ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الأولى

اسئلة دوراة محلولة

جبر خطي

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي
لطلاب السنة الأولى- فيزياء
الدورة الفصلية الثانية

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (60 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+a & a & a & \dots & a & 2 \\ a & x & a & \dots & a & 2 \\ a & 0 & x & \dots & a & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \dots & x & 2 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 8 & 5 \\ 3 & -5 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

أ - أوجد ناتج مايلي : BA , C^TB , $2C-\frac{1}{3}I$

ب - هل A جذر لكثير الحدود $f(x)=-x^2+3x-5$.

ت - أوجد مقلوب المصفوفة C .

ث - أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة غوص:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=5 \\ 2x_1+3x_2+5x_3&=8 \\ 4x_1\quad\quad+5x_3&=2 \end{aligned}$$

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2025-8-26

Ato Z

السؤال الأول [60]

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & a & z \\ 0 & x & a & a & \cdots & a & z \\ 0 & 0 & x & a & \cdots & a & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & a & \cdots & a & z \\ a & x & a & a & \cdots & a & z \\ a & 0 & x & a & \cdots & a & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1} \times z + 0 = z x^{n-1}$$

8/

ب/ $BA = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 5/

ج/ $C^T \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 0 \\ 32 & -12 \end{bmatrix}$ 8/

$$2C - \frac{1}{3} I = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 & 8 \\ 2 & \frac{5}{3} & 12 \\ -6 & 0 & -\frac{41}{3} \end{bmatrix}$$ 8/

د/ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(A) = -A^2 + 3A - 5$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 5/

هـ/ المعادلة

ج/

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[3i_1+i_2]{-i_1+i_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}i_3} 5/$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[-4i_3+i_1]{-2i_3+i_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] 5/$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ب/

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \\ 3 & -5 & 11 & 9 \end{array}\right] \begin{matrix} 2i_1+i_3 \\ i_1+i_2 \\ 3i_1+i_4 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-i_3+i_4} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow r(D) = 2$ 6/

A+O

السؤال الثاني [30]

11

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-4i_1+i_3]{-2i_1+i_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{4i_2+i_3}$$

8/

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 5 \\ x_2+3x_3 &= -2 \\ 13x_3 &= -26 \\ -3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

7/

$\Rightarrow x_3=-2 \Rightarrow x_2=-2$

$\Rightarrow x_1=5-x_2-x_3=3$

12

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda)-3 = \lambda^2-8\lambda+12 = (\lambda-6)(\lambda-2)$$

5/

$\Rightarrow \lambda_1=6 \quad , \quad \lambda_2=2$

من أجل $\lambda_1=6$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 3x_1+x_2=0$$

نفرض $x_2=r$

$\Leftarrow x_1=\frac{1}{3}r \Leftarrow$

$$E_{\lambda_1}=\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{3}r \\ r \end{bmatrix} ; r\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow E_{\lambda_1} = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

5/

من أجل $\lambda_2=2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1+x_2=0 \Rightarrow$$

نفرض $x_2=r$

$\Leftarrow x_1=-r \Leftarrow$

$$E_{\lambda_2}=\left\{\begin{bmatrix} -r \\ r \end{bmatrix} ; r\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow E_{\lambda_2} = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}\right\}$$

5/

A to Z

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي
لطلاب السنة الأولى- فيزياء
الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (45 درجة) **1-** أوجد قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & x & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 0 & x & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أ - أوجد ناتج مايلي : BA , CA^T

ب - هل C جذر لكثير الحدود $f(x)=-x^2+4x-3$.

ت - أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (45 درجة) **1-** لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} -x_1-x_2+2x_3&=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3&=0 \\ 2x_1+4x_2+\lambda x_3&=0 \end{aligned}$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوص مناقشاً حسب قيم λ .

2- أوجد مقلوب المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ باستخدام نظرية كيلي هاملتون.

3- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، ثم إذا علمت أن $\lambda=-2$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي الموافق لهذه القيمة الذاتية فقط.

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2025-2-25

د. علياء حكيم

A to Z

جد حظ
سنة فيزياء

السؤال الأول [45]

ا) ا

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 1 & x & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 1 & 0 & x & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 0 & x & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 + x^{n-1} \times 3 = 3x^{n-1}$$

8/

ا) ب

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -4 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

7/

ب) ا

$$CA^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

8/

ب) ب

$$C^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7/

ب) ج

$$f(C) = -C^2 + 4C - 3I = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

7/

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \neq O_{3\times 3}$$

C ليست جذر لـ $f(x)$.

