}, \qquad (2)$$

حيث c ثابت و r_{TF} مقدار، يسمى **طول حجب توماس- فيرمي** ويعطى بالعلاقة الآتية: درجتان

$$r_{TF} = \sqrt{\frac{V\epsilon_0}{e^2 g(E_f)}}. \qquad (3)$$

يمكن تثبيت الثابت c في العلاقة (2) بأخذ علاقة كمون كولون **غير المحجوب** من أجل الشحنة النقطية الموجبة، $\phi_0(r)$، في علاقة الكمون، واستعادتها من أجل حالة، تؤول فيها كثافة الحالات عند طاقة فيرمي، $g(E_f)$، إلى الصفر، أي عندما يُصبح المعدن مشابهاً للخلاء.

ومن أجل $g(E_f)$ صغيرة، ستكون المسافة r_{TF} كبيرة جدا والتابع الأسي في العلاقة (2) يبدو مساوياً للواحد. ولذلك يجب أن نختار الثابت c بحيث تتحقق المساواة: درجتان

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}e^{r/r_{TF}}, \qquad (4)$$

التي تُعدُّ نتيجة نهائية.

قيمة r_{TF} في معظم المعادن صغيرة جداً، من رتبة $1\,\text{Å}$، فضلاً عن أن القسم الأسي في العلاقة (4) يجعل الكمون المحجوب (كمون الحجب) يتناقص على نفس تدريج الطول، أكبر بكثير من سرعة تناقص كمون كولون غير المحجوب. وهذا يؤكد النتيجة المتوقعة، التي تنص على حدوث حجب الكمون الكهرساكن في المعدن بسرعة كبيرة جداً. درجتان

في الواقع، يمكن استخدام الحجب الفعّال، كإثبات لكي نفسّر لماذا تكون الإلكترونات حرة داخل المعدن في المقام الأول؛ فبحجب فعّال كهذا، من غير الممكن جعل الإلكترونات تتموضع بجوار كمون الأيون، لأن الكمون الأيوني المحجوب ضعيف جداً. درجتان

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثاني: 20 درجة

تنشأ المغناطيسية العكسية **كنتيجة لرد** فعل المادة الواقعة تحت تأثير حقل مغناطيسي خارجي.

فالجسم يحاول باستخدام شحناته الكهربائية أن يحمي أجزاءه الداخلية من التأثر بهذا الحقل.

ولهذا السبب تتغير الحركة المدارية لإلكترونات ذرات الجسم المدروس بمعنى أن هذه الإلكترونات **تترنح** عن مسارها الطبيعي فتنشأ في الذرات حركة إضافية تولّد حقلاً مغناطيسيا جهته تعاكس جهة الحقل الخارجي.

وهذه الحركة الإضافية هي التي تكون المغنطة العكسية التي تزول بزوال الحقل المطبق.

ويمكن حساب الحركة الإضافية من نظرية لارمور التي تنص على أن إلكترونات الذرة الواحدة تتحرك بوجود حقل مغناطيسي خارجي بمحصلة تراكب حركتين:

الحركة الطبيعية للإلكترون حول نواته المتراكبة **مع حركة ترنح** المدار، كما في الرسم المعطى. أربع درجات

فالعزم المداري العمودي على مستوي الإلكترون يدور بسرعة زاوية تسمى بتواتر لارمور ويساوي إلى: درجتان

$$\omega_l = 2\pi\nu_l = \frac{eB}{2m} \quad \text{ومنه:} \quad \nu_l = \frac{eB}{4\pi m}.$$

حيث ν_l تردد ترنح المدار، و e القيمة العددية لشحنة الإلكترون.

ينتج من العلاقة الأخيرة أن تغير التواتر الزاوي لحركة الإلكترون المدارية واحد من أجل جميع الإلكترونات، لأنه لا يتعلق لا بنصف قطر المدار ولا بالسرعة الخطية للإلكترون على مداره.

