ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

اسئلة دوراة محلولة

تحليل عقدي ومنجهي

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

سلام تصحيح امتحان مقرر التحليل العقدي والمتجهي لطلاب السنة الثانية
الدورة الفصلية الثانية 2024-2025 .

السؤال الأول: (40 درجة)

15 أولا: اثبت باستخدام شرطي كوشي ريمان أن الدالة $f(z)=e^z$ تحليلية

if $z=x+iy \Rightarrow f(z)=u+iv=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ 1 درجة

$u=e^x\cos y \quad ; \quad v=e^x\sin y$ (5)

(5) شرطي كوشي ريمان $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ --(1) , $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ --(2)

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y \; ; \; \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y \; ; \; \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ (5)

الشرطين محققين و الدالة تحليلية على كامل المستوى العقدي لان كل من u,v مستمرة ومشتقاتها موجودة ومستمرة .

10 ثانيا . احسب قيمة التكامل التالي

$$\int_C (z\bar{z}+z^2)\,dz$$

حيث C هي دائرة الوحدة

$$C=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|=1,\ \arg(z)\in[0,2\pi]\}$$

1 درجة نفوض $z=re^{i\theta}$ حيث $r=1$ و $0\le\theta\le 2\pi$

$\bar{z}=e^{-i\theta}$

فيكون $dz=ie^{i\theta}d\theta$

(10)

$$\int_0^{2\pi} ie^{i\theta}(e^{i2\theta}+1)\,d\theta = i\int_0^{2\pi}(e^{i3\theta}+e^{i\theta})\,d\theta = \left(\frac{1}{3}e^{i3\theta}+e^{i\theta}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$=0$

A to Z

ثالثاً: هل الدالة $u(x,y)=x^2\cos y+x^2\sin y$ توافقية ولماذا.

لكي تكون الدالة توافقية إذا كانت معرفة وحسرة وتمثل استثناء جزئية حسرة

حيث المرجة الثانية وتحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ (5)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x\cos y+2x\sin y \;;\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cos y+2\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2\sin y+x^2\cos y \;;\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x^2\cos y-x^2\sin y$$ (5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\cos y+2\sin y-x^2\cos y-x^2\sin y \neq 0$$

والدالة غير توافقية (5)

السؤال الثاني: (50 درجة)

س35 / أولاً: ليكن التابع المتجهي التالي

$$\vec{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 \;;\; \vec{r}=t^3\vec{i}+6t\vec{j}+3t^2\vec{k}$$

هل هو أملس عند جميع نقاطها؟ اذكر الشروط والانتقاف عند جميع نقاطها

الذي ملس عندها ثم أوجد المماسية عزنيه.

$$\vec{r}'=(3t^2,6,6t) \Rightarrow \vec{r}''=(6t,0,6) \Rightarrow \vec{r}'''=(6,0,0)$$

$$|\vec{r}'|=\sqrt{9t^4+36+36t^2}=3(t^2+2)$$ (5)

$$|\vec{r}'|=3(t^2+2)\neq 0 \;;\; \forall t\in\mathbb{R}$$ بما أن

التابع المتجهي $\vec{r}$ أملس عند جميع نقاطه (5)

المنحنى نظامي بالقانون

$$K(t) = \frac{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{2\sqrt{2+t^2+4t^4}}{3(t^2+2)^3}$$ (5)

الالتواء نظامي بالقانون

$$\tau = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|^2} = \frac{216}{324(4+t^2+4t^4)} \; ; \; \forall t \in \mathbb{R}$$ (5)

ثلاثية مرينة

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} \; , \; \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|} \; , \; \vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$ (5) (5) (5)

$$\vec{T} = \frac{(t^2, 2, 2t)}{3(t^2+2)^3} \; , \; \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$$

ثانياً: 15 احسب طول المنحنى الممثل بدائرة نصف قطرها r

$$\vec{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \; ; \; \vec{f}(t) = (r\cos t, r\sin t)$$

الحل

$$x = r\cos t \; , \; y = r\sin t \; ; \; r > 0$$

$$s(t) = \int_0^t |\vec{f}'(t)| \, dt = \int_0^t \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = rt$$ (10)

$$\Rightarrow s(2\pi) = 2\pi r .$$ (5)