ب)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -i_1+i_2 \\ -i_1+i_3 \\ -i_1+i_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8/

$$\begin{matrix} -2i_2+i_3 \\ \frac{1}{2}i_2+i_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(D) = 3$$

السؤال الثاني [45]

ا)

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & \lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} 3i_1+i_2 \\ \longrightarrow \\ 2i_1+i_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & \lambda+4 \end{bmatrix} \underline{2i_2+i_3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ & & \lambda+14 \end{bmatrix}$$

8/

من أجل $\lambda \neq -14$ للجملة حل وحيد هو الحل الصفري لأن الجملة تكون مثلثية.

من أجل $\lambda = -14$ نحصل على الجملة:

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-x_2 + 5x_3 = 0$$

الجملة عدد لا نهائي من الحلول. نضع $x_3 = \alpha \Leftarrow x_2 = 5\alpha \Leftarrow x_1 = -3\alpha$

8/

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+8 = \lambda^2-4\lambda+11$$ 6/ [2]

$$\Rightarrow A^2-4A+11I=0 \xrightarrow{\times A^{-1}} A-4I+11A^{-1}=0 \Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{11}(A-4I)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{11}\left(\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{11} & -\frac{4}{11}\\ \frac{2}{11} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}$$ 7/

[3]

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-c_1+c_3} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$ 8/

$$\xrightarrow{l_3+l_2} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2$$

نأخذ $\lambda=-2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-l_1+l_3]{-l_1+l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1+x_2-x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \end{matrix}$$ 8/

$$x_3=x \Leftarrow x_1=0 \Rightarrow x_2=x$$ نضع

$$\Rightarrow E_\lambda=\left\{\begin{bmatrix}0\\ x\\ x\end{bmatrix};\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

A to Z

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي
لطلاب السنة الأولى- فيزياء
الدورة الفصلية الثانية

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (45 درجة) **1-** أوجد قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

أ- أوجد ناتج مايلي : BA , $B^T C$, $A^2 - 4I$

ب- أوجد مقلوب المصفوفة C .

ت- أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (45 درجة) **1-** أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة غوص:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$.

3- أثبت أن $S = \{v_1 = (-1,4) , v_2 = (3,2)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S ، ثم اكتب الشعاع $(1,-2)$ كتركيب خطي لعناصر S.

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2024-7-24

د. علياء حكيم

مكتبة A to Z

السؤال الأول [45]

$$\Delta = \prod_{k>\ell} (a_k - a_\ell) = (2-5)(2-3)(2-1)(5-3)(5-1)(3-1) = 48$$ 5

ا) 2

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$ 5

$$B^T \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 18 & 17 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ 5

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$$ 5

$$A^2 - 4I = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 20 & 1 \end{bmatrix}$$ 5

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-i_1+i_3]{-2i_1+i_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-i_2+i_3}$$ 2 2 to

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-i_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3i_3+i_1]{-i_3+i_2}$$ 2 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{4i_2+i_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$ 2 2

$$\xrightarrow{-i_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ 1

$|C| = -1$

ب

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 2 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[3i_1+i_3]{2i_1+i_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 14 & -4 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-2i_2+i_3}$$ 5

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow r(D) = 2$$

السؤال الثاني: [45]

ا

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[-i_1+i_3]{-2i_1+i_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & -4 & 1 & 12 \end{array}\right]$$ 8

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 8 \\ -4x_2 + x_3 &=& -12 \\ -5x_3 &=& -15 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 = 3$$

مكتبة A to Z

$\Rightarrow -4x_2 = -12 - x_3 = -12 - 3 = -15 \Rightarrow x_2 = \frac{15}{4}$ 7/

$\Rightarrow 2x_1 = 8 - x_2 - 2x_3 = 8 - \frac{15}{4} - 6 = -\frac{7}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{8}$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$ 12

$= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ او $\lambda_2 = 6$ 5/

من أجل $\lambda_1 = 1$

$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4x_1 - x_2 = 0$

نضع $x_2 = \alpha \Leftarrow x_1 - \frac{x_2}{4} = \frac{\alpha}{4}$

$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{4} \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_{\lambda_1}$ من الشكل $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 5/

من أجل $\lambda_2 = 6$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 - x_2 = 0$

نضع $x_2 = \alpha \Leftarrow x_1 = -\alpha$

$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_{\lambda_2}$ من الشكل $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 5/

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(-1, 4) + \alpha_2(3, 2) = (0, 0)$ 13

$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 14\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$ 8/

وبالتالي S مستقلة خطياً، وبما أن عدد عناصر S يساوي 2 وهو بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ فإن S قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$.