إذن عملية ترنح مدار الإلكترون تؤدي إلى حركة إضافية لهذا الإلكترون حول المجال المغناطيسي الخارجي وهي تكافئ تيارا كهربائيا عنصريا تعطى شدته بالعلاقة الآتية: درجتان + درجتان

$$\Delta I = -e\nu_l = -\frac{e\omega_l}{2\pi} = -\frac{e^2 B}{4\pi m}.$$

تنتج الإشارة السالبة من كون شحنة الإلكترون سالبة.

وعلى أثر ذلك ينشأ عزم مغناطيسي يساوي إلى: $\Delta\mu = \Delta I\, A = -\frac{e^2 AB}{4\pi m}$.

حيث مساحة السطح الذي يمسحه الإلكترون خلال حركة مداره الترنحية حول الحقل المغناطيسي وتساوي إلى

$$A = \pi\langle\rho^2\rangle = \pi\left\{\langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle\right\}$$

حيث $\langle\rho^2\rangle$ القيمة الوسطية لمربع بعد الإلكترون عن المحور المار من النواة والموازي للحقل المطبق.

استنتاج علاقة لانجفان

كما أن القيمة الوسطية لمربع بعد الإلكترون عن النواة المعطاة في نص السؤال في الإحداثيات تساوي إلى

$\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle z^2\rangle$ حيث r نصف قطر مدار الإلكترون.

فإذا كان توزع الشحنة الإلكترونية حول النواة كروي التناظر (وهذا ما تفترضه المسألة المطروحة في السؤال)، تكون القيم الوسطية لمربعات إحداثيات الإلكترون متماثلة: $\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle$

ومن ثمّ:

$$\langle r^2 \rangle = 3\langle x^2 \rangle = 3\left(\frac{1}{2}\langle \rho^2 \rangle\right) = \frac{3}{2}\langle \rho^2 \rangle :$$

ومن ثمَّ:

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{2}{3}\langle r^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2\pi}{3}\langle r^2 \rangle :$$

وعندها تؤول علاقة العزم المغناطيسي المذكورة أعلاه إلى الشكل التالي:

$$\Delta\mu = -\frac{e^2\langle r^2 \rangle B}{6m}.$$

ونستنتج من ذلك أن كل إلكترون **يكتسب** – بنتيجة تأثره بحقل مغناطيسي خارجي $\vec{B}$ – **عزماً** مغناطيسياً مدارياً إضافياً تحريضياً يتجه بعكس اتجاه الحقل $\vec{B}$ المطبق **وهذا ما يؤدي** إلى تمغنط المادة المدروسة في اتجاه معاكس لاتجاهه.
ويمثل هذا الحقل فعل المغناطيسية العكسية التي تخص جميع الذرات.
وتساوي المغنطة المتحرضة في الجملة الذرية المدروسة إلى:

$$M = NZ\,(\Delta\mu) = -\frac{NZ\,e^2\langle r^2 \rangle B}{6m}.$$

حيث N التركيز الذري و Z عدد الذرات في الذرة الواحدة.
(لقد اعتبرنا أن المقدار $\langle r^2 \rangle$ هو نفسه من أجل جميع إلكترونات الذرة على اعتبار أن الذرات متماثلة).
والطواعية المغناطيسية للأوساط عكسية المغنطة تأخذ في هذه الحالة الشكل الآتي:

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M}{B};$$

ومن ثمَّ:

$$\chi = -\frac{\mu_0 NZ\,e^2\langle r^2 \rangle}{6m}.$$

وهذه العلاقة ليست سوى علاقة لانجفان التقليدية وهي مطابقة للحسابات التي أجريت في ميكانيك الكم. ثمان درجات
ويُلاحظ أن الطواعية المغناطيسية تتعلق بعدد الذرات في وحدة الحجوم وتتناسب طرداً معه كما أنها مستقلة عن شدة الحقل المغناطيسي المطبق وعن درجة الحرارة المحيطة بالمادة المدروسة. درجتان