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر التحليل المتجهي والعقدي
لطلاب السنة الثانية فيزياء
الدورة الفصلية الاولى: ٢٠٢٤-٢٠٢٥

الاسم:
الدرجة: ٩٠
المدة:

نموذج A

السؤال الاول:(٣٠ د) ليكن لدينا الدالة العقدية التالية:

$$f(z) = 3z^2 + 2z$$

a. أثبت باستخدام شرطي كوشي-ريمان ان الدالة السابقة تحليلية

b. احسب التكامل التالي

$$\int_{1-i}^{2+i} f(z)\ dz$$

c. هل الدالة التالية توافقية

$$u(x,y) = x^2 + 2xy^2$$

السؤال الثاني:(٦٠د) ليكن التابع الشعاعي التالي:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ \ \vec{r}(t) = (t^3+5)\vec{\imath} + (6t-7)\vec{\jmath} + (3t^2+1)\vec{k}$$

a. أثبت ان التابع الشعاعي املس عند جميع نقاطه.
b. أحسب التقوس والالتفاف عند جميع نقاطه الاملس عندها ثم اوجد ثلاثية فرنيه.
c. أوجد معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظم للتابع الشعاعي السابق في النقطة

$$B(5,-7,1);\ \ t=0$$

مدرسة المقرر: د.حنان علي

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر التحليل المتجهي والعقدي
لطلاب السنة الثانية فيزياء
الدورة الفصلية الاولى: ٢٠٢٤-٢٠٢٥

الاسم:
الدرجة: ٩٠
المدة:

السؤال الاول(٣٠ د) ليكن لدينا الدالة العقدية التالية:

$$f(z) = e^z$$

a. أثبت باستخدام شرطي كوشي-ريمان ان الدالة السابقة تحليلية

b. احسب التكامل التالي

$$\int_C f(z)\ dz\ ;\ C := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, \arg(z) \in [0, 2\pi]\}$$

c. هل الدالة التالية توافقية

$$v(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$

السؤال الثاني(٦٠د) ليكن التابع الشعاعي التالي:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ \ \vec{r}(t) = (t^3)\vec{\imath} + (3t^2 - 2)\vec{\jmath} + (6t + 1)\vec{k}$$

a. أوجد معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظم للتابع الشعاعي السابق في النقطة
$B(1,1,7)$;

b. أثبت ان

$$|\dot{r}(t)| = 3(t^2 + 2)$$

ثم احسب طول قوس منحني التابع الشعاعي السابق والمحدد بالنقطتين
$A(0,-2,1), B(1,1,7)$

c. اوجد $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ ثلاثية فرينيه

مدرسة المقرر: د. حنان علي

A to Z

سلم تصحيح امتحان مقرر التحليل العقدي والمتجهي
لطلبة السنة الثانية خلال الدورة العادية الثوكا 2024-2025

المقورة B :

السؤال الأول (30 د) : ليكن لدينا الدالة العقدية التالية : $f(z) = e^z$

1. باستخدام شرطي كوشي-ريمان، أثبت أن الدالة السابقة تحليلية :

let $z = x+iy \Rightarrow f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

let $f(z) = u+iv \Rightarrow f(z) = \underbrace{e^x\cos y} + i\underbrace{e^x \sin y} \Rightarrow u = e^x\cos y \; ; \; v = e^x \sin y$ (3)

بتطبيق شرطي كوشي-ريمان بالشكل (5) $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}}$ $\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = +e^x\cos y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (محقق)

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (محقق) (2)

من تحقق الشرطين نجد أن الدالة e^z تحليلية على كامل المستوى العقدي لأن المشتقات معرفة ومستمرة على كامل المستوى العقدي .

2. احسب التكامل التالي :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C e^z\,dz \quad ; \quad C = \{z \in \mathbb{C} \,,\, |z| = 1 \,,\, \arg z \in [0, 2\pi]\}$$

$= $ [illegible] $\quad \in \theta \in [0, 2\pi]$, $z = e^{i\theta}$ نضع

$dz = ie^{i\theta}\,d\theta$

$$\int_C e^z dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} ie^{i\theta}\,d\theta = \left[e^{e^{i\theta}}\right]_0^{2\pi} = e^1 - e^1 = 0$$ (10)

$\int_C g\,dg$

$u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ الدالة التالية توافقية C.dp