$\alpha_1(-1, 4) + \alpha_2(3, 2) = (1, -2)$

$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \\ 14\alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{7}$ 7/

$\Rightarrow -\alpha_1 = 1 - 3\alpha_2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{4}{7}$

$(1, -2) = -\frac{4}{7} v_1 + \frac{1}{7} v_2$

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية — امتحان جبر خطي — المدة ساعتان

جامعة طرطوس — لطلاب السنة الأولى– فيزياء — الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم — الدورة الفصلية الأولى — اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (40 درجة) **1**– أوجد قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \dots & x & x+a \end{vmatrix}$$

2– لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & -1 \\ -4 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

أ – أوجد ناتج مايلي : BA^2 ، B^TC ، $2C-\frac{1}{3}I$

ب – أوجد مقلوب المصفوفة C باستخدام نظرية كيلي هاملتون .

ت – أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (30 درجة) **1**– أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر:

$$\begin{aligned} -2x+y-z&=-3 \\ 3x-2y+2z&=4 \\ x+y+z&=9 \end{aligned}$$

2– أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ثم إذا علمت أن $\lambda=-1$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي الموافق لهذه القيمة الذاتية وأساس لهذا الفضاء.

السؤال الثالث: (20 درجة) **1**– هل المجموعة $S=\{v_1=(1,2,1),v_2=(-2,0,-1),v_3=(3,1,-1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ ؟

2– لتكن $S=\{v_1=2x,v_2=1+x,v_3=x^2\}$ أساس للفضاء الشعاعي $P_2(x)$. أوجد قاعدة عامة لكتابة أي عنصر من عناصر $P_2(x)$ كتركيب خطي لعناصر S ، ثم اكتب الشعاع $p(x)=3-4x+x^2$ كتركيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2024-2-26

د. علياء حكيم

مكتبة A to Z

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 25 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow BA^2 = \begin{bmatrix} 22 & -11 \\ 2 & 10 \\ 101 & 21 \end{bmatrix}$$ (أ) 2

$$B^T \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 22 & 8 \end{bmatrix}$$ 5

$$2C - \frac{1}{3}I = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 4 & 0 \\ 4 & -\frac{7}{3} & 2 \\ 0 & 10 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$ 5

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)+5 = \lambda^2 - 5\lambda + 11$$ (ب) 10

$$\Rightarrow A^2 - 5A + 11I = 0 \Rightarrow A - 5I + 11A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}(-A+5I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}\left(-\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & -1 \\ -4 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[4i_1+i_4]{-3i_1+i_3,\ -2i_1+i_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-i_2+i_4]{-2i_2+i_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ (ت) 6

$$\Rightarrow v(D) = 3$$

A to Z مكتبة

السؤال الثاني: [30]

11

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4+2-3)-(2-4+3) = 3-1 = 2$$ 3

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6+18-4)-(18-6+4) = 20-16 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2$$ 4

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = (-8-6-27)-(-4-9-36) = -41+49 = 8 \Rightarrow x_2 = \frac{8}{2} = 4$$ 4

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (36+4-9)-(6-8+27) = 31-25 = 6 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3$$ 4

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)-8] = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-5) = 0$$

$$(-\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda+5=0) \qquad (1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1) = 0 \quad 7/$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 5$ قيم ذاتية

من أجل $\lambda_1 = -1$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad 8/$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

نضع $x_2 = \alpha$ ، $x_3 = \beta$ $\Leftarrow$ $x_1 = x_2 - x_3 = \alpha - \beta$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_{\lambda_1} \text{ أساس } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

مكتبة A to Z

السؤال الثالث: [20]

11/

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

$$\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(-2,0,1) + \alpha_3(3,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{2l_1+l_2 \\ -l_1+l_3}} \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

10/

$$4l_3+l_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -9\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

ومنه S مستقلة خطياً، وبما أن عدد عناصر S هو 3 وبما أن بعد الفضاء فإن S قاعدة لـ $\mathbb{R}^3$

12/

$$ax^2+bx+c = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$= \alpha(2x) + \beta(1+x) + \gamma(x^2) \quad 8/$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \gamma \\ b = 2\alpha + \beta \\ c = \beta \end{cases} \Rightarrow b = 2\alpha + c \Rightarrow \alpha = \frac{b-c}{2}$$

$$\Rightarrow ax^2+bx+c = \frac{b-c}{2} v_1 + c v_2 + a v_3$$

$$\Rightarrow 3 - 4x + x^2 = -\frac{7}{2}(2x) + 3(1+x) + 1(x^2) \quad 2/$$

الجمهورية العربية السورية — امتحان جبر خطي — المدة ساعتان

جامعة طرطوس — لطلاب السنة الأولى- فيزياء — الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم — الدورة الفصلية الثانية — اسم الطالب:.....