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الثالث: 25 درجة

أولاً– إن وجود جسم صلب في حقل كهربائي $\vec{E}$ يُسبب استقطاباً عازلياً $\vec{P}$ لهذا الجسم يساوي $\vec{P} = \chi_e \in_0 \vec{E}$ ، حيث χ_e الطواعيّة الكهربائية و $\in_0$ السماحية العازلية للخلاء **والمطلوب مناقشة** الآلية الميكروسكوبية للاستقطاب.
ثانياً– تربط علاقة كلاوزيوس– موسوتي الاستقطابية المجهرية α للذرات المؤلفة للجسم الصلب بثابت العازلية $\in$ ؛ **والمطلوب استنتاج** هذه العلاقة موضحاً في أثناء ذلك **المقصود** بالحقل الموضعي $\vec{E}_{loc} = \frac{1}{3}(\in +2)\vec{E}$ في المادة العازلة علماً بأن $\chi_e = \in -1$.
ينشأ الاستقطاب بصورة رئيسة من اصطفاف ثنائيات– قطب كهربائية **مجهرية** موجودة أصلاً أو تحرّضت بالحقل المطبق.
2

يُعرَّف **عزم ثنائيات- قطب كهربائية مجهرية** بالشكل $\boxed{\vec{p} = q\vec{\delta}}$، حيث q قيمة الشحنات الكهربائية و $\vec{\delta}$ متجه **المسافة فيما بينها**. 2

يُعيَّن هذا المتجه من أجل ثنائيات- قطب كهربائية عادة **من** الشحنة **الموجبة** إلى الشحنة **السالبة**. وعندها يمكن التعبير عن الاستقطاب **الماكروسكوبي** بدلالة ثنائيات- القطب المجهرية بالشكل: 2

$$\vec{P} = \frac{N}{V}\vec{p} = \frac{N}{V}q\vec{\delta}\ .$$

يتضح من العلاقة الأخيرة أن الكمية $\vec{P}$ تملك أبعاد كثافة شحنة سطحية. 1

لنفرض أن ثابت العازلية ϵ للجسم الصلب المدروس معلوم ونريد حساب الاستقطابية المجهرية α للذرات المؤلفة لهذا الجسم على اعتبار أنه لا توجد آليات أخرى للاستقطاب. إذن: 2

$$\boxed{\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E} = \frac{N}{V}\vec{p} = \frac{N}{V}\alpha\vec{E}\ .} \qquad (1)$$

حيث $\vec{E}$ الحقل الكهربائي **الوسطي** في المادة العازلة أي مجموع الحقل الخارجي والحقل الداخلي الوسطي الناتج من الاستقطاب. 2

إذن، في حالة مادة عازلة موجودة داخل مكثفة مستوية الصفيحتين، يكون $\vec{E}$ هو هذا الحقل؛ وهو الحقل الخارجي المختزل بمقدار العامل ϵ.

وبإعادة ترتيب العلاقة الأخيرة نحصل على العلاقة الآتية: 2

$$\boxed{\alpha = \frac{\epsilon_0 V(\epsilon - 1)}{N}\ .}$$

ولكن هذا ليس صحيحاً، لأن ثنائي قطب مجهري في الجسم الصلب **لا يشعر** بالحقل الوسطي، $\vec{E}$، وإنما **بالحقل الموضعي** المتوافر في موقعه، $\vec{E}_{loc}$، ويمكن أن يكون ذلك مختلفاً تماماً. 2

يمكننا تخيّل هذا الحقل الموضعي باقتطاع ثنائي- القطب المدروس وفحص تأثير كل الشحنات الأخرى المتوافرة في جواره. 2

أصبح واضحاً أن تأثير ثنائيات- القطب المجاورة يؤدي إلى حقل إضافي، $\vec{E}'$، يوازي اتجاهه اتجاه الحقل الوسطي، أي أن الحقل الموضعي الذي شعر به كل ثنائي- قطب أقوى من الحقل الوسطي في الجسم الصلب. 2