لبيان أن الدالة توافقية يجب أن نملك مشتقات مستمرة لهذه الرتبة الثانية وكفى

(5) أن $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{\ln(x^2+y^2)} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2+y^2)} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$ (3)

المشتقات موجودة ومستمرة باستثناء $(0,0)$

(2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2) + 2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

(محققة)

والدالة u توافقية على النقطة $(0,0)$

السؤال الثاني (6ن): ليكن التابع السفاري التالي:

$$\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 ; \quad \vec{r}(t) = t^3\vec{i} + (3t^2-2)\vec{j} + (6t+1)\vec{k}$$

a. اوجد معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظم للتابع السفاري السابق في النقطة B(1,1,7) الموافقة لـ $t=1$

* معادلة المستقيم المماس تعطى بالشكل

D: $$\frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y-g(t_0)}{g'(t_0)} = \frac{z-h(t_0)}{h'(t_0)}$$ (6)

حيث

$f(t) = t^3 ; \quad f(t_0) = f(1) = 1$

$f'(t) = 3t^2 ; \quad f'(1) = 3$

$g(t_0) = 3t^2 - 2 ; \quad g(1) = 3-2 = 1$

$g'(t_0) = 6t_0 = 6$

$h(t_0) = 6t_0 + 1 = 6+1 = 7$

$h'(t_0) = 6$

A to Z

$$D: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-7}{6}.$$

(6) معادلة المستوى الناظم

$$f'(t_0)(x-f(t_0)) + g'(t_0)(y-g(t_0)) + h'(t_0).(z-h(t_0)) = 0$$

$$3(x-1) + 6(y-1) + 6(z-7) = 0$$

b. اثبت أن $|r'(t)| = 3(t^2+2)$ ثم استنتج طول قوس المنحنى المحدد بالنقطتين

$$A(0,-2,1); t_1 = 0 \quad / \quad B(1,1,7); t_0 = 1$$

$$\vec{r} = (t^3, 3t^2-2, 6t+1) \Rightarrow \vec{r'} = (3t^2, 6t, 6)$$ (1)

$$|\vec{r'}| = \sqrt{9t^4+36t^2+36} = 3\sqrt{t^4+4t^2+4} = 3\sqrt{(t^2+2)^2}$$

$$|\vec{r'}| = 3(t^2+2)$$ (1)

طول المنحنى من t_0 إلى t

$$S(t) = \int_a^t |\vec{r'}(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t} 3(t^2+2)\,dt = \int_0^1 3(t^2+2)\,dt$$ (1)

$$= 3\left(\frac{t^3}{3} + 2t\right)\Big|_0^1 = 1+6 = 7.$$ (1)

c. أوجد المعلم الحرفي

$$\vec{T} = \frac{\vec{r'}}{|\vec{r'}|}; \quad \vec{N} = \frac{\vec{T'}}{|\vec{T'}|}; \quad \vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$ (5) (3) (5)

$$\vec{r} = (t^3, 3t^2-2, 6t+1) \Rightarrow \vec{r'} = (3t^2, 6t, 6) \Rightarrow |\vec{r'}| = 3(t^2+2)$$ (3)

$$\vec{T} = \frac{(3t^2, 6t, 6)}{3(t^2+2)} = \frac{(t^2, 2t, 2)}{(t^2+2)} = \frac{t^2}{t^2+2}\vec{i} + \frac{2t}{t^2+2}\vec{j} + \frac{2}{t^2+2}\vec{k}$$

$$\vec{T'} = \left(\frac{2t(t^2+2) - 2t.t^2}{(t^2+2)^2}, \frac{2(t^2+2) - 2t(2t)}{(t^2+2)^2}, \frac{-4t}{(t^2+2)^2}\right)$$

$$\vec{T'} = \frac{(4t, -2t^2+4, -4t)}{(t^2+2)^2}$$

$$|\vec{T}'| = \frac{2\sqrt{8t^2+(2-t^2)^2}}{(t^2+2)^2} = \frac{2\sqrt{t^4+4t^2+4}}{(t^2+2)^2} = \frac{2(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = \frac{2}{(t^2+2)}$$

(3)