السؤال الأول: (45 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+3 & a & a & \dots & a & a \\ 3 & x & a & \dots & a & a \\ 3 & 0 & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 3 & 0 & 0 & \dots & x & a \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

2 - إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ وكان $f(x)=-x^2+3x-2$. احسب $f(A)$ و $r(A)$ رتبة المصفوفة A .

3 - أوجد مقلوب المصفوفة $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

السؤال الثاني: (45 درجة) 1- أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة غوص:

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1 \\ 2x+3y+z&=0 \\ x+5y&=-1 \end{aligned}$$

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

3- أثبت أن $S=\{v_1=(-1,-3)\,,\,v_2=(2,4)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S ، ثم اكتب الشعاع $(2,-1)$ كتركيب خطي لعناصر S.

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2023-8-2

د. علياء حكيم

A to Z

سلم تصحيح بكالوريا فصل ثاني
بن فيزياء فصل ثاني

السؤال الأول: [45]

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & a & a & \cdots & a \\ 3 & x & a & \cdots & a \\ 3 & 0 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = ax^{n-1} + 0 = ax^{n-1}$$

1/

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -10 & 2 \\ -2 & -14 & 10 \\ -8 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

2/

$$f(x) = -A^2 + 3A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 2 & 14 & -10 \\ 8 & 2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 8 & 12 & 2 \\ 5 & -7 & 15 \end{bmatrix}$$

3/

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 + l_3]{-2l_1 + l_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2l_2 + l_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

4/

$$[B : I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-l_1 + l_3]{-2l_1 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

5/

$$\xrightarrow{-2l_2 + l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

6/

$$\xrightarrow[-2l_3 + l_1]{l_3 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 + l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني: [45]

1/

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-l_1 + l_3]{-2l_1 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-l_2 + l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

7/

A to Z

حملة المعادلات المرافقة

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$7x_2 - x_3 = -2$$

نفرض $x_3 = \alpha \Leftarrow x_2 = \frac{-2+\alpha}{7} \Leftarrow x_1 = 1 + 2x_2 - x_3$ 8/

$$\Leftarrow x_1 = 1 + \frac{-4+2\alpha}{7} - \alpha = \frac{-5\alpha+3}{7}$$

مجموعة الحلول $\left\{ x_1 = \frac{-5\alpha+3}{7}, x_2 = \frac{-2+\alpha}{7}, x_3 = \alpha \right\}$

2/ $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$

$= (\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0 \Rightarrow$ 5/

$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 5$

من أجل $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحملة المرافقة $x_1 + x_2 = 0 \Leftarrow$ نفرض $x_2 = \alpha \Leftarrow x_1 = -\alpha$ 5/

$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$ أساس $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

من أجل $\lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

الحملة المرافقة $-2x_1 + x_2 = 0 \Leftarrow$ نفرض $x_2 = \alpha \Leftarrow x_1 = \frac{1}{2}\alpha$ 5/

$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$ أساس $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3/ $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha(-1,-3) + \beta(2,4) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -\alpha + 2\beta = 0 \\ -3\alpha + 4\beta = 0 \end{matrix} \xrightarrow{-3L_1 + L_2} \begin{matrix} -\alpha + 2\beta = 0 \\ -2\beta = 0 \end{matrix} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

7/ v_1 و v_2 شعاعان مستقلان خطياً وبما أن عدد عناصر S يساوي 2 وهو بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ فإن S قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (a,b) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(-1,-3) + \beta(2,4)$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -\alpha + 2\beta = a \\ -3\alpha + 4\beta = b \end{matrix} \xrightarrow{-3L_1 + L_2} \begin{matrix} -\alpha + 2\beta = a \\ -2\beta = -3a + b \end{matrix} \Rightarrow \beta = \frac{3a-b}{2}$$ 6/

$$\Rightarrow \alpha = 2\beta - a = 2a - b \Rightarrow (a,b) = (2a-b)v_1 + \left(\frac{3a-b}{2}\right)v_2$$

$$\Rightarrow (2,-1) = (2(2)+1)v_1 + \frac{3(2)+1}{2}v_2 = 5v_1 + \frac{7}{2}v_2$$ 2/

A to Z

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي
لطلاب السنة الأولى- فيزياء
الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (٣٠ درجة) ١- أوجد قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 6 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 6 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 6 \end{vmatrix}$$

٢- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

أ- أوجد ناتج مايلي : BA , C^2A^T

ب- أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (٤٠ درجة) ١- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3&=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3&=0 \\ -x_1-2x_2+\lambda x_3&=0 \end{aligned}$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوص ،ناقشاً حسب قيم λ .