وبما أنّ شدة الحقل الموضعي تعطى بالعلاقة

$$\vec{E}_{loc} = \frac{1}{3}(\epsilon + 2)\vec{E}\ ,$$

نجد أنّ: 2

$$\vec{P} = \frac{N}{V}\alpha\vec{E}_{loc} = \frac{N\alpha}{3V}(\epsilon + 2)\vec{E}\ .$$

ومن جهة أخرى، لدينا من العلاقة المعطاة في نص السؤال إلى جانب العلاقة $\chi_e = \epsilon - 1$ أو الطرف الأيسر من العلاقة (1)؛ كعلاقة من أجل $\vec{P}$، وبمساواتهما مع بعضهما البعض نحصل على ما يسمى **علاقة كلاوزيوس- موسوتي** الآتية: 4

$$\boxed{\alpha = \frac{3\epsilon_0 V}{N}\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\ .}$$

أ.د. [illegible]

جامعة طرطوس	امتحان مقرر **فيزياء الحالة الصلبة 2**	الاسم:
كليّة العلوم	لطلاب السنة **الرابعة** فيزياء	المدة: **ساعتان**
قسم الفيزياء	للعام الدراسي 2018-2019/الدورة الامتحانية الثالثة	الدرجة القصوى: **70**

السؤال الأول: 26 درجة

لتفسير الناقلية الكهربائية في حالة التيار المستمر لبلّورة معدنية مساحة مقطعها A، ندرس سلوك إلكترونٍ عند تطبيق حقل كهربائي، $\vec{E}$ حيث تأخذ معادلة الحركة الشكل $m_e \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -e\,\vec{E}$ ، والمطلوب؛

أولاً– إيجاد حلها والمقارنة بين سرعة انسياق الإلكترونات وسرعتها الحرارية.

ثانياً– استنتاج علاقتي الناقلية الكهربائية النوعيّة للمعادن ومقاومتها النوعيّة وحركيّة الإلكترونات (يُطلب شرح مراحل الاستنتاج بالتفصيل). ماذا تستنتج من كل العلاقات التي تحصل عليها؟.

السؤال الثاني: 26 درجة

أولاً– عرّف تابع بلوخ واذكر خصائصه.

ثانياً– ماذا يُقصد بعبارة "تقريب الرابطة الشديدة".

ثالثاً– **اشرح** ماذا تصف المعادلة $E(\vec{k}) = E_n - \beta - \sum_{\vec{R}\neq 0} \gamma(\vec{R}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$ **وأوجد** علاقة عصابات الطاقة من أجل سلسلة ذريّة أحادية البعد علماً بأن عملية الجمع في العلاقة المعطاة تقتصر على أقرب المجاورات لذرةٍ ما ثمَّ **ناقش** النتيجة التي تحصل عليها وارسم شكل العصابات الطاقية الناتجة s و p من أجل قيمتين لـ k في مركز منطقة بريلوان وعند حدودها.

رابعاً– ما هي العوامل التي تؤثر في العرض الطاقي المطلق للعصابات الطاقية.

السؤال الثالث: 18 درجة

يُقال أن التآثر التبادلي هو العنصر الأساسي المسؤول عن تراصف عزوم ثنائيات– القطب المغناطيسي في الأجسام الصلبة:

أولاً– مما ينتج التآثر التبادلي؛ يُطلب كتابة العلاقة المعبّرة عن ذلك وتوضيحها من أجل جزيء الهيدروجين وذرة الهليوم.

ثانياً– وضّح فيما إذا كان يوجد تمغنط تلقائي في البلّورات المعدنية ذات الإلكترونات شبه الحرة أمّ لا.

