ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية **العلوم**

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

اسئلة دورات محلولة

تحليل عددي

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس سلم تصحيح مقرر التحليل العددي

كلية العلوم

قسم الفيزياء الدورة الفصلية التكميلية 2025

****

السؤال الأول: **(16)** درجة

1. احسب الخطأ المطلق و النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة: $f(x,y) = x.y$ حيث: $x = 1.24$, $y = 3.53$ أعداد مدورة.

لحساب الخطأ النسبي:

$$\Delta x = 5\times10^{-3}, \Delta y = 5\times10^{-3}$$

لحساب الخطأ المطلق:

$$\Delta f \le \Delta x\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1.24,3.53)} + \Delta y\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{((1.24,3.53))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$\Delta f = (5\times10^{-3})|3.53| + (5\times10^{-3})|1.24| = 0.02385$$

فيكون الخطأ النسبي: $R_f = \frac{\Delta f}{f(1.24,3.53)} \le \frac{0.02385}{(4.3772)} = 0.005448688$

2. أوجد الحل y_1 للمعادلة التفاضلية $y' = x.y$ بطريقة تايلور مستخدماً خمسة حدود من منشور تايلور علماً أن $y(0) = 1$ و $h = 0.1$.

الحل:

$y' = x.y$ و منه: $y'' = y + x.y'$

$$y''' = y' + y' + x.y'' = 2y' + x.y''$$

$$y^{(4)} = 2y'' + y'' + x.y''' = 3y'' + x.y'''$$

$$y'(x_0) = y'(0) = x_0y_0 = 0$$

$$y''(x_0) = y''^{(0)} = 1 + (0)(0) = 1$$

$$y'''(x_0) = y'''(0) = 2(0) + (0)(1) = 0$$

منشور تايلور:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0)$$

$$y_1 = 1 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{6}(0) = 1.005$$

السؤال الثاني: **(24)** درجة

لتكن الدالة $f(x) = e^x$ و المعطاة وفق الجدول الاتي:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	1.2214	1.49182	1.82212	2.22554	2.71828

1. اكتب جدول الفروق الأمامية للدالة المعطاة. (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية)

2.احسب قيمة تقريبية للدالة عند $x = 0.1$ باستخدام حدودية استيفاء نيوتن من الدرجة الثانية $P_2(x)$ الموافقة لهذه الدالة (دون إيجادها)واحسب قيمة تقريبية للمشتق $f'(x)$ عند $x = 0.2$.

3. أوجد بطريقة المستطيلات القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 f(x).dx$، و احسب الخطأ المرتكب.

$$h = x_{i+1} - x_i = 0.2, \forall i \in \overline{0,5}$$

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1					
		0.2214				
0.2	1.2214		0.04902			
		0.27042		0.01086		
0.4	1.49182		0.05988		0.00238	
		0.3303		0.01324		0.00058
0.6	1.82212		0.07312		0.00296	
		0.40342		0.0162		
0.8	2.22554		0.08932			
		0.49274				
1	2.71828					

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0}{0.2} = \frac{x}{\frac{2}{10}} = 5x$$

2. عندما $x = 0.1$ فإن $\alpha = 5x = 5(0.1) = 0.5$

$$P_2(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2} \Delta^2 y_0$$

$$f(0.1) \approx P_2(0.5) = 1 + \binom{0.5}{1}(0.2214) + \binom{0.5}{2}(0.04902)$$

$$f(0.1) \approx P_2(0.5) = 1.10457$$

$$\acute{f}(x_1) \approx \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j \frac{1}{j+1}\Delta^{j+1}y_1$$

$$\acute{f}(x_1) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_1\right]$$

$$\acute{f}(x_1) \approx \frac{1}{0.2}\left[0.27042 - \frac{1}{2}(0.05988) + \frac{1}{3}(0.01324) - \frac{1}{4}(0.00296)\right] = 1.22077$$

$$\int_0^1 e^x . dx \approx h\sum_{i=0}^{4} y_i = 0.2(1 + 1.2214 + 1.49182 + 1.8221 + 2.22554) = 1.552174$$

$$\acute{f}(x) = e^x \Longrightarrow \begin{cases} \acute{f}(x_0) = \acute{f}(0) = 1 \\ \acute{f}(x_5) = \acute{f}(1) = e \end{cases}$$

$$M = max\{|1|, |e|\} = e = 2.71828$$

$$E \leq \frac{b-a}{2}.h.M = \frac{1-0}{2}.(0.2).(2.71828)=0.27183$$

السؤال الثالث: أجب عن أحد السؤالين الآتيين: **(10)** درجة

1. لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$$
$$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$$

أوجد الجذر $x^{(2)}$ حيث: $x^{(0)} = (1,3,2)$.

نكتب جملة المعادلات بالشكل:

$$x_1 = -\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}$$
$$x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}$$
$$x_1 = -\frac{1}{10}x_1 + \frac{7}{10}x_2 + \frac{1}{5}$$

نجد: $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

و يكون: $\|\alpha\| = max_{1\leq i\leq 3}\left(\sum_{j=1}^{3}|\alpha_{ij}|\right) = max(0.75,0.167,0.8) = 0.8 < 1$

فالجملة قابلة للحل و تكون العلاقة التكرارية $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$ أي:

و منه:
$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 2.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.6 \\ 3.233 \\ 2.25 \end{bmatrix}$$

2. لتكن لدينا الدالة $y = \sin x$ و المعطاة وفق الجدول الآتي:

x	30	45	60
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

أوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_2(x)$ لهذه الدالة بطريقة لاغرانج.

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 45)(x - 60)}{(-15)(-30)}$$
$$= \frac{1}{450}(x^2 - 105x + 2700)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 30)(x - 60)}{(15)(-15)}$$
$$= \frac{-1}{225}(x^2 - 90x + 1800)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-30)(x-45)}{(30)(15)}$$
$$= \frac{1}{450}(x^2 - 75x + 1350)$$

$$p_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

$$p_2(x) = \frac{1}{450}(x^2 - 105x + 2700)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{225}(x^2 - 90x + 1800)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{450}(x^2 - 75x + 1350)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$p_2(x) = -0.000107084x^2 + 0.02183847x - 0.0587780$$

السؤال الرابع: أجب عن السؤالين الآتيين: **(20)** درجة

1. أوجد الحل التقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ و الموجود في المجال $[1.5,2.5]$ مستخدماً طريقة نيوتن رافسون حيث: $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ و $\varepsilon = 0.001$ (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية).

نضع $x_0 = \frac{1.5+2.5}{2} = 2$، و لدينا $\acute{f}(x) = 3x^2 + 2x - 3$

و $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\acute{f}(x_0)} = 2 - \frac{3}{13} = 1.7692307$

$$|x_1 - x_0| = 0.23077 > \varepsilon$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\acute{f}(x_1)} = 1.7692307 - \frac{0.3604}{9.928994} = 1.7329238$$
$$|x_2 - x_1| = 0.0363 > \varepsilon$$

$$f(x_2) = 0.00068\,, \acute{f}(x_2) = 31.09688$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{\acute{f}(x_2)} = 1.7329238 - \frac{0.008266}{9.474922} = 1.732051$$
$$, |x_3 - x_2| = 0.00087 < 0.001$$

فالحل التقريبي المقبول هو $\bar{x} = 1.7320513$

2. لتكن لدينا جملة المعادلتين $\begin{cases} \sin(x-0.6) - y = 1.6 \\ 3x - \cos y = 0.3 \end{cases}$ أوجد الجذر (x_1, y_1) لهاتين المعادلتين بطريقة التقريبات المتتالية علماً أن الحل الابتدائي $(x_0, y_0) = (0.1, -1.9)$.

نضع $x = \frac{1}{3}\cos y + 0.3 = F(x,y)$ و $y = \sin(x - 0.6) - 1.6 = G(x,y)$

نجد: $F_x = 0 , F_y = \frac{-1}{3}\sin y$ و يكون

$$|F_x|_{(x_0,y_0)} + |F_y|_{(x_0,y_0)} = \left|\frac{-1}{3}\sin y\right| < 1$$

$G_x = \cos(x - 0.6) \ , G_y = 0$ و يكون

$$|G_x|_{(x_0,y_0)} + |G_y|_{(x_0,y_0)} = |\cos(x - 0.6)| < 1$$

الخيار موفق بالتالي نكتب علاقتي التكرار بالشكل الآتي:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\cos y_n + 0.3 \qquad \text{و} \qquad y_{n+1} = \sin(x_n - 0.6) - 1.6$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\cos y_n + 0.3 = \frac{1}{3}(\cos(-1.9)) + 0.3 = 0.1922843$$

$$y_{n+1} = \sin(x_n - 0.6) - 1.6 = y_{n+1} = \sin(0.1 - 0.6) - 1.6 = -2.0794$$

<u>انتهى السلم</u>

مدرس المقرر: أ.د. نضال إبراهيم حسن

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

سلم تصحيح التحليل العددي
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية 2025

****

(16) درجة

السؤال الأول:

1 احسب الخطأ المطلق و النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة: $f(x,y,z)=\frac{e^x}{x.\ln y}$

حيث: $x=2.5\ ,y=4.25$ أعداد مدورة.

$$f(2.5,4.25)=3.367844$$

الحل:

$$\Delta x=5\times10^{-2},\Delta y=5\times10^{-3}$$

لحساب الخطأ المطلق:

$$\Delta f\le\Delta x\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2.5,4.25)}+\Delta y\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2.5,4.25)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{e^x}{x.y.ln^2(y)}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(x-1).e^x}{x^2.ln\,y}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2.5,4.25)}=0.5476703 \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2.5,4.25)}=2.0207065$$

$$\Delta f\le(5\times10^{-2})(2.0207065)+(5\times10^{-3})(0.5476703)=0.1037736715$$

فيكون الخطأ النسبي:

$$R_f=\frac{\Delta f}{f(1.009,2.1,3.05)}\le\frac{0.1037736715}{3.367844}=0.03081308742$$

2. طريقة أولر: $y'=x+y$

$h=0.2$, مع الشرط الابتدائي $y_0(0)=0$

$$y_{n+1}=y_n+h.f(x_n,y_n)$$

$$y_1=y_0+h.f(x_0,y_0)=0+0.2(0+0)=0$$
$$y_2=y_1+h.f(x_1,y_1)=0+0.2(0.2+0)=0.04$$
$$y_3=y_2+h.f(x_2,y_2)=0.04+0.2(0.4+0.04)=0.128$$
$$y_4=y_3+h.f(x_3,y_3)=0.128+0.2(0.6+0.128)=0.2736$$

(24) درجة

السؤال الثاني:

الحل:

$$h = x_{i+1} - x_i = 0.1$$

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1					
		0.0948				
0.1	1.0948		−0.0109			
		0.0839		−0.0008		
0.2	1.1787		−0.0117		−0.0001	
		0.0722		−0.0009		0.0005
0.3	1.2509		−0.0126		0.0004	
		0.0596		−0.0005		
0.4	1.3105		−0.0131			
		0.0465				
0.5	1.3570					

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0}{0.1} = \frac{x}{\frac{1}{10}} = 10x$$