٢- أوجد مقلوب المصفوفة $A=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ باستخدام نظرية كيلي هاملتون.

٣- أ جد القيم الذاتية للمصفوفة $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، ثم إذا علمت أن $\lambda=1$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي الموافق لهذه القيمة الذاتية فقط.

السؤال الثالث: (٢٠ درجة) ١- هل الشعاع $v=2x^2-x-1$ تركيب خطي للأشعة $v_1=x^2-x$, $v_2=2x-1$, $v_3=x^2-1$ في الفضاء الشعاعي $P_2(x)$ ؟

٢- أثبت أن $S=\{v_1=(-1,3),v_2=(2,-1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S .

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

٢٠٢٣-٢-٢٠

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

A to Z

جبر خطي
س١ فيزياء / فصل أول

السؤال الأول: [30]

1

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 6 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 6 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ضرب العمود الأول بـ } (-1) \text{ وإضافته للباقي أعمدة}} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4^{n-1}$$ 6

2 (أ)

$$B.A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -6 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ 5

$$C^2 = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ 5

$$C^2 . A^T = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -10 & 2 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$$ 5

(ب)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ 9

$$\xrightarrow[4r_4+r_3]{2r_4+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow r(D) = 2$$

السؤال الثاني: [40]

1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 2+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -5+\lambda \end{bmatrix}$$

إذا كانت $\lambda + 5$ تكون المجموعة مستقلة ولها حل وحيد هو الحل الصفري 7

إذا كانت $\lambda = 5$ نحصل على مجموعة المعادلات:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$3x_2 - 7x_3 = 0$$

لدينا مجهولين رئيسيان x_1, x_2 ومجهول حر x_3 نفرض $x_3 = \alpha$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{7}{3}\alpha, \quad x_1 = \frac{7}{3}\alpha - 2\alpha = \frac{\alpha}{3}$$ 8

عبارة الحل العام:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{3} \\ \frac{7}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

هل $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ ؟ من فضاء الحل

A to Z

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)+15=0 \quad /2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 13 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - A + 13I = 0 \Rightarrow A - I_2 + 13A^{-1} = 0 \quad /10$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{13}(A - I_2) = -\frac{1}{13}\left(\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-1}{13} \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 4 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2+l_1} \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 4 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \quad /3$$

$$\xrightarrow{-l_1+l_2} \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow (2-\lambda)(-1-\lambda)(5-\lambda) = 0 \quad /7$$

$$\Rightarrow \lambda = -1, \lambda = 2, \lambda = 5$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[-4l_2+l_3]{-2l_2+l_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad /3$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

نفرض $x_2 = \alpha \Leftarrow x_1 = -\alpha$

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_\lambda \text{ مولد بـ } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني [20]

$$2x^2 - x + 1 = \alpha(x^2 - x) + \beta(2x-1) + \gamma(x^2-1) \quad /1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ -\alpha + 2\beta = -1 \\ -\beta - \gamma = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta + 1 \\ \gamma = -\beta + 1 \end{cases} \quad /6$$

$$\Rightarrow 2\beta + 1 - \beta + 1 = 2 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma = 1$$

$$\Rightarrow v = v_1 + 0v_2 + v_3$$ وبالتالي v تركيب خطي لـ

/2 ب

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(-1,3) + \alpha_2(2,-1) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{3l_1+l_2} \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 5\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad /7$$

وبالتالي S' مستقلة خطياً وعدد عناصرها 2 مثل بعد الفضاء وبالتالي S' أساس لـ $\mathbb{R}^2$

ج

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

$$(a,b) = \alpha_1(-1,3) + \alpha_2(2,-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ b = 3\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \xrightarrow{3l_1+l_2} \begin{cases} a = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 3a + b = 5\alpha_2 \end{cases} \rightarrow \alpha_2 = \frac{3a+b}{5} \quad /7$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -a + 2\alpha_2 = -a + 2 \times \frac{3a+b}{5} = \frac{a+2b}{5}$$

$$\Rightarrow (a,b) = \frac{a+2b}{5}(-1,3) + \frac{3a+b}{5}(2,-1)$$

A to Z

الجمهورية العربية السورية — امتحان جبر خطي — المدة ساعتان

جامعة طرطوس — لطلاب السنة الأولى- فيزياء — الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم — الدورة الفصلية الثانية — اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (45 درجة) **1-** أوجد قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&4&16&64\\1&5&25&125\\1&2&4&8\end{vmatrix}$$

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\3&-1&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&4\\1&0\\-1&3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&1\\0&-3&2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&1&1&3\\2&-1&3&4\\5&-1&7&11\end{bmatrix}$$

أ - أوجد ناتج مايلي : AB , C^TB , $\frac{1}{2}C-3I$

ب - أوجد مقلوب المصفوفة C باستخدام نظرية كيلي هاملتون .