ملاحظة: للرموز المستخدمة مدلولاتها الفيزيائية المعروفة

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2019/07/26

أ. د. **حسن عبد الكريم سليمان**

مكتبة A to Z

سلم تصحيح مادة فيزياء الحالة الصلبة (2)

توزيع الدرجات على إجابة السؤال الأول: 26 درجة

يأخذ حل المعادلة المعطاة في نص السؤال الشكل: درجتان

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{-e\vec{\mathrm{E}}t}{m_e}, \qquad (3\text{-}5)$$

هذا يعني أن حركة الانسياق المتسارعة **تكونُ في اتجاهٍ معاكسٍ** لاتجاه الحقل الكهربائي المطبق.

إذا فرضنا أن الحركة الانسياقية، تدهورت في تصادمٍ مع الأيونات وأن الزمن الوسطي من أجل انسياق– خالٍ من التصادم، يساوي τ، فإن سرعة الانسياق الوسطية، تساوي:

$$\vec{\upsilon}=\frac{-e\vec{\mathrm{E}}\tau}{m_e}. \qquad (4\text{-}5)$$

يمكننا تقدير رتبة المقدار $|\vec{\upsilon}|$ بالشكل الآتي:

من أجل حقل كهربائي يساوي $\vec{\mathrm{E}}\approx 10\ \mathrm{V/m^{-1}}$، نحصل على سرعة انسياق تساوي $|\vec{\upsilon}|=10^{-2}\ \mathrm{m/s}$، وهي **حركة بطيئة جداً** بالمقارنة مع الحركة الحرارية للإلكترونات. درجتان

يمكننا **حساب الناقلية الكهربائية** من خلال معرفة سرعة الانسياق، ولفعل ذلك، ندرس مساحة، A، عمودية على الحقل الكهربائي: يساوي عدد الإلكترونات التي تخترق المساحة A في وحدة الزمن:

$$n|\vec{\upsilon}|A \qquad (5\text{-}5)$$

ولذلك، كمية الشحنة التي تخترق تلك المساحة تساوي:

$$-en|\vec{\upsilon}|A \qquad (6\text{-}5)$$

وعندها، يمكننا حساب كثافة التيار الكهربائي بالعلاقة:

$$\vec{j}=-en\vec{\upsilon}, \qquad (7\text{-}5)$$

وبأخذ العلاقة بالحسبان، نحصل على العلاقة الآتية:

$$\vec{j}=\frac{ne^2\tau}{m_e}\vec{\mathrm{E}}=\sigma\vec{\mathrm{E}}=\frac{\vec{\mathrm{E}}}{\rho}, \qquad (8\text{-}5)$$

وهذا يعني أن كثافة التيار، تكون في اتجاه الحقل الكهربائي وتتناسب تناسباً طردياً مع شدته. 8 درجات

تُعرف هذه النتيجة بقانون أوم وثابت التناسب، σ، يسمى **الناقلية الكهربائية النوعية** للمادة؛ ومقلوبه، ρ، يسمى **المقاومة النوعية** للمادة. درجتان

لندرس الآن العلاقات الواضحة من أجل الناقلية والمقاومة النوعيتين اللتين حصلنا عليهما. فالناقلية النوعية تساوي: 3 درجات

$$\sigma=\frac{ne^2\tau}{m_e}, \qquad (9\text{-}5)$$

والمقاومة النوعية تساوي:

$$\rho=\frac{m_e}{ne^2\tau}. \qquad (10\text{-}5)$$

مكتبة A to Z

- نلاحظ هنا، أن الشحنة الأولية، e، تظهر مُربَّعةً في هاتين المعادلتين، وبسبب ذلك، يكمن في أنها ضروريةً لارتباط σ و ρ بالحقل الكهربائي، الذي يُحافظ على مسار الإلكترونات على طوله، ولتعيين التيار الكهربائي أيضاً. درجتان
- وحقيقة أنها مُربَّعةً، تعني أننا نحصل على نفس النتيجة من أجل حاملات الشحنة الكهربائية، سواء من أجل شحنة موجبة، $e+$، أو من أجل شحنة سالبة، $e-$. درجتان
- تعرّف **حركيّة** الإلكترونات التي نرمز لها بالرمز μ بأنها **نسبة** سرعة انسياق حاملات الشحنة إلى الحقل الكهربائي المطبّق