.2 عندما $x = 0.15$ فإن $\alpha = 10x = 10(0.15) = 1.5$

$$P_3(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0$$

$$f(0.15) \approx P_3(0.15) = 1 + \binom{1.5}{1}(0.0948) + \binom{1.5}{2}(-0.0109) + \binom{1.5}{3}(-0.0008)$$

$$f(0.15) \approx P_3(0.15) = 1.1381625$$

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\Delta^j y_1$$

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_1\right]$$

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{0.1}\left[0.0722 - \frac{1}{2}(-0.0126) + \frac{1}{3}(-0.0005)\right] = 0.78333$$

$$\int_0^{0.5} f(x).dx \approx h\sum_{i=0}^{4} y_i = 0.1(1+1.0948+1.1787+1.2509+1.3105)$$
$$= 0.58349$$

$$E \leq \frac{b-a}{2}.h.M; M = max\{|\acute{f}(a)|, |\acute{f}(b)|\}$$

$$E \leq \frac{0.5}{2}.(0.1).M; M = max\{|\acute{f}(0)|, |\acute{f}(0.5)|\}$$

1. **السؤال الثالث:** أجب عن أحد السؤالين الآتيين: **(10)** درجة

1. . أوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_1(x)$ بطريقة المربعات الصغرى للدالة المعطاة بالجدول الآتي:

x	-1	1	1.5	2.5
y	-3	1	2	3

2. الحل: عدد النقاط 4 و منه $n = 3$

تقريبات المربعات الخطية $m = 1$ أي إيجاد $P_1(x) = a_0 + a_1x$

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i{}^0 + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i{}^1 = \sum_{i=0}^{3} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i{}^1 + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i{}^2 = \sum_{i=0}^{3} y_i x_i{}^1$$

$\sum_{i=0}^{3} y_i = 3$ و $\sum_{i=0}^{3} x_i{}^1 = 4$ و $\sum_{i=0}^{3} x_i{}^0 = 4$

و $\sum_{i=0}^{3} x_i{}^2 = 10.5$ و $\sum_{i=0}^{3} y_i x_i{}^1 = 14.5$

و منه تكون جملة المعادلتين: $\begin{cases} 4a_0 + 4a_1 = 3 \\ 4a_0 + 10.5a_1 = 14.5 \end{cases}$ و حلهما

$a_0 = -1.019, a_1 = 1.769$

و بالتالي: $P_1(x) = -1.019 + 1.769x$

2. لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2$$

حيث: $x^{(0)} = (1,0,0)$

الحل:

نكتب جملة المعادلات بالشكل:

$$x_1 = \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}$$
$$x_2 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}$$
$$x_3 = -\frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5}$$

نجد: $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

و يكون: $\|\alpha\| = max_{1\le i\le 3}(\sum_{j=1}^{3}|\alpha_{ij}|) = max\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{3} < 1$

فالجملة قابلة للحل و تكون العلاقة التكرارية $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$ أي:

$$\begin{bmatrix} {x_1}^{(k+1)} \\ {x_2}^{(k+1)} \\ {x_3}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^{(k)} \\ {x_2}^{(k)} \\ {x_3}^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

و منه:

$$\begin{bmatrix} {x_1}^{(1)} \\ {x_2}^{(1)} \\ {x_3}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^{(0)} \\ {x_2}^{(0)} \\ {x_3}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع: **(20)** درجة

1. أوجد القيمة التقريبية لجذر المعادلة $x^3 - x - 1 = 0$

(طريقة تنصيف المجال حيث $\varepsilon = 0.05$)

(10°)

نلاحظ أن $f(1).f(2) = (-1)(5) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1,2]$ ومنه:

$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \Leftarrow f(1.5) = 0.875$ و $|f(1.5)| > \varepsilon$

$f(1).f(1.5) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1,1.5]$ ومنه:

$x_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25 \Leftarrow f(1.25) = -0.296875$ و $|f(1.25)| > \varepsilon$

$f(1.5).f(1.25) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1.25,1.5]$ ومنه:

$x_2 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375 \Leftarrow f(1.375) = 0.22461$ و $|f(1.375)| > \varepsilon$

$f(1.375).f(1.25) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1.25,1.375]$ ومنه:

$x_3 = \frac{1.25+1.375}{2} = 1.3125 \Leftarrow f(1.3125) = -0.051514$ و $|f(1.3125)| > \varepsilon$

$f(1.375).f(1.3125) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1.3125,1.375]$ ومنه:

$x_4 = \frac{1.3125+1.375}{2} = 1.34375 \Leftarrow f(1.34375) = 0.081636$ و

$|f(1.34375)| > \varepsilon$

$f(1.34375).f(1.3125) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1.3125,1.34375]$ ومنه:

$x_5 = \frac{1.3125+1.34375}{2} = 1.328125 \Leftarrow f(1.328125) = 0.014576$ و

$|f(1.328125)| < \varepsilon$

فالجذر التقريبي المقبول $\bar{x} = x_5$

ملاحظة: تقبل الإجابة $\bar{x} = x_4$ في حال استخدم الطالب المعيار:

$|x_4 - x_3| = 0.03125 < 0.05 = \varepsilon$

2. لتكن لدينا جملة المعادلتين $\begin{cases} x - \sin y = 0 \\ y - \cos x = 0 \end{cases}$

الحل:

$x = \sin y = F(x, y)$ و $y = \cos x = G(x, y)$

$F_x = 0, F_y = \cos y$ و $G_x = -\sin x\, , G_y = 0$ بوضوح نجد أن:

$|F_x|_{(x_0,y_0)} + |F_y|_{(x_0,y_0)} < 1$ و $|G_x|_{(x_0,y_0)} + |G_y|_{(x_0,y_0)} < 1$

نكتب علاقتي التكرار: $y_{n+1} = G(x_n, y_n), n = 0,1,2,..$ و $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$

$x_1 = \sin y_0 = 0.84147\, , y_1 = \cos x_0 = 0.5403$

<u>انتهت السلم</u>

مدرس المقرر: أ.د. نضال إبراهيم حسن

طرطوس 2025

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان التحليل العددي
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2025

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: 70 درجة
المدة: ساعتان

****

السؤال الأول: (16) درجة

1. احسب الخطأ المطلق و النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة: $f(x,y,z)=\frac{ln(x).z}{y}$ حيث: $x=1.009\ ,y=2.1\ ,z=3.05$ أعداد مدورة.

2. استخدم طريقة رونج _ كوتا من المرتبة الرابعة لإيجاد الحل التقريبي y_1 للمعادلة التفاضلية $y'=x+y$ علماً أن $y(1)=1$ و $h=0.1$ عند النقطة $x=1.1$.

السؤال الثاني: (24) درجة

لتكن الدالة $f(x)=e^x$ و المعطاة وفق الجدول الآتي:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	1.2214	1.49182	1.82212	2.22554	2.71828

1. اكتب جدول الفروق الأمامية للدالة المعطاة. (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية)

2. احسب قيمة تقريبية للدالة عند $x=0.1$ باستخدام حدودية استيفاء نيوتن من الدرجة الثانية $P_2(x)$ الموافقة لهذه الدالة (دون إيجادها) و احسب الخطأ المرتكب.

3. احسب قيمة تقريبية للمشتق $f(x)$ عند $x=0.2$.

السؤال الثالث: أجب عن أحد السؤالين الآتيين: (10) درجة

1. لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$4x_1+2x_2+x_3=11$$
$$-x_1+2x_2=3$$
$$2x_1+x_2+4x_3=16$$

أوجد الجذر $x^{(1)}$ حيث: $x^{(0)}=(1,1,1)$.

2. تحقق من كون كل من الخيارين الآتيين خياراً موفقاً أم لا، لحل المعادلة الآتية $x^3-2x^2+x-10=0$ بطريقة النقطة الثابتة. $g_1(x)=\sqrt{\frac{x^3+x-10}{2}}$ ، $g_2(x)=\sqrt[3]{2x^2-x+10}$

السؤال الرابع: أجب عن السؤالين الآتيين: (20) درجة

1. لتكن لدينا الدالة $y=\sin x$ و المعطاة وفق الجدول الآتي:

x	30	45	60
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

أوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_2(x)$ لهذه الدالة بطريقة لاغرانج.

2. لتكن لدينا الدالة $y=f(x)$ المعطاة وفق الجدول الآتي:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	0.961	0.852	0.698	0.527	0.368

أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 f(x).dx$ بطريقة أشباه المنحرفات، هل يمكن إيجاد هذه القيمة باستخدام طريقة سيمبسون؟

انتهت الأسئلة

طرطوس 2025/ 2 /25

مع تمنياتنا بالنجاح و التوفيق

مدرس المقرر: أ.د. نضال إبراهيم حسن

جامعة طرطوس　　　　سلم تصحيح التحليل العددي

كلية العلوم　　　　لطلاب السنة الثالثة

قسم الفيزياء　　　　الدورة الفصلية الثانية 2024

****

السؤال الأول: (16) درجة

1. احسب الخطأ المطلق و النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة: $f(x,y,z)=\frac{ln(x).z}{y}$ حيث: $x=1.009$, $y=2.1$, $z=3.05$ أعداد مدورة.

(8)

الحل: $f(1.009,2.1,3.05)=0.013012957$

$\Delta x=5\times10^{-4},\Delta y=5\times10^{-2},\Delta z=5\times10^{-3}$

لحساب الخطأ المطلق:

$$\Delta f\le\Delta x\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1.009,2.1,3.05)}+\Delta y\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1.009,2.1,3.05)}+\Delta z\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1.009,2.1,3.05)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{x.y},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{ln(x).z}{-y^2},\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{ln(x)}{y}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1.009,2.1,3.05)}=1.439426117$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1.009,2.1,3.05)}=0.0061966461$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1.009,2.1,3.05)}=0.004266543$$

$$\Delta f\le(5\times10^{-4})(1.439426117)+(5\times10^{-2})(0.0061966461)+(5\times10^{-3})(0.004266543)=0.001050877$$

فيكون الخطأ النسبي:

$$R_f=\frac{\Delta f}{f(1.009,2.1,3.05)}\le\frac{0.001050877}{0.013012957}=0.080756203$$

2. استخدم طريقة رونج _ كوتا من المرتبة الرابعة لإيجاد الحل التقريبي y_1 للمعادلة التفاضلية $y'=x-y$ علماً أن $y(0)=2$ و $h=0.1$.

الحل:

(8)

$$y_1=y(0.1)=y_0+\frac{1}{6}\left(K_1^{(0)}+2\left(K_2^{(0)}+K_3^{(0)}\right)+K_4^{(0)}\right)$$

$$K_1^{(0)}=h.f(x_0,y_0)=0.1(x_0-y_0)=0.1(0-2)=-0.2$$

$$K_2^{(0)}=h.f\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}\right)=0.1\left(\frac{0.1}{2}-\left(2+\frac{-0.2}{2}\right)\right)=-0.185$$

$$K_3^{(0)}=h.f\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}\right)=0.1\left(\frac{0.1}{2}-\left(2+\frac{-0.185}{2}\right)\right)=-0.18575$$

$$K_4^{(0)}=h.f\left(x_0+h,y_0+K_3^{(0)}\right)=0.1\left(0.1-(2-0.18575)\right)=-0.171425$$

$$y_1=y(0.1)=2+\frac{1}{6}(-0.2+2(-0.185-0.18575)-0.171425)$$
$$=1.8145125$$

السؤال الثاني: **(24)** درجة

لتكن الدالة $y = 3^x$ و المعطاة وفق الجدول الاتي:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	1.24573	1.55184	1.93318	2.40822	3

1. اكتب جدول الفروق الأمامية للدالة المعطاة. (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية.)
2. أوجد قيمة تقريبية للمشتق $\acute{f}(x)$ عند $x = 0.2$.
3. أوجد بطريقة المستطيلات القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 f(x).dx$ ، و احسب الخطأ المرتكب.