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|} = \frac{(4t, -2t^2+4, -4t)}{(t^2+2)^2} \cdot \frac{(t^2+2)}{2} = \frac{(2t, 2-t^2, -2t)}{(t^2+2)}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{t^2}{t^2+2} & \frac{2t}{t^2+2} & \frac{2}{t^2+2} \\ \frac{2t}{t^2+2} & \frac{2-t^2}{t^2+2} & \frac{-2t}{t^2+2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(t^2+2)^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^2 & 2t & 2 \\ 2t & 2-t^2 & -2t \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{(t^2+2)^2}\left((-2t^2-4)\vec{i} + (2t^3+4t)\vec{j} + (-2t^2-t^4)\vec{k}\right)$$

(3)

$$\vec{B} = \frac{-2}{t^2+2}\vec{i} + \frac{2t}{t^2+2}\vec{j} - \frac{t^2}{t^2+2}\vec{k}$$

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

امتحان مقرر التحليل المتجهي والعقدي
لطلاب السنة الثانية فيزياء
الدورة الفصلية الاولى: ٢٠٢٤-٢٠٢٥

الاسم:
الدرجة: ٩٠
المدة:

نموذج A

السؤال الاول:(٣٠ د) ليكن لدينا الدالة العقدية التالية:

$$f(z) = 3z^2 + 2z$$

a. أثبت باستخدام شرطي كوشي-ريمان ان الدالة السابقة تحليلية

b. احسب التكامل التالي

$$\int_{1-i}^{2+i} f(z)\ dz$$

c. هل الدالة التالية توافقية

$$u(x,y) = x^2 + 2xy^2$$

السؤال الثاني:(٦٠د) ليكن التابع الشعاعي التالي:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ \ \vec{r}(t) = (t^3+5)\vec{i} + (6t-7)\vec{j} + (3t^2+1)\vec{k}$$

a. أثبت ان التابع الشعاعي املس عند جميع نقاطه.
b. أحسب التقوس والالتفاف عند جميع نقاطه الاملس عندها ثم اوجد ثلاثية فرنييه.
c. أوجد معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظم للتابع الشعاعي السابق في النقطة

$$B(5,-7,1);\ \ t=0$$

مدرسة المقرر: د.حنان علي

A to Z

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial (x^2+2xy^2)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x+2y^2\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial (x^2+2xy^2)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4xy\right) = 4x$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية موجودة ومستمرة على $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + 4x \neq 0 \quad (5)$$

والدالة غير توافقية ولا في اي نقطة .

السؤال الثاني : ليكن التابع الشعاعي التالي

$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 ; \quad \vec{r}(t) = (t^3+5)\vec{i} + (6t-7)\vec{j} + (3t^2+1)\vec{k}$$

a. اثبت أن التابع الشعاعي املس عند كل نقاطه .

$$\vec{r}(t) = (t^3+5)\vec{i} + (6t-7) + (3t^2+1)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r'} = (3t^2, 6, 6t) \quad , \quad \vec{r''} = (6t, 0, 6) \quad , \quad \vec{r'''} = (6, 0, 0)$$

(2)

بالتالي فان

$$|\vec{r'}| = \sqrt{9t^4+36+36t^2} = 3\sqrt{4+t^4+4t^2} = 3(t^2+2) \quad (2)$$

مباشرة $|\vec{r'}| = 3(t^2+2) \neq 0 \quad ; \forall t \in \mathbb{R}$

(4)

فالتابع الشعاعي $\vec{r}$ املس عند كل نقاطه

b. احسب التقوس والالتفاف عند كل نقاطه واوجد المعادلة الطبيعية لفرينيه .

التقوس يعطى بالعلاقة

$$(5) \quad K(t) = \frac{|\vec{r'}(t) \wedge \vec{r''}(t)|}{|\vec{r'}(t)|^3}$$

$$\vec{r'}(t) \wedge \vec{r''}(t) = (36, 18t^2, -36t) \Rightarrow |\vec{r'} \wedge \vec{r''}| = 18\sqrt{4+t^2+4t^4}$$

$$K(t) = \frac{2\sqrt{4+t^2+4t^4}}{3(t^2+2)^3} \quad (3)$$

A to Z

الانحناء يعطى بالعلاقة:

$$\forall t \in \mathbb{R};\quad c = \frac{(\vec{r'}, \vec{r''}, \vec{r'''})}{|\vec{r'} \wedge \vec{r''}|^2} = \frac{216}{324(4t^2+4t^4)}$$ (5) (3)