وتُعطى بالعلاقة $\mu = \frac{e\tau}{m_e}$ 3 درجات

ومن ثمَّ يمكن تعريف الناقلية والمقاومة النوعيتين أيضاً بدلالة الحركيّة حيث نجد: $\sigma = n\mu e$, $\rho = \frac{1}{n\mu e}$.

السؤال الثاني: 26 درجة

أولاً- عرّف تابع بلوخ واذكر خصائصه: 4 درجات

- تابع **بلوخ** هو تابع موجي عام يُعدُّ حلاً لمعادلة شرودنغر
- ويصف حركة الإلكترونات في كمون شبكة بلّورية دورية غير متنهٍ
- ويُمثِّل موجة مستوية راحلة في الشبكة البلّورية سعتها متغيرة ودورية بدورية الشبكة البلّورية
- ويُعطى بالمساواة:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

حيث $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ تابع دوري بدورية شبكة برافيه البلّورية ويساوي $u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R})$.

ثانياً- ماذا يُقصد بعبارة "تقريب الرابطة الشديدة":

هو تصميم لتابع موجة بلوخ يُمثَّل **بتركيبٍ خطّيٍ لمدارات ذرية** (LCAO) أي بتوابع موجية شديدة التوضع لذرات تؤلّف جسماً صلباً ويهدف إلى وصف بنيته الإلكترونية. درجتان

ثالثاً- اشرح ماذا تصف المعادلة $E(\vec{k}) = E_n - \beta - \sum_{\vec{R}\neq 0}\gamma(\vec{R})e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$ وأوجد علاقة عصابات الطاقة من أجل سلسلة ذريّة أحادية البعد علماً بأن عملية الجمع في العلاقة المعطاة تقتصر على أقرب المجاورات لذرة ما ثمّ ناقش النتيجة التي تحصل عليها وارسم شكل العصابات الطاقية الناتجة s و p:

- تصف المعادلة المعطاة كيف تتحوّل السويات الذّريّة، E_n، إلى عصابة طاقية عند انتظام الذرات في شبكة بلوريّة.
- إن عملية الجمع في المعادلة المعطاة تقتصر فقط على أقرب المجاورات لذرةٍ، عند $a+$ و $a-$: وبما أن **التوابع الموجية الذّريّة-s متناظرة كروياً**، فإن $\gamma_s = \gamma(-a) = \gamma(a)$، وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد:

$$E_s(\vec{k}) = E_s - \beta_s - \gamma_s\left(e^{ika} + e^{-ika}\right) = E_s - \beta_s - 2\gamma_s \cos ka,$$

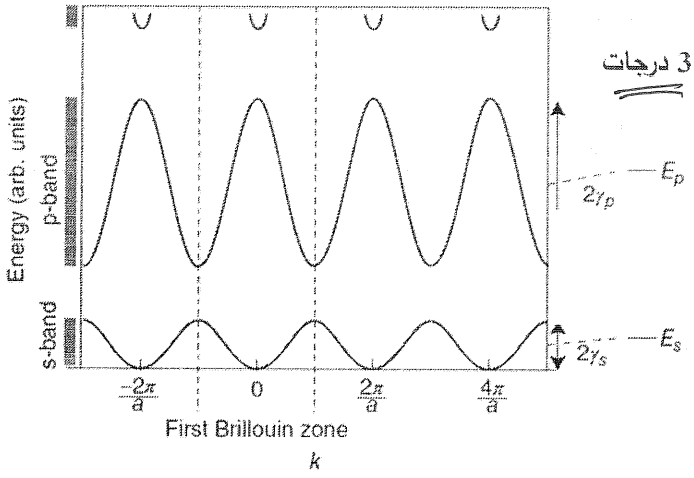
- حيث β_s هي قيمة β المحسوبة من أجل هذه العصابة-s.