الحل:

$$h = x_{i+1} - x_i = 0.2, \forall i \in \overline{0,5}$$

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1					
		0.24573				
0.2	1.24573		0.06038			
		0.30611		0.01485		
0.4	1.55184		0.07523		0.00362	
		0.38134		0.01847		0.00095
0.6	1.93318		0.0937		0.00457	
		0.47504		0.02304		
0.8	2.40822		0.11674			
		0.59178				
1	3					

(6)

$$\acute{f}(x_1) \approx \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j \frac{1}{j+1}\Delta^{j+1}y_1$$

$$\acute{f}(x_1) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_1\right]$$

(6)

$$\acute{f}(x_1) \approx \frac{1}{0.2}\left[0.30611 - \frac{1}{2}(0.07523) + \frac{1}{3}(0.01847) - \frac{1}{4}(0.00457)\right]$$
$$= 1.36754$$

$\int_0^1 3^x.dx \approx h\sum_{i=0}^{4} y_i = 0.2(1 + 1.24573 + 1.55184 + 1.93318 + 2.40822) = 1.62779$ (6°)

$$\acute{f}(x) = ln(3).3^x \Longrightarrow \begin{cases} \acute{f}(x_0) = \acute{f}(0) = ln(3) \\ \acute{f}(x_5) = \acute{f}(1) = 3.ln(3) \end{cases}$$ (6°)

$$M = max\{|3.ln(3)|, |ln(3)|\} = 3.ln(3)$$

$$E \le \frac{b-a}{2}.h.M = \frac{1-0}{2}.(0.2).(3.ln(3)) = 0.32958$$

السؤال الثالث: أجب عن أحد السؤالين الآتيين: (10) درجة

1. لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ المعطاة وفق الجدول الآتي:

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-2	1	3	8

أوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_1(x)$ لهذه الدالة بطريقة المربعات الصغرى.

الحل:

عدد النقاط 5 و منه $n = 4$

تقريبات المربعات الخطية $m = 1$ أي إيجاد $P_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$a_0 \sum_{i=0}^{4} x_i{}^0 + a_1 \sum_{i=0}^{4} x_i{}^1 = \sum_{i=0}^{4} y_i$$

(3°)

$$a_0 \sum_{i=0}^{4} x_i{}^1 + a_1 \sum_{i=0}^{4} x_i{}^2 = \sum_{i=0}^{4} y_i x_i{}^1$$

(6°) $\sum_{i=0}^{4} x_i{}^0 = 5$ و $\sum_{i=0}^{4} x_i{}^1 = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$ و $\sum_{i=0}^{4} y_i = 7$

$\sum_{i=0}^{4} x_i{}^1 = 0$ و $\sum_{i=0}^{4} x_i{}^2 = 10$ و $\sum_{i=0}^{4} y_i x_i{}^1 = 27$

و منه تكون جملة المعادلتين: $\begin{cases} 5a_0 = 7 \\ 10a_1 = 27 \end{cases}$ و حلهما $a_0 = \frac{7}{5}, a_1 = \frac{27}{10} = 2.7$ (1°)

و بالتالي: $P_1(x) = \frac{7}{5} + 2.7x$

2. استخدم طريقة هورنر لحساب قيم كثيرة الحدود عند $x = 3$ و حساب قيم جميع مشتقاتها في نفس النقطة حيث $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 7$.

الحل:

لحساب $P(3)$:

(2°)

	1	−5	5	5	−7
$x=3$		3	−6	−3	6
	1	−2	−1	2	−1=P(3)

من الجدول نجد: $P(3) = -1$

لحساب قيمة المشتق الأول عند $x = 3$:

(2°)

	1	−2	−1	2
$x=3$		3	3	6
	1	1	2	$8=\frac{\acute{P}(3)}{1!}$

و بالتالي يكون $\acute{P}(3) = 8$

لحساب قيمة المشتق الثاني عند $x = 3$:

(2°)

	1	1	2
$x=3$		3	12
	1	4	$14=\frac{P^{(2)}(3)}{2!}$

و بالتالي يكون $P^{(2)}(3) = 14 \times 2! = 28$

لحساب قيمة المشتق الثالث عند $x = 3$:

(2°)

	1	4
$x=3$		3
	1	$7=\frac{P^{(3)}(3)}{3!}$

و منه: $P^{(3)}(3) = 7 \times 3! = 7 \times 6 = 42$

لحساب قيمة المشتق الرابع عند $x = 3$:

(2°)

	1
$x=3$	
	$1=\frac{P^{(4)}(3)}{4!}$

و منه: $P^{(4)}(3) = 1 \times 4! = 24$

السؤال الرابع: أجب عن السؤالين الآتيين: **(20)** درجة

1. أوجد الحل التقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ و الموجود في المجال $[3,4]$ مستخدماً طريقة نيوتن رافسون حيث: $f(x) = x^3 - 2x - 30$ و $\varepsilon = 0.0005$ (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية). $\boxed{15°}$

الحل:

$f(x) = x^3 - 2x - 30$ و $\varepsilon = 0.0005$

$f(3) = -9, f(4) = 26$

بما أن $f(3).f(4) < 0$

نضع $x_0 = \frac{3+4}{2} = 3.5$، و لدينا $\acute{f}(x) = 3x^2 - 2$ (3°)

$f(x_0) = (3.5)^3 - 2(3.5) - 30 = 5.875\,, \acute{f}(x_0) = 3(3.5)^2 - 2 = 34.75$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\acute{f}(x_0)} = 3.33093$ و $|x_1 - x_0| = 0.16907 > \varepsilon$ (2°)

$f(x_1) = (3.33093)^3 - 2(3.33093) - 30 = 0.29512$

$\acute{f}(x_1) = 3(3.33093)^2 - 2 = 31.28528$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\acute{f}(x_1)} = 3.32149\,, |x_2 - x_1| = 0.00944 > \varepsilon$ (2°)

$f(x_2) = 0.00068\,, \acute{f}(x_2) = 31.09688$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{\acute{f}(x_2)} = 3.32146\,, |x_3 - x_2| = 0.00003 < 0.0005$ (2°)

فالحل التقريبي المقبول هو $\bar{x} = 3.3214$ (1°)

2. لتكن لدينا جملة المعادلتين:

$$x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0$$
$$x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0$$

أوجد بطريقة التقريبات المتتالية الجذر (x_1, y_1) حيث $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ $\boxed{10°}$

الحل:

نضع $x = \frac{1}{6}(x^3 + y^3) + \frac{1}{2} = F(x,y)$ و $y = \frac{1}{6}(x^3 - y^3) + \frac{1}{3} = G(x,y)$ (2°)

نجد: $F_x = \frac{x^2}{2}\,, F_y = \frac{y^2}{2}$ و يكون

$|F_x|_{(x_0,y_0)} + |F_y|_{(x_0,y_0)} = \frac{0.25}{2} + \frac{0.25}{2} = 0.25 < 1$ (2°)

$G_x = \frac{x^2}{2}\,, G_y = -\frac{y^2}{2}$ و يكون

$|G_x|_{(x_0,y_0)} + |G_y|_{(x_0,y_0)} = \frac{0.25}{2} + \frac{0.25}{2} = 0.25 < 1$ (2°)

الخيار موفق بالتالي نكتب علاقتي التكرار بالشكل الآتي:

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n{}^3 + y_n{}^3) + \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n{}^3 - y_n{}^3) + \frac{1}{3}$$ (2)

فيكون لدينا:

$$y_1 = \frac{1}{6}(x_0{}^3 - y_0{}^3) + \frac{1}{3} = 0.333 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{1}{6}(x_0{}^3 + y_0{}^3) + \frac{1}{2} = 0.542$$ (2)

طرطوس 21/7/2024 مدرس المقرر: أ.د. نضال إبراهيم حسن

جامعة طرطوس	امتحان التحليل العددي	اسم الطالب:
كلية العلوم	لطلاب السنة الثالثة	الدرجة العظمى: 70 درجة
قسم الفيزياء	الدورة الفصلية الأولى لعام 2023/2024	المدة: ساعتان

****

السؤال الأول: (16) درجة

1. أوجد الخطأ المطلق و النسبي في حساب قيمة الدالة $f(x,y,z)=\frac{x^2.y}{z}$ حيث: $x=1.4\ ,y=3.21\ ,z=6.4$ أعداد مدورة.

2. اوجد الحل y_1 للمعادلة التفاضلية $y'=x.y$ بطريقة تايلور مستخدماً خمسة حدود من منشور تايلور علماً أن $y(0)=1$ و $h=0.1$.

السؤال الثاني: لتكن لدينا الدالة $y=f(x)$ المعطاة وفق الجدول الآتي: (24) درجة

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0.98007	0.92106	0.82534	0.6967	0.54030

أجب عن الأسئلة الآتية مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية.

1. اكتب جدول الفروق الأمامية للدالة المعطاة. 2. أوجد قيمة تقريبية للدالة y عند $x=0.7$ باستخدام حدودية استيفاء نيوتن من الدرجة الثالثة $P_3(x)$ الموافقة لهذه الدالة(دون إيجادها) ثم احسب الخطأ المرتكب. 3. أوجد القيمة التقريبية للمشتق $y'(0.45)$ مستفيداً من حدودية استيفاء نيوتن $P_3(x)$. 4. أوجد بطريقة أشباه المنحرفات القيمة التقريبية للتكامل $\int_{0.2}^{1} f(x).dx$.

السؤال الثالث: اختر أحد السؤالين الآتيين: (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية) (10) درجات

1. لتكن لدينا الدالة $y=e^x$ و المعرفة عند النقاط $x_0=-1, x_1=0, x_2=1$، اكتب جدول القيم لها ثم أوجد كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة لاغرانج.

2. لتكن لدينا جملة المعادلتين $\begin{cases} x-\sin y=0 \\ y-\cos x=0 \end{cases}$ أوجد الجذر (x_1,y_1) لهاتين المعادلتين بطريقة التقريبات المتتالية علماً أن الحل الابتدائي $(x_0,y_0)=(1,1)$.