ت - أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (45 درجة) **1-** أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر:

$$\begin{aligned}2x+3y+z&=1\\3x-y+2z&=1\\x+4y-z&=2\end{aligned}$$

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}3&-1\\4&-1\end{bmatrix}$.

3- لتكن $S=\{v_1=x-1, v_2=1+x^2, v_3=2x^2\}$ أساس للفضاء الشعاعي $P_2(x)$. أوجد قاعدة عامة لكتابة أي عنصر من عناصر $P_2(x)$ كتركيب خطي لعناصر S ، ثم اكتب الشعاع $p(x)=1-2x+x^2$ كتركيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة — مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2022-7-27 — د. علياء حكيم

سلسلة تمارين المرياد
س 1 فصل ثاني

السؤال الأول: [15]

$\prod_{k<l} (a_k - a_l) = (2-5)(2-4)(2-1)(5-4)(4-1) = 72$ 5 . 1

$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 24 \end{bmatrix}$ 5 1 2

$C^T B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ 5

$\frac{1}{2}C - 3I = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$ 7

$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)+3]$ 1

$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 5$ 8

$\Rightarrow -C^3 + 4C^2 - 8C + 5I = 0 \Rightarrow -C^2 + 4C - 8I + 5C^{-1} = 0$

$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{5}[C^2 - 4C + 8I]$

$\Rightarrow C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & -9 & 1 \end{bmatrix}$ 16

$C^{-1} = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & -9 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[-5l_1+l_3]{-2l_1+l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow r(D) = \frac{5}{2}$ (2)

السؤال الثاني: [45]

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (2+12+6) - (-1+16-9) = 14$ 3 1

(16)

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (1+12+4) - (-2+8-3) = 14$ 4

4

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2+6+7) - (1+8-3) = 0$

4

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-4+12+3) - (-1+18+8) = 14$ 1

$\Rightarrow x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1$

A to Z

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4$ L2 (14)

$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

$\Rightarrow Q(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ 7/ جذر وحيد

نعوض $\lambda = 1$:

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x - y = 0$

نفرض $y = x \Leftarrow 2x = x \Leftarrow x = \frac{x}{2}$

$\Rightarrow E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$ أساس E_λ هو $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 7/

L3

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Rightarrow \alpha(x-1) + \beta(1+x^2) + \gamma(2x^2) = (0,0,0)$ (15)

$\Rightarrow \begin{cases} \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ 7/

بما أن عدد عناصر S مستقلة خطياً، وبما أن عدد عناصر S يساوي 3 وهو نفس بعد الفضاء $P_2(x)$ فإن S قاعدة لـ $P_2(x)$.

$\forall\ a + bx + cx^2 \in P_2(x) \Rightarrow a + bx + cx^2 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$\Rightarrow a + bx + cx^2 = \alpha(x-1) + \beta(1+x^2) + \gamma(2x^2)$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -\alpha + \beta \\ b = \alpha \\ c = \beta + 2\gamma \end{cases} \Rightarrow \beta = a + \alpha = a + b$ 6/

$\Rightarrow 2\gamma = c - \beta = \frac{1}{2}(c - a - b)$

$\Rightarrow a + bx + cx^2 = b v_1 + (a+b) v_2 + \frac{1}{2}(c-a-b) v_3$

ب) $1 - 2x + x^2 = -2v_1 - v_2 + v_3$ 2/

A to Z

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي
لطلاب السنة الأولى- فيزياء
الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

مكتبة A to Z

السؤال الأول: (35 درجة) **1-** أوجد قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+2 & a & a & \dots & a & a \\ 2 & x & a & \dots & a & a \\ 2 & 0 & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & x & a \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

2- إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ وكان $f(x)=x^2-2x+4$. احسب $f(A)$ و $r(A)$ رتبة المصفوفة A .

3- أوجد مقلوب المصفوفة $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1-** لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=2 \\ 2x_1+3x_2-4x_3&=-4 \\ 3x_1+2x_2+9x_3&=\lambda \end{aligned}$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوص مناقشاً حسب قيم λ .

2- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. ثم إذا علمت أن $\lambda=2$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي الموافق لهذه القيمة الذاتية وأساس لهذا الفضاء.