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r'}(t)|} = \frac{(3t^2, 6, 6t)}{3(t^2+2)} = \frac{(t^2, 2, 2t)}{(t^2+2)}$$ (5) (3)

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = \frac{(4t, -4t, 4-2t^2)}{2} = \frac{(2t, -2t, 2-t^2)}{(t^2+2)}$$ (5) (3)

حيث $\vec{T}'(t) = \frac{(4t, -4t, 4-2t^2)}{(t^2+2)^2}$; $|\vec{T}'(t)| = \frac{2}{(t^2+2)^2}$

$$\vec{B}(t) = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{t^2}{t^2+2} & \frac{2}{t^2+2} & \frac{2t}{t^2+2} \\ \frac{2t}{t^2+2} & \frac{-2t}{t^2+2} & \frac{2-t^2}{t^2+2} \end{vmatrix} = \frac{(2, t^2, -2t)}{(t^2+2)}$$ (5) (3)

C. أوجد معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظمي لتابع $\vec{r}(t)$ في النقطة $B(5,-7,1)$ الموافقة لـ $t=0$.

أي: $t_0 = 0$

ليكن $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$

معادلة المستقيم المماس في النقطة $t_0 = 0$

$$D: \frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y-g(t_0)}{g'(t_0)} = \frac{z-h(t_0)}{h'(t_0)}$$ (6)

معادلة المستوي الناظم

$$f'(t_0)(x-f(t_0)) + g'(t_0)(y-g(t_0)) + h'(t_0)(z-h(t_0)) = 0$$ (6)

A to Z

سلم تصحيح امتحان مقرر التحليل العقدي/لطلاب السنة الثانية فيزياء/الدورة الفصلية الثاني 2025-2024

(30)

السؤال الثاني: ليكن لدينا الدالة العقدية التالية: $f(z)=3z^2+2z$

a. اثبت باستخدام شرطي كوشي-ريمان أن الدالة $f(z)$ تحليلية:

شرطي كوشي-ريمان:

$$f(z)=u+iv \qquad z=x+iy$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

(5)

$$f(z)=3z^2+2z=3(x+iy)^2+2(x+iy)=3x^2-3y^2+6xyi+2x+2iy$$

$$f(z)=\underbrace{(3x^2-3y^2+2x)}_{u(x,y)}+i\underbrace{(2y+6xy)}_{v(x,y)}$$

(3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x+2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-6y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6y \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=6x+2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad (1) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد الشرطين محققان و الدالة $f(z)$ تحليلية

b. احسب التكامل التالي:

$$\int_{1-i}^{2+i} f(z)\,dz=\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\,dz=z^3+z^2\Big|_{1-i}^{2+i}=7+19i$$

(10)

c. هل الدالة التالية توافقية: $u=x^2+2xy^2$ ؛

حتى تكون الدالة توافقية يجب أن تحقق المعادلة (معادلة لابلاس) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

حيث مشتقاتها الجزئية موجودة ومستمرة

حيث المرجة الثانية.

(5)

A to Z

جامعة طرطوس | امتحان مقرر تحليل عقدي ومتجهي | اسم الطالب :

كلية العلوم | لطلاب السنة الثانية فيزياء | المدة : ساعتان

قسم الفيزياء | الدورة الفصلية الأولى للعام الدراسي 2023-2024 | الدرجة : 90

.....

السؤال الأول (35 درجات): لدينا المنحني C المعطى بالمعادلات الوسيطية التالية

$$x(t)=\cos t \quad , \quad y(t)=\sin t \quad , \quad z(t)=t$$

1. أوجد أشعة الواحدة لثلاثية فرينه
2. أوجد معادلة المستوي الملاصق في النقطة الموافقة للقيمة $t=0$
3. أوجد طول قوس المنحني على المجال $[0,2\pi]$

السؤال الثاني (10 درجات) :

ادرس النقاط الشاذة للمنحني C المعطى بالشكل $f(x_1,x_2)=x_2^2-x_1^2+x_1^3=0$

السؤال الثالث (10 درجات) :