السؤال الرابع: (20) درجة

1. أوجد القيمة التقريبية لجذر المعادلة $x^3-x-1=0$ بطريقة تنصيف المجال حيث $\varepsilon=0.05$ (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية)

2. لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$4x_1+x_2-2x_3=1$$
$$x_1+3x_2-x_3=8$$
$$x_1-7x_2+10x_3=2$$

أوجد الجذر $x^{(2)}$ حيث: $x^{(0)}=(1,3,2)$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتنا بالنجاح و التوفيق
13/2/2024

مدرس المقرر: أ.د. نضال إبراهيم حسن

جامعة طرطوس سلم تصحيح مقرر التحليل العددي

كلية العلوم

قسم الفيزياء الدورة الفصلية الأولى لعام 2023/2024

****

السؤال الأول: (16) درجة

1. أوجد الخطأ المطلق و النسبي في حساب قيمة الدالة $f(x,y,z)=\frac{x^2.y}{z}$ حيث: $x=1.4\ ,y=3.21, z=6.4$ أعداد مدورة. (8°)

الحل: لدينا $f(1.4,3.21,6.4)=\mathbf{0.9830625}$

طريقة أولى:

لحساب الخطأ النسبي:

$$\Delta x=5\times10^{-2},\Delta y=5\times10^{-3}\ ,\Delta z=5\times10^{-2}$$

الدالة تكتب بالشكل $f(x,y,z)=x^2.y.z^{-1}$ و منه:

$$R_f\le|2|R_x+|1|R_y+|-1|R_z=2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)+\left(\frac{\Delta z}{z}\right)$$

$$R_f\le2\left(\frac{5\times10^{-2}}{1.4}\right)+\left(\frac{5\times10^{-3}}{3.21}\right)+\left(\frac{5\times10^{-2}}{6.4}\right)=0.080798704$$

فيكون الخطأ المطلق:

$$\Delta f\le f(1.4,3.21,6.4).R_f=(0.9830625)(0.080798704)=0.079430176$$

طريقة ثانية:

لحساب الخطأ المطلق:

$$\Delta f\le\Delta x\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1.4,3.21,6.4)}+\Delta y\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1.4,3.21,6.4)}+\Delta z\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1.4,3.21,6.4)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{x^2.y}{z^2}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2}{z}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy}{z}$$

$$\Delta f=(5\times10^{-2})|1.404375|+(5\times10^{-3})|0.30625|+(5\times10^{-2})|-0.153603516|=0.079430176$$

فيكون الخطأ النسبي: $R_f=\frac{\Delta f}{f(8,5,10)}\le\frac{0.079430176}{(0.9830625)}=0.080798704$

طريقة ثالثة:

لدينا:

$$\Delta x=5\times10^{-2},\Delta y=5\times10^{-3}\ ,\Delta z=5\times10^{-2}$$

فيكون $R_1=\frac{\Delta x}{x}=0.035714286$

$$R_2=\frac{\Delta y}{y}=0.001557632$$

$R_3 = \frac{\Delta z}{z} = 0.0078125$

فيكون الخطأ النسبي في حساب الجداء $x^2.y$:

$R_4 \le 2R_1 + R_2 = 0.072986204$

و يكون الخطأ النسبي في حساب القسمة $\frac{x^2.y}{z}$: $R_f \le R_4 + R_3 = 0.080798704$

فيكون الخطأ المطلق:

$$\Delta f \le f(1.4,3.21,6.4).R_f = (0.9830625)(0.080798704) = 0.079430176$$

.2 اوجد الحل y_1 للمعادلة التفاضلية $y' = x.y$ بطريقة تايلور مستخدماً خمسة حدود من منشور تايلور علماً أن $y(0) = 1$ و $h = 0.1$. (8°)

الحل:

$y' = x.y$ و منه: $y'' = y + x.y'$

$$y''' = y' + y' + x.y'' = 2y' + x.y''$$
$$y^{(4)} = 2y'' + y'' + x.y''' = 3y'' + x.y'''$$
$$y'(x_0) = y'(0) = x_0y_0 = 0$$
$$y''(x_0) = y''^{(0)} = 1 + (0)(0) = 1$$
$$y'''(x_0) = y'''(0) = 2(0) + (0)(1) = 0$$
$$y^{(4)}(x_0) = 3(1) + (0)(0) = 3$$

منشور تايلور:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_0)$$
$$y_1 = 1 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{6}(0) + \frac{(0.1)^4}{24}(3) = 1.005$$

السؤال الثاني: لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ المعطاة وفق الجدول الآتي: **(24)** درجة

.1 اكتب جدول الفروق الأمامية للدالة

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0.98007	0.92106	0.82534	0.6967	0.54030

المعطاة. .2 . أوجد قيمة تقريبية للدالة y عند $x = 0.7$ باستخدام حدودية استيفاء نيوتن من الدرجة الثالثة $P_3(x)$ الموافقة لهذه الدالة (دون إيجادها) ثم احسب الخطأ المرتكب.3 . أوجد القيمة التقريبية للمشتق $y'(0.45)$ مستفيداً من حدودية استيفاء نيوتن $P_3(x)$. .4 أوجد بطريقة أشباه المنحرفات القيمة التقريبية للتكامل $\int_{0.2}^{1} f(x).dx$. (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية).

الحل:

.1 (6°)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$

0.2	0.98007				
		−0.05901			
0.4	0.92106		−0.03671		
		−0.09572		0.00379	
0.6	0.82534		−0.03292		0.00137
		−0.12864		0.00516	
0.8	0.6967		−0.02776		
		−0.1564			
1	0.54030				

$x_0 = 0.2 \quad \& \quad h = x_{i+1} - x_i = 0.2$

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0.2}{0.2} = \frac{x - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 5\left(x - \frac{1}{5}\right) = 5x - 1$$

2. عندما $x = 0.7$ فإن $\alpha = 5x - 1 = 5(0.7) - 1 = 2.5$ **(6°)**

$$P_3(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0$$

$$f(0.7) \approx P_3(2.5) = 0.98007 + \binom{2.5}{1}(-0.05901) + \binom{2.5}{2}(-0.03671) + \binom{2.5}{3}(0.00379)$$

$$f(0.7) \approx P_3(2.5) = 0.764898$$

و الخطأ المرتكب هو: $E = \binom{\alpha}{4}\Delta^4 y_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\Delta^4 y_0$

$$\alpha = 5x - 1 = 5(0.7) - 1 = 2.5$$

$$E = \binom{2.5}{4}\Delta^4 y_0 = \left|\frac{2.5(1.5)(0.5)(-0.5)}{4!}(0.00137)\right| = 0.000053515$$

3. $\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.45 - 0.4}{0.2} = 0.25$ **(6°)**

$$f'(0.45) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_0\right]$$

$$= \frac{1}{0.2}[-0.09572 + (-0.25)(-0.03292) + (0.11458)(0.00516)]$$

$$= -0.43449$$

4. المساحة التقريبية بطريقة شبه المنحرف: **(6°)**

$$S \approx \int_{0.2}^{1} f(x).dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4]$$

$$\int_{0.2}^{1} f(x).dx = \frac{0.2}{2}[0.98007 + 2(0.92106 + 0.82534 + 0.6967) + 0.54030] = 0.64066$$

السؤال الثالث: اختر أحد السؤالين الآتيين: (10) درجات

1. لتكن لدينا الدالة $y = e^x$ و المعرفة عند النقاط $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$، اكتب جدول القيم لها ثم أوجد كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة لاغرانج. (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية)

الحل:

x_i	-1	0	1
y_i	$\frac{1}{e}$	1	e

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}(x^2-x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}(x^2+x)$$

$$p_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(x^2-x)\left(\frac{1}{e}\right) + (1-x^2)(1) + \frac{1}{2}(x^2+x)(e)$$

$$p_2(x) = \frac{(e-1)^2}{2e}x^2 + \frac{e^2-1}{2e}x + 1 = 0.54308x^2 + 1.1752x + 1$$

2. **لتكن لدينا جملة المعادلتين $\begin{cases} x - \sin y = 0 \\ y - \cos x = 0 \end{cases}$ أوجد الجذر (x_1, y_1) لهاتين المعادلتين بطريقة التقريبات المتتالية علماً أن الحل الابتدائي $(x_0, y_0) = (1, 1)$.** (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية)

الحل:

$$y = \cos x = G(x,y) \quad \text{و} \quad x = \sin y = F(x,y)$$

بوضوح نجد أن: $G_x = -\sin x , G_y = 0$ و $F_x = 0, F_y = \cos y$

$$|G_x|_{(x_0,y_0)} + |G_y|_{(x_0,y_0)} < 1 \quad \text{و} \quad |F_x|_{(x_0,y_0)} + |F_y|_{(x_0,y_0)} < 1$$

نكتب علاقتي التكرار : $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$ و $y_{n+1} = G(x_n, y_n), n = 0,1,2,..$

$$x_1 = \sin y_0 = 0.84147 \, , y_1 = \cos x_0 = 0.5403$$

السؤال الرابع: (20) درجة

1. **أوجد القيمة التقريبية لجذر المعادلة $x^3 - x - 1 = 0$ بطريقة تنصيف المجال حيث $\varepsilon = 0.05$** (مكتفياً بالتقريب لخمسة أرقام عشرية) (10°)

نلاحظ أن $f(1).f(2) = (-1)(5) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1,2]$ ومنه:

$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \Leftarrow f(1.5) = 0.875$ و $|f(1.5)| > \varepsilon$

$f(1).f(1.5) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1,1.5]$ ومنه:

$x_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25 \Leftarrow f(1.25) = -0.296875$ و $|f(1.25)| > \varepsilon$

$f(1.5).f(1.25) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1.25,1.5]$ ومنه:

$x_2 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375 \Leftarrow f(1.375) = 0.22461$ و $|f(1.375)| > \varepsilon$

$f(1.375).f(1.25) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1.25,1.375]$ ومنه:

$x_3 = \frac{1.25+1.375}{2} = 1.3125 \Leftarrow f(1.3125) = -0.051514$ و $|f(1.3125)| > \varepsilon$

$f(1.375).f(1.3125) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1.3125,1.375]$ ومنه:

$x_4 = \frac{1.3125+1.375}{2} = 1.34375 \Leftarrow f(1.34375) = 0.081636$ و

$|f(1.34375)| > \varepsilon$

$f(1.34375).f(1.3125) < 0$ فالجذر يقع في المجال $[1.3125,1.34375]$ ومنه:

$x_5 = \frac{1.3125+1.34375}{2} = 1.328125 \Leftarrow f(1.328125) = 0.014576$ و

$|f(1.328125)| < \varepsilon$

فالجذر التقريبي المقبول $\bar{x} = x_5$

ملاحظة: تقبل الإجابة $\bar{x} = x_4$ في حال استخدم الطالب المعيار:

$|x_4 - x_3| = 0.03125 < 0.05 = \varepsilon$

2. لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية: (10°)

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - 7x_2 + 10x_3 &= 2 \end{aligned}$$

أوجد الجذر $x^{(2)}$ حيث: $x^{(0)} = (1,3,2)$.