السؤال الثالث: (25 درجة) **1-** هل الشعاع $v=x^2-x+1$ تركيب خطي للأشعة $v_1=x$, $v_2=3x-1$, $v_3=x^2+2$ في الفضاء الشعاعي $P_2(x)$ ؟

2- أثبت أن $S=\{v_1=(1,-2),v_2=(2,1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S .

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2022-2-21

د. علياء حكيم

السؤال الأول : [35] صبرضي

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & x & \cdots & a & a \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & a & a & \cdots & a & a \\ z & x & a & \cdots & a & a \\ z & 0 & x & \cdots & a & a \\ \vdots & & & & & \\ z & 0 & 0 & \cdots & x & a \\ z & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = ax^{n-1} + 0 = ax^{n-1}$$ [1] 5/

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$ [2] 5/

$$f(A) = A^2 - 2A + 4I_3$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 5/

$$= \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 10 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$ 3/

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[2l_1+l_3]{-3l_1+l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2l_2+l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A)=$$ 5/

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-l_1+l_3]{-4l_1+l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ [3] (12)

$$\xrightarrow{l_2+l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[+2l_3+l_1]{-9l_3+l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 14 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{l_2}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

أو) $|A| = -2$

$$\left(\Gamma(A) = \begin{bmatrix} +18 & -4 & -1 \\ 41 & -8 & -9 \\ 10 & -2 & -2 \end{bmatrix} \right.$$

السؤال الثاني : [30]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 2 & 9 & \lambda \end{array}\right] \xrightarrow[-3l_1+l_3]{-2l_1+l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & -1 & 6 & \lambda-6 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2+l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-14 \end{array}\right]$$ [1]

5

مكتبة A to Z

1/ عندما $\lambda \neq 14$ المجموعة تقبل الحل $([0\ 0\ 0;\ \lambda-14 \neq 0])$

عندما $\lambda = 14$ تصبح المجموعة بالشكل:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_2 - 6x_3 = -8$$

8/ بما عدد لانهائي من الحلول. نفرض $x_3 = \alpha \Leftarrow x_2 = 6\alpha - 8$

$x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 - 6\alpha + 8 - \alpha = -7\alpha + 10$.

وبالتالي مجموعة الحلول $\{-7\alpha+10, 6\alpha-8, \alpha\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

12/ $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-c_2+c_3} \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = (2-\lambda)[(4-\lambda)(6-\lambda) - 8] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16)$$

6/ $$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-8)$$

$\Rightarrow$ جذور وهما $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$

من أجل $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

4/ المعادلة المرافقة

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

نفرض $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta \Leftarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Leftarrow x_1 = -\alpha - \beta$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix};\ \alpha, \beta \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

السؤال الثاني [25]

11/ $$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$
$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = \alpha(x) + \beta(3x-1) + \gamma(x^2+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \gamma \\ -1 = \alpha + 3\beta \\ 1 = -\beta + 2\gamma \end{cases} \Rightarrow \beta = 2\gamma - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = -1 - 3\beta$$

وبالتالي نستطيع كتابة v كتركيب خطي لأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$

10/ $$v = -4v_1 + v_2 + v_3$$

مكتبة A to Z

$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha(1,-2) + \beta(2,1) = (0,0)$ 2

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \alpha = 0$$

7 وبالتالي S مستقلة خطياً، وبما أن عدد عناصر S يساوي 2 وهو بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ فإن S أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

$$(a,b) = \alpha v_1 + \beta v_2 \Rightarrow \begin{aligned} a &= \alpha + 2\beta \\ b &= -2\alpha + \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \alpha + 2\beta$$

$$2a + b = 5\beta \Rightarrow \beta = \frac{2a+b}{5} \Rightarrow \alpha = a - 2\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = a - \frac{4a+2b}{5} = \frac{a-2b}{5}$$ 2

$$(a,b) = \frac{a-2b}{5} v_1 + \frac{2a+b}{5} v_2$$

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- فيزياء | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب:

السؤال الأول: (45 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -5 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

أ- أوجد ناتج مايلي : AB , $C^T B$, $C^2 - 3I$

ب- أوجد مقلوب المصفوفة C .

ت- أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (45 درجة) 1- أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة غوص:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ 3x + y - z &= 9 \\ 2x - 2y + z &= -3 \end{aligned}$$

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$.

3- أثبت أن $S = \{v_1 = (1,-2), v_2 = (-3,4)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S ، ثم اكتب الشعاع $(1,-1)$ كتركيب خطي لعناصر S.