مكتبة A to Z

تُمثِّل المعادلة الأخيرة **العصابة الطاقية الأدنى** للجسم الصلب المدروس والشكل المبين أدناه يوضح شكلها. 5 درجات

ويمكن مناقشة هذه النتيجة كما يأتي: 3 درجات

- فالعصابة-s تملك أدنى طاقة عند النقطة $k=0$ وأقصى طاقة عند النقطة $k=\pi/a$، أي أنها تقع في حدود منطقة بريلوان الأولى.
- نلاحظ أن التبدد الذي يظهر في الشكل المجاور وبطبيعة الحال في المعادلة الأخيرة مشابهٌ جداً للعصابة الطاقية الأدنى المحسوبة في **تقريب الإلكترون شبه- الحر**.



3 درجات

- مركز العصابة-s هنا منزاح عن الطاقة الذّريّة E_s بمقدار $-\beta_s$، وعادةً يكون هذا الانزياح صغيراً جداً.
- يُعدُّ تعميم هذه النتيجة لتشمل سويات طاقة ذريّة أخرى بسيطاً، والشكل المجاور يوضح أيضاً نتيجة الحساب من أجل العصابة الطاقية التالية، الناتجة من **السوية الذّريّة-p**. ونرى مرةً أخرى، أن هذه العصابة مشابهة جداً لنتيجة تقريب الإلكترون شبه- الحر.

وجدنا أيضاً فجوة عصابة طاقية عند النقطة $k=\pi/a$: تُحدد أبعادها:

- بالفاصل الطاقي بين السويات-s والسويات-p،
- والفارق بين الانزياحين β_s و β_p،
- وعرض العصابتين الطاقيتين.

3 درجات

يمكن عرض العوامل التي تؤثر في العرض الطاقي المطلق لعصابة من العصابات الطاقية في نموذج البعد الواحد، الذي ندرسه هنا وفق الآتي:

- يُعطى العرض الطاقي بالكمية $2\gamma_s$، حيث ينشأ
  - ✓ **العامل 2** من عدد المجاورات الأقرب للذرة المعطاة؛
  - ✓ **والحدّ** γ_s من تراكب التوابع الموجية والكمون.

درجتان

- فالعدد التساندي العالي للذرات، الذي يكون متوافراً عادةً في **البنيات المتراصة** للمعادن، يُنتج عرض عصابة طاقة كبيراً.
- ولقيمة γ_s أهمية أكبر في تحديد عرض العصابة الطاقية عادةً بسبب التناقص الشديد جداً للتوابع الموجية عند ابتعادها عن النواة.

مكتبة A to Z

- فمن أجل بنية ما معطاة، سيؤدي تابع موجي ذرّيّ ما متوضّع بشدة بجوار النواة إلى عصابة طاقة أضيق بشكل ملحوظ من عصابة الطاقة التي يؤدي إليها تابع موجي أقل توضّعاً.
- فعلى سبيل المثال: تؤدي **سوية ذرية-3d** إلى عصابة طاقة أضيق بكثير من تلك العصابة التي تؤدي إليها **السوية-4s**، على الرغم من أن السويات الذّريّة متشابهة جداً بالطاقة.

- ثمة حالة حدّية لتابع موجي متوضّع، تتمثل في السوية الداخلية (1s) لذرة ثقيلة: فالتوابع الموجية 1s للذرات المتجاورة لا تتراكب على الإطلاق في الجسم الصلب **والعصابة-1s الناتجة**، تمتلك عرضاً قريباً من الصفر، أي أنها مستوية بالكامل؛ إذْ تحتفظ بسلوكها الذّريّ المتوضّع.