الحل:

نكتب جملة المعادلات بالشكل:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4} \\ x_2 &= -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3} \\ x_1 &= -\frac{1}{10}x_1 + \frac{7}{10}x_2 + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

نجد: $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

و يكون: $\|\alpha\| = max_{1\le i\le 3}\left(\sum_{j=1}^{3}|\alpha_{ij}|\right) = max(0.75,0.167,0.8) = 0.8 < 1$

فالجملة قابلة للحل و تكون العلاقة التكرارية $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$ أي:

و منه:
$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 2.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 3.233 \\ 2.25 \end{bmatrix}$$

انتهى السلّم

مدرس المقرر: أ.د. نضال إبراهيم حسن

جامعة طرطوس	تحليل عددي سنة ثالثة فيزياء	الاسم
كلية العلوم	الفصل الدراسي الثاني ٢٠٢٣/٢٠٢٢	الدرجة ٧٠

السؤال الأول: (٢٠ درجة)

١- لتكن لدينا الدالة $f(x,y,z)=\dfrac{\ln(x)z}{y}$ والمطلوب: أ- أحسب قيمة الدالة في النقطة $(x,y,z)=(1.009,2.1,3.05)$ (اعداد مدورة)

ب- احسب الخطأ المطلق والنسبي المرتكبين في حساب القيمة السابقة

٢- استخدم طريقة رونج – كوتا لايجاد الحل التقريبي y_1 للمعادلة التفاضلية : $y'=x.y^{\frac{1}{3}}$ والشرط الابتدائي $y(1)=1$ ، $h=0.1$

السؤال الثاني: (٣٠ درجة)

١- لتكن لدينا الدالة $y=\sin(x^2)$ المعطاة بالجدول التالي :

x_i	٠	٠,٥	٣	٥
y_i	٠	٠,٢٤٧٤٠٤	٠,٤١٢١١٨	-٠,١٣٢٣٥٢

والمطلوب: اوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_1(x)$ بطريقة المربعات الصغرى

٢- نتمم الجدول للدالة السابقة بالشكل :

x_i	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥	٣
y_i	٠	٠,٢٤٧٤٠٤	٠,٨٤١٤٧	٠,٧٧٨٠٧	-٠,٧٥٦٨٠٢	-٠,٠٣٣١٧	٫٤١٢١١٨

والمطلوب : ا- اوجد جدول الفروق الامامية للدالة ، ب- اوجد القيمة التقريبية للمشتق $y'(0.5)$ باستخدام كثيرة حدود نيوتن الممكنة (دون ايجادها) ، واحسب الخطأ المرتكب ، ج- اوجد بطريقة المستطيلات، القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^3 f(x)dx$ ، واحسب الخطأ المرتكب.

السؤال الثالث (٢٠ درجة)

١- لتكن لدينا الدالة $f(x)=x^4-2x-1$ والمطلوب : أ- اوجد بطريقة هورنر، قيمة الدالة وقيمة جميع مشتقاتها في النقطة $x=1.5$ ب- اوجد بطريقة نيوتن- رافسون الجذر التقريبي للمعادلة $f(x)=0$ معتبرا ، $x_0=1.5$ و $\varepsilon=0.003$

٢- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية

$$\begin{aligned}3x_1+x_2+x_3&=5\\ x_1+3x_2+x_3&=5\\ x_1+x_2+3x_3&=5\end{aligned}$$

والمطلوب: أ- أدرس وجود حل للجملة، ب- أوجد بطريقة جاكوبي الجذر $X^{(2)}$ اذا علمت أن $X^{(0)}=\beta$

طرطوس في ٣ - ٨ - ٢٠٢٣

مدرس المقرر أ.د نضال إبراهيم حسن

سلم توزيع الدرجات لمقرر تحليل عددي س٣ فيزياء - الفصل الثاني ٢٠٢٣ / ٢٠٢٢

$\boxed{20}$ عشرون

إجابة السؤال الأول : ١- أ) (10)

$$f(x,y,z) = f(1.009, 2.1, 3.05) = \frac{[\ln(1.009)](3.05)}{2.1}$$

$$= 0.013012957$$

$$\delta_x \leq 5\times10^{-4}, \quad \delta_y \leq 5\times10^{-2}, \quad \delta_z \leq 5\times10^{-3}$$

$$(\delta_f)_{max} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta_y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\delta_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{x\cdot y} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \frac{3.05}{2.1189} = 1.439426117$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\ln(x)\cdot z}{y^2} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{-0.027327211}{4.41}\right| = 0.0061966461$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\ln(x)}{y} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| = \frac{0.008959741 3}{2.1} = 0.004266543$$

$$(\delta_f)_{max} \leq 1.439426117\times5\times10^{-4} + 0.0061966461\times5\times10^{-2} + 0.0042665\times10^{-3}$$

$$= 0.0007197 13 + 0.000213327 + 0.000309832$$

$$= 0.001050877$$

$$(e_f)_{max} \leq \frac{(\delta_f)_{max}}{|f|} = \frac{0.001050877}{0.013012957} = 0.080756203$$

ب) (10)

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[K_1^{(0)} + 2(K_2^{(0)} + K_3^{(0)}) + K_4^{(0)}\right]$$

$$K_1^{(0)} = h\,f(x_0, y_0) = (0.1)(1)(1^{\frac{1}{3}}) = 0.1$$

$$K_2^{(0)} = h\,f(x_0 + h/2, K_1^{(0)}/2) = (0.1)(1.05)(1.05)^{\frac{1}{3}} = 0.106721617$$

$$K_3^{(0)} = h\,f(x_0 + h/2, K_2^{(0)}/2) = (0.1)(1.05)(1.05336)^{\frac{1}{3}} = 0.10683536$$

$$K_4^{(0)} = h\,f(x_0 + h, K_3^{(0)} + y_0) = (0.1)(1.1)(1.10684)^{\frac{1}{3}} = 0.113785527$$

التعويض :

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}\left[0.1 + 2(0.106721617 + 0.10683536) + 0.113785527\right]$$

$$= 1.10681658$$

$$a_0\sum_{i=0}^{n}(x_i)^s + a_1\sum_{i=0}^{n}(x_i)^{s+1} + \cdots + a_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{s+m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^s y_i$$

إجابة السؤال الثاني: 1-)

30 ثلاثون

10

$m=1 \Rightarrow s=0,1 \quad , n=3$

$$s=0 \Rightarrow a_0\sum_{i=0}^{3}(x_i)^0 + a_1\sum_{i=0}^{3}(x_i)^1 = \sum_{i=0}^{3}(x_i)^0 y_i$$

$$a_0(1+1+1+1) + a_1(0+0.5+3+5) = 0+0.247404+0.412118-0.132352$$

$$4a_0 + 8.5a_1 = 0.527171 \qquad (1)$$

$$s=1 \Rightarrow a_0\sum_{i=0}^{3}(x_i)^1 + a_1\sum_{i=0}^{3}(x_i)^2 = \sum_{i=0}^{3}(x_i)^1 y_i$$

$$a_0(0+0.5+3+5) + a_1(0.25+9+25) = 0.5(0.247404)+3(0.412118)-5(0.132352)$$

$$8.5a_0 + 34.25a_1 = 0.698299 \qquad (2)$$

بضرب المعادلة (1) × 2.125 وطرح الناتج من المعادلة (2) نحصل على

$$16.1875a_1 = -0.421939 \Rightarrow a_1 = -0.0260657$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين (1) أو (2) نجد:

$$a_0 = 0.187182$$

وتكون كثيرة حدود الاستيفاء المطلوبة هي:

20

$$P_1(x) = 0.187182 - 0.0260657x$$

2-) أ-) 4

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	0						
		0.247404					
0.5	0.247404		0.346662				
		0.594066		-1.004128			
1	0.84147		-0.657466		0.190122		
		-0.0634		-0.814006		4.35386	
1.5	0.77807		-1.471472		4.543982		-15.164666
		-1.534872		3.729976		-10.810806	
2	-0.756802		2.258504		-6.266824		
		0.723632		-2.536848			
2.5	-0.03317		-0.278344				
		0.445288					
3	0.412118						

تتمة إجابة السؤال الثاني : ج-) د-)

8

نلاحظ من الجدول أن : $n=4$

$$y'(0.5)=\frac{1}{h}\sum_{K=0}^{n}(-1)^{K}\frac{1}{K+1}\Delta^{K+1}y_1$$

$$=\frac{1}{0.5}\left[\Delta y_1-\frac{1}{2}\Delta^2 y_1+\frac{1}{3}\Delta^3 y_1-\frac{1}{4}\Delta^4 y_1+\frac{1}{5}\Delta^5 y_1\right]$$

$$=\frac{1}{0.5}\left[0.594066-\frac{1}{2}(-0.657466)+\frac{1}{3}(-0.814006)-\frac{1}{4}(4.543982)-\frac{10.810806}{5}\right]$$

$$=-5.29338606$$

الخطأ المرتكب

$$\varepsilon'(x_1)=\frac{h^n}{n+1}f^{(n+1)}(c)\ ;\ c\in[0,3]$$

$$\varepsilon'(x_1)=\frac{h^4}{5}M\ ;\ M=\max\{|f^{(5)}(0)|,|f^{(5)}(3)|\}$$

$$f(x)=\sin(x^2)\Rightarrow f'(x)=2x\cos x^2\Rightarrow f''(x)=2\cos x^2-4x^2\sin x^2$$

$$f'''(x)=-4x\sin x^2-8x\sin x^2-8x^3\cos x^2=-12x\sin x^2-8x^3\cos x^2$$

$$f^{(4)}(x)=-12\sin x^2-24x^3\cos x^2-24x^2\cos x^2+16x^4\sin x^2$$

$$=(-12+16x^4)\sin x^2-(24x^3+24x^2)\cos x^2$$

$$f^{(5)}(x)=64x^3\sin x^2+(-24x+32x^5)\cos x^2-(72x^2+48x)\cos x^2+(48x^4+48x^3)\sin x^2$$

$$f^{(5)}(x)=(112x^3+48x^4)\sin x^2+(-72x-72x^2+32x^5)\cos x^2$$

$$f^{(5)}(0)=0\ ,\ f^{(5)}(3)=-3449.1694\Rightarrow M=3449.1694$$

$$\varepsilon'(x_1)=\frac{(0.5)^4}{5}(3449.1694)=43.114617$$

د-) 8

$$S\cong\int_0^3 f(x)\,dx=h\left[y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5\right]$$

$$=(0.5)\left[0.247404+0.84147+0.77807-0.756802-0.03317\right]$$

$$=0.538486$$ وحدة مربعة

الخطأ المرتكب :

$$\varepsilon=\frac{b-a}{2}hf'(c)\ ;\ c\in[0,3]\Rightarrow\varepsilon\leq\frac{b-a}{2}hM\ ;\ M=\max\{|f'(0)|,|f'(3)|\}$$

$$f(x)=\sin x^2\Rightarrow f'(x)=2x\cos x^2\Rightarrow f'(0)=0,\ f'(3)=-5.46678157$$

$$M=5.46678157\Rightarrow\ \varepsilon\leq\frac{3-0}{2}(0.5)(5.46678157)=4.10008618$$

حل السؤال الثالث : (١) (أ) -

20 عشرون

5

	1	0	0	−2	−1
$x=1.5$		1.5	2.25	3.375	2.0625
	1	1.5	2.25	1.375	$1.0625 = P_1(1.5)$
$x=1.5$		1.5	4.5	10.125	
	1	3	6.75	$11.5 = P'(1.5)/1! \Rightarrow P'(1.5) = 11.5$	
$x=1.5$		1.5	6.75		
	1	4.5	$13.50 = P''(1.5)/2! \Rightarrow P''(1.5) = 13.5 \times 2 = 27$		
$x=1.5$		1.5			
	1	$6 = P'''(1.5)/3! \Rightarrow P'''(1.5) = 6 \times 6 = 36$			
$x=1.5$					
	$1 = P^{(4)}(1.5)/4! \Rightarrow P^{(4)}(1.5) = 24$				