1. ليكن C منحنياً نظامياً من الصف C^m حيث $m\geq 2$ ، ماهوالشرط اللازم و الكافي حتى يكون C مستقيماً
2. ليكن الشعاع $\overrightarrow{w}$ يعبر عن تدفق سائل ما ، ماالتفسير الفيزيائي للمقدار $div\overrightarrow{w}>0$

السؤال الرابع (10 درجات) : عين مجموعة نقاط الفضاء $\mathbb{R}^3$ التي يكون فيها شعاع تدرج التابع

$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ موازياً للمحور OZ

السؤال الخامس(25 درجات) :

1. ليكن العدد العقدي $z=1+i\sqrt{3}$ اكتب z بالشكل المثلثي ثم أوجد الجذور التكعيبية له
2. اثبت ان الدالة $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ تحليلية في المستوي العقدي

مع تمنياتي بالتوفيق

طرطوس 2024/1/28

مدرسة المقرر

نسرين الخمير

مكتبة A to Z

السؤال الأول:

(1) $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{e_1} + \sin t\,\vec{e_2} + t\,\vec{e_3}$

$\vec{r}'(t) = -\sin t\,\vec{e_1} + \cos t\,\vec{e_2} + \vec{e_3}$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{2}$ $\qquad \vec{T} = \dfrac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\vec{e_1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\vec{e_2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_3}$ (5)

$\vec{N} = \dfrac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|} = \dfrac{-\cos t\,\vec{e_1} - \sin t\,\vec{e_2}}{1} = -\cos t\,\vec{e_1} - \sin t\,\vec{e_2}$ (5)

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\vec{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\vec{e_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_3}$$ (5)

(2) $[\vec{y}(t) - \vec{r}(t)] \cdot \vec{B} = 0$ (5)

المستوي الملاصق:

$\vec{y}(x,y,z)$ $\qquad \vec{r}(t_0) = \vec{e_1} + 0\,\vec{e_2} + 0\,\vec{e_3}$

$$\left[(x-1)\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}\right] \cdot \left[0\,\vec{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_3}\right] = 0$$

$0 - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \Rightarrow -y + z = 0$ (5)

(3) $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\pi$ (5) (5)

السؤال الثاني:

(1) $F_{x_1} = -2x_1 + 3x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ أو $x_1 = \frac{2}{3}$

(1) $F_{x_2} = 2x_2 = 0$

$\Rightarrow A(0,0) \in C$ (1)

$B(\frac{2}{3}, 0) \notin C$ (1)

ندرس نوع النقطة A:

(1) $F_{x_1x_1} = -2 + 6x_1\big|_A = -2$

(1) $F_{x_1x_2} = 0$

(1) $F_{x_2x_2} = 2$

$\Delta = 0 - 2(-2) = 4 > 0$ (1)

(2) A نقطة سرج مضاعفة (عقدة)

السؤال الثالث:

(5) ① أن يكون تقوس المنحني معدوماً في كل نقطة من نقاطه

(2) ② أن المماس يتفق من النقطة المعتبرة أكثر من أن يتفق إليها. (5)

مكتبة A to Z

السؤال الرابع:

$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = (3x^2 - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (3z^2 - 3xy)\vec{k}$ (2)

$\overrightarrow{grad}\, f \parallel \vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{grad}\, f \perp \vec{i} \\ \overrightarrow{grad}\, f \perp \vec{j} \end{cases}$ (2)

(2) $\overrightarrow{grad}\, f \cdot \vec{i} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3yz = 0 \Rightarrow x^2 = yz$

(2) $\overrightarrow{grad}\, f \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow 3y^2 - 3xz = 0 \Rightarrow y^2 = xz$

$\Rightarrow \frac{x^2}{y} = \frac{y^2}{x}$

$y^3 = x^3$

$y = x$

بالتعويض في (2) $x = y = z$

السؤال الخامس:

(1) $r = 2$ (2)

$\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ (2)

$\Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (2)

$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3}\right)$ (1) $k = 0, 1, 2$

$z_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right]$ (2)

$z_1 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right]$ (2)

$z_2 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right]$ (2)

(2) $u = e^x\cos y \qquad v = e^x\sin y$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y$, (2) $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$ $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (1)

(2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y$, (2) $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$ $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ (1)

$\Rightarrow$ دالة f كلية (2)

مكتبة A to Z

مع التمنيات

بالتوفيق والنجاح

مكتبة

A to Z