4

درجات

توزيع الدرجات على السؤال الثالث: 18 درجة

يُقال أن التأثر التبادلي هو العنصر الأساسي المسؤول عن تراصف عزوم ثنائيات- القطب المغناطيسي في الأجسام الصلبة:

أولاً- مما ينتج التأثر التبادلي؛ يُطلب كتابة العلاقة المعبّرة عن ذلك وتوضيحها من أجل جزيء الهيدروجين وذرة الهليوم.

ثانياً- وضّح فيما إذا كان يوجد تمغنط تلقائي في البلّورات المعدنية ذات الإلكترونات شبه الحرة أمْ لا.

أولاً- تنتظم هذه العزوم في الأجسام الصلبة بفضل التأثر التبادلي الناتج عن التأثر النسبي للسبين، وهو نوع من الطاقة قيمته مهمة، **وينتج من اتحاد تأثر كولون ومبدأ باولي أي من ضرورة أن تمتلك الفرميونات توابع موجية عكسية-التناظر.**

يُعبَّر عن التأثر التبادلي من أجل جزيء الهيدروجين مثلاً بالعلاقة $E_{\uparrow\uparrow} - E_{\downarrow\uparrow} = -2X$

3 درجات

حيث أن الفارق بين الحالات المفردة، $E_{\downarrow\uparrow}$، والحالات الثلاثية، $E_{\uparrow\uparrow}$، **أكبر بنحو مرتين** من قيمة الطاقة التبادلية X التي تكون سالبة دوماً من أجل جزيء الهيدروجين؛ وتعني أن الحالة الثلاثية تمتلك طاقة أعلى من طاقة الحالة المفردة، ولذلك فإن الانتظام الموافق للحالة الأرضية لهذا الجزيء انتظام "ضد- فرومغناطيسي".

3 درجات

فمن أجل إلكترونين، يتلاشى التابع الموجي للحالة الثلاثية عند امتلاكما الإحداثيات المكانية ذاتها، بمعنى أنهما لن يتوجدا في نفس المكان على الإطلاق. فهذا يُخفِّض تنافرهما الكولوني، مما يؤدي إلى انخفاض طاقي بالمقارنة مع الحالة الأحادية ومن ثمّ إلى طاقة تبادل موجبة.

3 درجات

ومن أجل ذرة الهليوم وجد أن الحالات الثلاثية فيها تمتلك طاقةً أحفض من طاقة الحالات الأحادية الموافقة أيضاً ومن ثمَّ تنخفض الطاقة الكامنة الكليّة للإلكترونين فيها.

درجتان

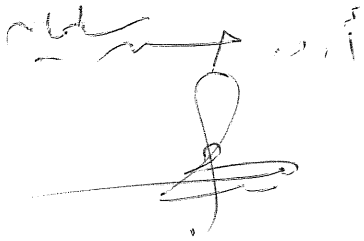
ثانياً- الإلكترونات التي لها اتجاه السبين ذاته لن تقع في نفس المكان. فإذا توافرت أكثرية من الإلكترونات ذات السبين العلوي Spin-up، فإن كلٍ من هذه الإلكترونات يشعر بوجود إلكترونات أخرى أقل وينجذب بشدة أكبر إلى

الأيونات في البلّورة، وهذا يؤدي إلى ربحٍ في الطاقة.

3 درجات

غير أن الحالة ليست بسيطةً لاعتبارات طاقية أخرى، تُطبق، حتى وإن أهملنا مفعول اللاانتظام عند درجة حرارة محدودة. **فمن أجل غازٍ إلكتروني حرٍ**، فإن استقطاباً سبينياً كاملاً سيُخفِّض التنافر الكولوني بين الإلكترونات، ولكنه سيرفع الطاقة الحركية لها بكمية كبيرة جداً (من رتبة طاقة فيرمي)، كما في مناقشة بارامغناطيسية باولي. ومن ثَمَّ، لا يُرصد أي تمغنط تلقائي على الإطلاق من أجل **معادن الإلكترونات شبه الحرة**.

4 درجات



مكتبة A to Z