(ب -

5

$f(x) = x^4 - 2x - 1$

$f'(x) = 4x^3 - 2$

$f(1.5) = 1.0625$

$f'(1.5) = 11.5$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 1.5 - \frac{1.0625}{11.5} = 1.407608$$

$f(1.407608) = 0.110572$

$f'(1.407608) = 9.155930$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 1.407608 - \frac{0.110572}{9.155930} = 1.395531$$

$f(x_2) = 0.001720$

$f'(x_2) = 8.871233$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$= 1.395531 - \frac{0.001720}{8.871233} = 1.3953371$$

$|x_3 - x_2| = 0.00019 < \varepsilon$

الجذر التقريبي المطلوب هو

$X_3 = 1.3953371$

تتمة إجابة السؤال الثالث: (ج) - (أ -)

10

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \ X^{(0)} = \beta = \left[\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$$

- $\|\alpha\| = \max\{0.6, 0.6, 0.6\} = 0.6 < 1$ فالجملة تملك حلاً مشتركاً.
- بما أن عناصر القطر الرئيسي هي الأكبر في صفوفها
إذن المصفوفة مهيمنة و الجملة تملك حلاً مشتركاً.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right) = 0.55555 \\ x_2^{(1)} &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right) = 0.55555 \\ x_3^{(1)} &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right) = 0.55555 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X^{(1)} = (0.55555, 0.55555, 0.55555)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}(0.55555) - \frac{1}{3}(0.55555) = 1.29629 \\ x_2^{(2)} &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}(0.55555) - \frac{1}{3}(0.55555) = 1.29629 \\ x_3^{(2)} &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}(0.55555) - \frac{1}{3}(0.55555) = 1.29629 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X^{(2)} = (1.29629, 1.29629, 1.29629)$$

جامعة طرطوس — تحليل عددي _ السنة الثالثة — الاسم:

كلية العلوم_قسم الفيزياء — الفصل الأول 2022 –2023 — الدرجة 70

السؤال الاول: (22)درجة

1 – أوجد الخطأ المطلق والنسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x,y)=\dfrac{e^{x}}{x\ln y}$ حيث $(x;y)=(2.5;4.25)$ (اعدد مدورة)

2- أوجد بطريقة رانج كوتا، الحل y_1 للمعادلة التفاضلية: $y'=(x-y)$ والحل الابتدائي $y(0)=2$ ، و h=0.1

السؤال الثاني:(24)درجة

بفرض لدينا الدالة $y=f(x)$ المعطاة بالجدول التالي:

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1	1.0948	1.1787	1.2509	1.3105	1.3570

والمطلوب:1- أكتب جدول الفروق الأمامية للدالة.2- أوجد قيمة الدالة في النقطة $x=0.15$ بطريقة نيوتن الأمامية،باستخدام$P_3(x)$ (دون إيجادها) واحسب الخطأ المرتكب- 3– أوجد المشتق الأول $P_4'(0.1)$ واذكر عبارة الخطأ المرتكب.

4-أوجد بطريقتي شبه المنحرف و سيمبسون القيمة التقريبية للتكامل: $\int_0^{0.5} f(x)dx$ واذكر عبارة الخطأ المرتكب في كل طريقة

السؤال الثالث:(24)درجة

1- لتكن لدينا الدالة $y=f(x)$ المعطاة بالجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
y_i	2	5	8	11

والمطلوب: أوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_1(x)$ لهذه الدالة بطريقة المربعات الصغرى.

2-لتكن لدينا جملة المعادلتين:

$$f_1(x,y)=\sin(x-0.6)-y=1.6$$
$$f_2(x,y)=3x-\cos y=0.9$$

والمطلوب: أوجد الجذر (x_1,y_1) لهاتين المعادلتين بطريقة التقريبات المتتالية علماً أن الحل الابتدائي: $(x_0;y_0)=(0.1,-1.9)$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2023/2/7

مدرس المقرر: أ.د. نضال حسن

سلم توزيع الدرجات لمقرر تحليل عددي وبرمجة سنة ثالثة فيزياء فصل أول ٢٠٢٢/٢٠٢٣ المرطوس

22

إجابة السؤال الأول : 1-) قيمة الدالة :

11

$$f(x,y)=\frac{e^{2.5}}{(2.5)\ln(4.25)}=3.367844$$

٢- الخطأ المطلق والنسبي :

$$\delta_x \leq 5\times10^{-2},\quad \delta_y \leq 5\times10^{-3}$$

$$(\delta_f)_{max} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\delta_x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\delta_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{e^x\cdot x\ln y-\ln y\, e^x}{x^2\ln^2 y}=\frac{e^x(x-1)}{x^2\ln y}\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|=2.0207065$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-e^x}{x\cdot y\ln^2 y}\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|=0.5476703$$

$$(\delta_f)_{max}\leq(2.0207065\times5\times10^{-2})+(0.5476703\times5\times10^{-3})=$$

$$0.10103532+0.0027383515=0.1037736715$$

$$(e_f)_{max}\leq\frac{(\delta_f)_{max}}{|f|}=\frac{0.1037736715}{3.367844}=0.030813087$$

إجابة السؤال الأول : 2-)

11

$$y_1=y(0.1)=y_0+\frac{1}{6}\left[K_1^{(0)}+2(K_2^{(0)}+K_3^{(0)})+K_4^{(0)}\right]$$

$$K_1^{(0)}=hf(x_0,y_0)=0.1(x_0-y_0)=0.1(0-2)=-0.2$$

$$K_2^{(0)}=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_1}{2}\right)=0.1\left[\frac{0.1}{2}-\left(2+\frac{-0.2}{2}\right)\right]=-0.185$$

$$K_3^{(0)}=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}\right)=0.1\left[\frac{0.1}{2}-\left(2+\frac{-0.185}{2}\right)\right]=-0.18575$$

$$K_4^{(0)}=hf(x_0+h,y_0+K_3^{(0)})=0.1[0.1-(2-0.18575)]=-0.171425$$

$$y_1=2+\frac{1}{6}[-0.2+2(-0.185-0.18575)-0.171425]=1.8145125$$

حل السؤال الثاني $\boxed{24}$

(1 (4)

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	1					
		0.0948				
0.1	1.0948		-0.0109			
		0.0839		-0.0008		
0.2	1.1787		-0.0117		-0.0001	
		0.0722		-0.0009		0.0005
0.3	1.2509		-0.0126		0.0004	
		0.0596		-0.0005		
0.4	1.3105		-0.0131			
		0.0465				
0.5	1.3570					

(2 (6)

$$P_3(x) = y_0 + R\,\Delta y_0 + \frac{R(R-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{R(R-1)(R-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$R = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow R = \frac{x-0}{0.1} = 10x$$

$$x = 0.15 \Rightarrow R = 10(0.15) = 1.5$$

$$P_3(0.15) = 1 + 1.5(0.0948) + \frac{1.5(0.5)}{2!}(-0.0109) + \frac{1.5(0.5)(-0.5)}{3!}(-0.0008)$$

$$= 1.1381625$$

الخطأ المرتكب

$$E = \frac{R(R-1)(R-2)(R-3)}{4!}\Delta^4 y_0 = \frac{(1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)}{24}(-0.0001)$$

$$= -0.0000023438 = -2.3438 \times 10^{-6}$$

(3 (6)

$$P_4'(0.1) = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{4}(-1)^k \frac{1}{k+1}\Delta^{k+1} y_1 = \frac{1}{h}\left[\Delta y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_1\right]$$

$$= \frac{1}{0.1}\left[0.0839 + \frac{0.0839}{2} - \frac{0.0009}{3} - \frac{0.0004}{4}\right] = 0.8935$$

الخطأ المرتكب

$$E = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(c) \;;\; c \in [0, 0.5] \Rightarrow E \leq (-1)^n \frac{h^n}{n+1} \cdot M \;;$$

$$M = \max\{|f^{(n+1)}(0)|, |f^{(n+1)}(0.5)|\}$$

تتمة إجابة السؤال الثاني : 4-) المساحة التقريبية بطريقة شبه المنحرف :

8

$$S = \int_0^{0.5} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + y_5\right]$$

$$= \frac{0.1}{2}\left[1 + 2(1.0948 + 1.1787 + 1.2509 + 1.3105) + 1.3570\right]$$

$$= 0.60134$$ وحدة مساحة مربعة

الخطأ المرتكب :

$$E = \frac{b-a}{12} h^2 f''(c) \; : \; c \in [0, 0.5]$$

$$E \leq \frac{b-a}{12} h^2 . M \; : \; M = \max\{|f''(0)|, |f''(0.5)|\}$$

المساحة بطريقة سيمبسون :

$$S = \int_0^{0.5} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2(y_2 + y_4) + y_5\right]$$

نلاحظ أن :

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{0.5-0}{0.1} = 5$$ هو عدد فردي

وبالتالي لا يمكن إجراء التكامل أو حساب المساحة بهذه الطريقة

صيغة الخطأ المرتكب :

$$E = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c) \; : \; c \in [0, 0.5]$$

$$E \leq \frac{b-a}{180} h^4 . M \; : \; M = \max\{|f^{(4)}(0)|, |f^{(4)}(0.5)|\}$$

24

إجابة السؤال الثالث : -1) بما أن المطلوب $P_1(x)=P_m(x)$ نجد أن : $m=1$ وبالتالي فإن

(12)

$s=0,1$ وبالتالي نجد :

عندما $s=0$ نبدل في العلاقة الأساسية :

$$a_0\sum_{i=0}^{n} x_i^{s} + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^{s+1} + \cdots + a_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{s+m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{s} y_i$$

$$a_0\sum_{i=0}^{3}(x_i)^0 + a_1\sum_{i=0}^{3}(x_i)^1 = \sum_{i=0}^{3}(x_i)^0 y_i$$

$$a_0(1+1+1+1)+a_1(1+2+3+4)=2+5+8+11$$

$$4a_0+10a_1=26 \qquad (1)$$

عندما $s=1$ نبدل في العلاقة الأساسية :

$$a_0\sum_{i=0}^{3}(x_i)^1 + a_1\sum_{i=0}^{3}(x_i)^2 = \sum_{i=0}^{3}(x_i)^1 y_i$$

$$a_0(1+2+3+4)+a_1(1+4+9+16)=80 \qquad (2)$$

بالحل المشترك نجد أن :

$$a_0=-1 ,\ a_1=3$$

وتكون كثيرة الحدود المطلوبة :

$$P_1(x)=3x-1$$

إجابة السؤال الثالث : -2) (12)

من المعادلة الأولى نعزل y ومن الثانية نعزل x وبالتالي تصبح المعادلتان بالشكل :

$$x=\frac{1}{3}\cos y+0.3=g_1(x,y)$$

$$y=\sin(x-0.6)-1.6=g_2(x,y)$$

حتى تكون متتالية الحل متقاربة يجب أن تتحقق الشروط

$$\left\{\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right|\right\}<1 ,\quad \left\{\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right|\right\}<1$$

نلاحظ أن

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}=0 ,\ \frac{\partial g_1}{\partial y}=-\frac{1}{3}\sin y ,\ \frac{\partial g_2}{\partial x}=\cos(x-0.6) ,\ \frac{\partial g_2}{\partial y}=0$$

وبالتالي نجد أن :

$$\left\{\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right|\right\}=|\cos(x-0.6)|<1 ,\ \forall x\in[a,b]$$ محققة

$$\left\{\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right|\right\}=\left|-\frac{1}{3}\sin y\right|<1 \quad , \forall y\in[a,b]$$

بالتعويض في الدستورين التدريجين :

$$x_{i+1}=g_1(x_i,y_i) = \frac{1}{3}\cos y_i + 0.3$$

$$y_{i+1}=g_2(x_i,y_i) = \sin(x_i-0.6)-1.6$$

$$x_1=\frac{1}{3}\cos(-1.9)+0.3=0.1922843$$

$$y_1 = \sin(0.1-0.6)-1.6=-2.0794$$

وهو المطلوب

جامعة طرطوس — مقرر تحليل عددي/س3 /فيزياء — الاسم الثلاثي:

كلية العلوم — الدورة الفصلية الثانية للعام الدراسي 2021-2022 — الرقم الجامعي:

السؤال الأول: (20 درجة)

أ. أوجد الخطأ المطلق والنسبي المرتكب في حساب قيمة الدالة $f(x,y)=x.y$

حيث ان: $x=1.24$, $y=3.53$ (أعداد مدورة).

ب. لتكن لدينا المعادلة غير الخطية التالية: $f(x)=e^x-x^2=0$ والمطلوب:

بين أن الاختيار $g(x)=-\sqrt{e^x}$ هو اختيار موفق عند البحث عن الجذر في المجال [-2,0] ثم أوجد هذا الجذر، وذلك باستخدام طريقة التقريبات المتتالية حيث $\varepsilon=0.003$

السؤال الثاني: (20 درجة)

1- لتكن لدينا الدالة $y=e^x$ والمعرفة عند النقاط التالية: $x_0=-1, x_1=0 , x_2=1$ اكتب جدول القيم لها ثم أوجد كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة لاغرانج

2- استخدام طريقة رونج- كوتا لإيجاد الحل التقريبي y1 للمعادلة التفاضلية: حيث $y`=x-y , y(0)=2$, $h=0.1$

السؤال الثالث: (20درجة)

لتكن لدينا الدالة $y=e^x$ والمعرفة عند النقطة $h=0.2$, $x_0=0$ والمطلوب:

1- اكتب جدول القيم بأخذ خمس نقاط بعد النقطة الإبتدائية، ثم اكتب جدول الفروق الأمامية.

2- أوجد قيمة الدالة عند النقطة $x=0.25$ باستخدام $p_3(x)$ (نيوتن الأمامية دون إيجادها) واحسب الخطأ المرتكب.

3- أوجد المشتق الأول لها عند النقطة $x=0.2$ (باستخدام جميع الحدود الممكنة من كثيرة حدود نيوتن) واحسب الخطأ المرتكب.

4- أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 f(x)dx$ باستخدام طريقة سيمبسون (إن أمكن) واحسب الخطأ المرتكب.

السؤال الرابع: (10 درجات)

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$3x_2+2x_2+x_3=2$

$2x_1+3x_2+x_3=1$

$x_1+2x_2+3x_3=-2$

والمطلوب: 1- ناقش وجود حل للجملة

2- أوجد الجذر $x^{(2)}$ بطريقة جاكوبي إذا علمت أن $x^{(0)}=\alpha$

مع تمنياتنا بالتوفيق والنجاح — مدرس المقرر: أ.د. نضال ابراهيم حسن

جابة السؤال الأول: أ- الخطأ المطلق المرتكب يعطى بالعلاقة: 10 $\boxed{20}$

$$(\delta_f)_{max} \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta_y = y\,\delta_x + x\,\delta_y$$

الخطأ المطلق المرتكب عند تدوير كلاً من x و y هو

$$\delta_x = \delta_y \leqslant 5\times10^{-3}$$

$$(\delta_f)_{max} \leqslant 3.53(5\times10^{-3}) + 1.24(5\times10^{-3}) = 0.02385$$

أما الخطأ النسبي المرتكب فنجده من العلاقة

$$(e_f)_{max} \leqslant \frac{(\delta f)_{max}}{|f|} \quad , \quad |f| = 1.24\times 3.53 = 4.3772$$

$$(e_f)_{max} \leqslant \frac{0.02385}{4.3772} = 0.005448688$$

ب- نلاحظ أن الاختيار $g(x) = -\sqrt{e^x}$ اختيار صحيح لأنه

$$x_0 = \frac{-2+0}{2} = -1 \quad 10$$

$$\forall x \in [-2,0] \Rightarrow g(x) = -\sqrt{e^x} \in [-2,0]$$

$$\forall x_0 = -1 \Rightarrow |g'(x)| = \left|-\tfrac{1}{2}\sqrt{e^x}\right| \Rightarrow |g'(x_0)| = |-0.3032| < 1$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = -\sqrt{e^{x_n}} \Rightarrow x_1 = g(x_0) = -\sqrt{e^{x_0}} = -\sqrt{e^{-1}} = -0.606530$$

$$x_2 = g(x_1) = -\sqrt{e^{-0.60653}} = -0.738403$$

$$x_3 = g(x_2) = -\sqrt{e^{-0.738403}} = -0.691286$$

$$x_4 = g(x_3) = -\sqrt{e^{-0.691286}} = -0.707765$$

$$x_5 = g(x_4) = -\sqrt{e^{-0.707765}} = -0.7019574$$

$$x_6 = g(x_5) = -\sqrt{e^{-0.7019574}} = -0.703998 \Rightarrow |x_6 - x_5| = 0.00204 < \varepsilon$$

أي أن x_6 هو الجذر التقريبي المطلوب

---

x_i	-1	0	$+1$
y_i	$\frac{1}{e}$	1	e

إجابة السؤال الثاني: 1- (10) 20

لنوجد أولاً حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{1}{2}(x^2-x)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=-(x^2-1)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{2}(x^2+x)$$

التعويض في صيغة لاغرانج:

$$P_2(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2$$

$$=0.5(x^2-x)\left(\frac{1}{e}\right)-(x^2-1)(1)+0.5(x^2+x)(e)$$

$$=\frac{e^2-2e+1}{2e}x^2+\frac{e^2-1}{2e}x+1=0.54308x^2+1.1752x+1$$

2- (10)

$$y_1=y(0.1)=y_0+\frac{1}{6}\left[K_1^{(0)}+2\left(K_2^{(0)}+K_3^{(0)}\right)+K_4^{(0)}\right]$$

$$K_1^{(0)}=hf(x_0,y_0)=0.1(x_0-y_0)=-0.2$$

$$K_2^{(0)}=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}\right)=0.1\left[\left(0+\frac{0.1}{2}\right)-\left(2+\frac{-0.2}{2}\right)\right]=-0.185$$

$$K_3^{(0)}=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}\right)=0.1\left[\left(0+\frac{0.1}{2}\right)-\left(2+\frac{-0.185}{2}\right)\right]=-0.18575$$

$$K_4^{(0)}=hf\left(x_0+h,y_0+K_3^{(0)}\right)=0.1\left[(0+0.1)-(2-0.18575)\right]=-0.171425$$

$$y_1=2+\frac{1}{6}\left[-0.2+2(-0.185-0.18575)-0.171425\right]=1.8145125$$

إجابة السؤال الثالث: 20

1- (4)

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	1					
		0.2214				
2	1.2214		0.049			
		0.2704		0.0109		
4	1.4918		0.0599		0.0023	
		0.3303		0.0132		0.0008
6	1.8221		0.0731		0.0031	
		0.4034		0.0163		
8	2.2255		0.0894			
		0.4928				
	2.7183					

$$P_3(x) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

(6) - 2 : ... السؤال الثالث

$$\frac{x-x_0}{h} = \frac{0.25-0}{0.2} = 1.25$$

$$P_3(x) = 1 + (1.25)(0.2214) + \frac{(1.25)(0.25)}{2}(0.049) + \frac{(1.25)(0.25)(-0.75)}{3!}(0.0109)$$

$$= 1 + 0.27675 + 0.007656 - 0.00042578 = 1.28398$$

الخطأ المرتكب :

$$E \leq \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\Delta^4 y_0 = \frac{(1.25)(0.25)(-0.75)(-1.75)}{24}(0.0023) = 0.000039306$$

-3 (8)

$$y'(0.2) \cong P_3'(0.2) = \frac{1}{h}\sum_{K=0}^{3}(-1)^K \frac{1}{K+1}\Delta^{K+1} y_1 = \frac{1}{0.1}\left[\Delta y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_1\right]$$

$$= \frac{1}{0.1}\left[0.2704 - \frac{1}{2}(0.0599) + \frac{1}{3}(0.0132) - \frac{1}{4}(0.0031)\right]$$

$$= \frac{1}{0.1}\left[0.2704 - 0.02995 + 0.0044 - 0.000775\right] = 2.44075$$

الخطأ المرتكب :

$$E = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(s) \; ; \; E \leq (-1)^5 \frac{h^5}{6} M \; ; \; M = \max\{|f^{(6)}(0)|, |f^{(6)}(1)|\}$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = e^x$$

$$f^{(6)}(0) = e^0 = 1 \; , \; f^{(6)}(1) = e^1 = 2.7183 \Rightarrow M = 2.7183$$

$$E = (-1)^5 \frac{(0.1)^5}{6}(2.7183) = 0.0000045305 = 4.5305 \times 10^{-6}$$

(2) -4

$$S \cong \int_0^1 f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1+y_3+y_5) + 2(y_2+y_4) + y_6\right]$$

نلاحظ أن :

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.2} = 5$$ فردي وبالتالي لا يمكن تطبيق الطريقة

اجابة السؤال الرابع : 1- نأخذ مصفوفة الأمثال : (4)

$\boxed{10}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن عناصر القطر الرئيسي هي الأكبر في أسطرها فهي مهيمنة أي يوجد حل للجملة

$$\alpha = \left(\frac{2}{3} \; 6 \; \frac{1}{3} \; 6 \; -\frac{2}{3}\right)$$

- 2

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \Rightarrow x_1^{(1)} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right) = 0.66666 \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \Rightarrow x_2^{(1)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right) = 0.11111 \quad (1)$$

$$x_3 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 \Rightarrow x_3^{(1)} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right) = -1.11111 \quad (1)$$

$$x_1^{(2)} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(0.11111) - \frac{1}{3}(-1.11111) = 0.96296 \quad (1)$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}(0.66666) - \frac{1}{3}(-1.11111) = 0.25925 \quad (1)$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(0.66666) - \frac{2}{3}(0.11111) = -0.96296 \quad (1)$$

(3)

جامعة طرطوس　　　　تحليل عددي _ السنة الثالثة　　　　الاسم:

كلية العلوم _ قسم الفيزياء　　　　الفصل الأول 2021 – 2022　　　　الدرجة 70

السؤال الاول: (16) درجة

1 – أوجد الخطأ المطلق والنسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{x^2+1}$ حيث $x=3.1416$ (عدد مدور)

2- أوجد بطريقة أولر المعدلة، الحل y_1 للمعادلة التفاضلية: $y'=y(x-1)$ والحل الابتدائي $y(0)=1$ ، و h=0.1

السؤال الثاني: (20) درجة

بفرض لدينا الدالة $y=f(x)$ المعطاة بالجدول التالي:

1.3	1.29	1.28	1.27	1.26	1.25	x_i
1.17862	1.24787	1.30456	1.34783	1.37696	1.3914	y_i

والمطلوب: 1- أكتب جدول الفروق الأمامية للدالة. 2- أوجد بطريقة نيوتن، المشتق الأول $P'(1.26)$ واذكر عبارة الخطأ المرتكب.

3- أوجد بطريقتي شبه المنحرف و سيمبسون القيمة التقريبية للتكامل: $\int_{1.25}^{1.3} f(x)dx$ واذكر عبارة الخطأ المرتكب بعد حساب المساحة

السؤال الثالث: (12) درجة

اختر أحد السؤالين التاليين:

1- لتكن لدينا الدالة $y=f(x)$ المعطاة بالجدول التالي:

4	3	2	1	x_i
11	8	5	2	y_i

والمطلوب: أوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_1(x)$ لهذه الدالة بطريقة المربعات الصغرى.

2- لتكن لدينا الدالة $y=\sin x$ المعطاة بالجدول التالي:

60	45	30	x_i
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	y_i

و المطلوب: أوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_2(x)$ لهذه الدالة بطريقة لاغرانج.

السؤال الرابع: (22) درجة

1- أوجد بطريقة نيوتن رافسون الحل التقريبي للمعادلة: $f(x)=x^3+x^2-3x-3=0$ الموجود في المجال [1.5,2.5] معتبرا ان $\varepsilon=0.001$

2- لتكن لدينا جملة المعادلتين:

$$f_1(x,y)=0.1x^2+0.1y^2-x+0.8=0$$
$$f_2(x,y)=0.1x+0.1xy^2-y+0.8=0$$

والمطلوب: أوجد الجذر (x_1,y_1) لهاتين المعادلتين بطريقة التقريبات المتتالية علماً أن الحل الابتدائي: $(x_0,y_0)=(0.5,0.5)$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

طرطوس في 2022/2/14

مدرس المقرر: د. نضال حسن

16

إجابة السؤال الأول: ١- إن قيمة الدالة المعطاة عند $x=3.1416$ هي:

8

$$f(x)=\frac{e^x+2x}{x^2+1}=\frac{e^{3.1416}+2(3.1416)}{(3.1416)^2+1}=2.706992508$$

إن الخطأ المطلق المركب هو:

$$(\delta_f)_{max}\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta_x$$

ولكن لدينا $\delta_x\leq 5\times10^{-5}$ والمشتق الأول للدالة المعطاة هو:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{dx}=\frac{e^x(x^2-2x+1)-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

بالتبديل نجد أن:

$$(\delta_f)_{max}\leq 0.0000374082$$

والخطأ النسبي:

$$(e_f)_{max}=\left(\frac{\delta f}{|f|}\right)_{max}\leq\frac{0.0000374082}{2.706992508}=0.000013819026$$

إجابة السؤال الأول: ج- حسب الدستور

8

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(\overline{y'}_{n+1}+y'_n)$$

يكون:

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}(\overline{y'}_1+y'_0)$$

ولكن:

$$y'_0=f(x_0,y_0)=y_0(x_0-1)=-1$$

نحسب $\overline{y}_1$

$$\overline{y'}_{n+1}=f(x_{n+1},\overline{y}_{n+1})\Rightarrow\overline{y'}_1=f(x_1,\overline{y}_1)$$

$$\overline{y}_1=y_0+hy'_0=1+0.1(-1)=0.9\quad,\quad x_1=x_0+h=0+0.1=0.1$$

$$\overline{y'}_1=\overline{y}_1(x_1-1)=0.9(0.1-1)=-0.81$$

وبالتالي فإن الحل y_1 هو:

$$y_1=1+\frac{0.1}{2}(-1-0.81)=0.9095$$

جابة السؤال الثاني : 1- ③ 20

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
1.25	1.3914					
		-0.01444				
1.26	1.37696		-0.01469			
		-0.02913		0.00055		
1.27	1.34783		-0.01414		0.00017	
		-0.04327		0.00072		-0.00003
1.28	1.30456		-0.01342		0.00014	
		-0.05669		0.00086		
1.29	1.24787		-0.01256			
		-0.06925				
1.3	1.17862					

إجابة السؤال الثاني : ج-

⑥ $P'(x_i) = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\Delta^k y_i$

وبما أن النقطة المطلوبة x_1 يكون: $x_i = x_1$ فيصبح القانون:

$$P'(x_1) = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\Delta^k y_1$$

نعوض نجد:

$$P'(x_1) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_1\right]$$

واضح أن $h = x_{i+1} - x_i = 1.26 - 1.25 = 0.01$

$$P'(1.26) = \frac{1}{0.01}\left[(-0.02913) - \frac{1}{2}(-0.01414) + \frac{1}{3}(0.00072) - \frac{1}{4}(0.00014)\right]$$

$$= \frac{-0.021855}{0.01} = -2.1855$$

عبارة الخطأ المرتكب: $R'(x_0) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(s)$; ②

$$R'(x_0) \leq (-1)^n \frac{h^n}{n+1} M \; ; \; M = \max\{|f^{(n+1)}(x_0)|, |f^{(n+1)}(x_n)|\} \quad s \in [x_0, x_n]$$

جابة السؤال الثاني : ٣- طريقة شبه المنحرف

⑤ $\int_{1.25}^{1.3} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1+y_2+y_3+y_4) + y_5\right] = \frac{0.01}{2}\left[1.3914 + 2(1.37696 + 1.34783 + 1.30456 + 1.24787) + 1.17862\right] = \frac{0.01}{2}(13.12446) = 0.0656223$ وحدة مربعة

عبارة الخطأ المرتكب: ② $\varepsilon \leq \frac{b-a}{12} h^2 M \; ; \; M = \max\{|f''(x_0)|, |f''(x_n)|\}$ ②

لا علاقة ب التكامل بطريقة سمبسون لأن $n = 5$ فردي $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1.3-1.25}{0.01} = 5$ ولا نحتاج هنا لعبارة الخطأ

إجابة السؤال الثالث : 1- باعتبار أنه لدينا أربعة نقاط معطاة في الجدول $P_1(x) = P_m(x)$ وبالتالي $\boxed{12}$

نجد أن $m=1$ ، وهذا يعني أن: $s = 0, 1$ ، لو بدلنا $s=0$ في العلاقة

2 $$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^{s} + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{s+1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{s+m} = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

2 $$a_0 \sum_{i=0}^{3} (x_i)^0 + a_1 \sum_{i=0}^{3} (x_i)^1 = \sum_{i=0}^{3} (x_i)^0 y_i$$

2 $$a_0(1+1+1+1) + a_1(1+2+3+4) = 2+5+8+11$$

2 $$4a_0 + 10a_1 = 26 \qquad (1)$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} (x_i)^1 + a_1 \sum_{i=0}^{3} (x_i)^2 = \sum_{i=0}^{3} (x_i^1) y_i$$

$$a_0(1+2+3+4) + a_1(1+4+9+16) = 2+10+24+44 = 80$$

2 $$10a_0 + 30a_1 = 80 \qquad (2)$$

بالحل المشترك لـ (1) و (2) نجد أن : $a_0 = -1,\ a_1 = 3$ بالتعويض في العلاقة $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ نجد :

2 $$P_1(x) = 3x - 1$$

إجابة السؤال الثالث : 2- لنوجد كثيرة حدود لاغرانج أولاً: $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ $\boxed{12}$

نوجد حدوديات لاغرانج $L_i(x)$

2 $$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-45)(x-60)}{(-15)(-30)} = \frac{1}{450}(x^2 - 105x + 2700)$$

2 $$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-30)(x-60)}{(15)(-15)} = \frac{-1}{225}(x^2 - 90x + 1800)$$

2 $$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-30)(x-45)}{(30)(15)} = \frac{1}{450}(x^2 - 75x + 1350)$$

بالتبديل في صيغة كثيرة حدود لاغرانج :

2 $$P_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

$$P_2(x) = \frac{1}{450}(x^2 - 105x + 2700)(0.5) - \frac{-1}{225}(x^2 - 90x + 1800)(\sqrt{2}/2) +$$

4 $$+ \frac{1}{450}(x^2 - 75x + 1350)(\sqrt{3}/2) = -0.00010708 4x^2 + 0.02183847x - 0.0587780$$

إجابة السؤال الثالث ج: باعتبار أن $f(x)=x+x-3x-3$ فإن $\boxed{22}$

1 $f'(x)=3x^2+2x-3$

ونجد أن: $x_0=\frac{1.5+2.5}{2}=2$

2 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{3}{13}=1.7692307 \Rightarrow f(x_1)=0.3604 < \varepsilon$

$f'(x_1)=9.928994$

2 $x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.7692307-\frac{0.3604}{9.928994}=1.7329238 \Rightarrow$

$f(x_2)=0.008266 > 0.001$

$f'(x_2)=9.47492229$

2 $x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1.7329238-\frac{0.008266}{9.474922}=1.7320513$

نلاحظ أن:

2 $|x_3-x_2|=|1.7320513-1.7329238|=0.0008725<\varepsilon$

وبالتالي فالجذر المطلوب هو:

1 $x \cong x_3=1.7320513$

إجابة السؤال الرابع ج $\boxed{12}$ – من المعادلة الأولى نعزل x ومن المعادلة الثانية نعزل y وبالتالي تصبح المعادلتين بالشكل:

1 $x=0.1x^2+0.1y^2+0.8=g_1(x,y)$

1 $y=0.1x+0.1x\cdot y^2+0.8=g_2(x,y)$

يمكننا التأكد من أن جميع شروط التقارب محققة في المجال المعطى، وذلك لأنه:

4 $\frac{\partial g_1}{\partial x}=0.2x$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}=0.2y$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}=0.1+0.1y^2$, $\frac{\partial g_2}{\partial y}=0.2x\cdot y$

وبالتالي نجد:

1 $\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right|=|0.1|+|0.1+0.025|=0.225<1$

1 $\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right|=|0.1+0.05|=0.15<1$

نبدأ الحل الابتدائي في كل من المعادلتين:

1 $x_{i+1}=g_1(x_i,y_i)=0.1x_i^2+0.1y_i^2+0.8$

1 $x_1=g_1(x_0,y_0)=0.1(0.5)^2+0.1(0.5)^2+0.8=0.85$

1 $y_{i+1}=g_2(x_i,y_i)=0.1x_i+0.1x_iy_i^2+0.8$

1 $y_1=g_2(x_0,y_0)=0.1(0.5)+0.1(0.5)(0.5)^2+0.8=0.8625$

$(x_1,y_1)=(0.85,0.8625)$