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2021-7-29

د. علياء حكيم

A to Z

السؤال الأول :

ب/ $\Delta = (3-2)(3-4)(3-1)(2-4)(2-1)(1-4)$ 1

$= 1(-1)(2)(-2)(1)(3) = 12$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -1 & 27 \end{bmatrix}$ 5 (2)

$C^T \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -2 & 12 \\ 17 & 20 \end{bmatrix}$ 5

$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 5 \\ 22 & 25 & 16 \\ 11 & 4 & 39 \end{bmatrix}$ 10

$C^2 - 3I = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 5 \\ 22 & 25 & 16 \\ 11 & 4 & 39 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 20 & 5 \\ 22 & 22 & 16 \\ 11 & 4 & 36 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3l_1+l_3]{-2l_1+l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -15 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ 4

$\xrightarrow{-4l_2+l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-5l_3+l_1]{4l_3+l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 20 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right]$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 11 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 11 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3l_1+l_4]{-2l_1+l_2} \begin{matrix} -l_1+l_3 \end{matrix}$ 5

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-l_2+l_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 26 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

A to Z

السؤال الثاني :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -3r_1+r_2 \\ -2r_1+r_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -12 \\ 0 & -1 & -1 & -17 \end{array}\right] \quad \text{(2)}$$

(15)

$$\xrightarrow{-r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right] \quad \text{(3)}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x+y+z=7 \\ -2y-z=-12 \end{array} \quad \text{(1)}$$

$$z=1$$

$$\Rightarrow y=6-2z=4 \Rightarrow x=7$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)-4 \quad \text{(2)}$$

(6)

$$= 6-7\lambda+\lambda^2-4 = \lambda^2-7\lambda+6$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-6)=0 \quad \text{(3)} \Rightarrow \lambda_1=1 \ , \ \lambda_2=6$$

نوجد E_{λ_1} أولا :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$$

نعوض $x=\alpha \Leftarrow y=\alpha$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_{\lambda_1} \text{ أساس } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{(6)}$$

ثم نوجد E_{λ_2} أيضا : $\lambda_2=6$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4x+y=0$$

نعوض $y=\alpha$

$$x=-\frac{1}{4}y=-\frac{1}{4}\alpha$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_{\lambda_2} \text{ أساس } \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{(6)}$$

(15)

$$\alpha(1,-2)+\beta(-3,4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-3\beta=0 \\ -2\alpha+4\beta=0 \end{cases} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{cases} \alpha-3\beta=0 \\ -2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0 \quad \text{(5)}$$

مستقلة خطيا ، عدد عناصر = 2 = عدد متغيرات = المتجهات

A to Z

$$(x, y) = \alpha(1, -2) + \beta(-3, 4)$$

$$= (\alpha - 3\beta, -2\alpha + 4\beta)$$

$$\Rightarrow x = \alpha - 3\beta \qquad \alpha - 3\beta = x$$

$$y = -2\alpha + 4\beta \quad \xleftarrow{2R_1 + R_2} \quad -2\beta = 2x + y$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{-2x - y}{2} \Rightarrow \alpha = x + 3\beta = x - \frac{6x - 3y}{2}$$

$$= \frac{-4x - 3y}{2}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{-(4x - 3y)}{2}\right)(1, -2) + \left(\frac{-2x - y}{2}\right)(-3, 4)$$

$$(1, -1) \text{ का } \dots$$

$$(1, -1) = -\frac{1}{2}(1, -2) - \frac{1}{2}(-3, 4)$$

A to Z

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي
لطلاب السنة الأولى- فيزياء
الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة) **1-** أوجد قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2^2 & \dots & 2^2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ x & x & x & \dots & x & x+2^n \end{vmatrix}$$

2- لتكن لدينا المصفوفتان الآتيتان

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

أ -أوجد ناتج مايلي : AB , BA^T , $3B-4I$

ب أوجد رتبة المصفوفة B .

السؤال الثاني: (40 درجة) **1-** أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرمر:

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-2x_3&=10 \\ 3x_1+2x_2+2x_3&=1 \\ 5x_1+4x_2+3x_3&=4 \end{aligned}$$

2- أوجد مقلوب المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ باستخدام نظرية كيلي هاملتون.

3- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ثم إذا علمت أن $\lambda=1$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي الموافق لهذه القيمة الذاتية فقط.

السؤال الثالث: (20 درجة) **1-** هل المجموعة $S=\{v_1=(1,2,1)\,,\,v_2=(-2,0,2)\,,\,v_3=(3,1,-1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي R^3 ؟

2- لتكن $S=\{v_1=2x\,,\,v_2=1+x^2\,,\,v_3=x^2\}$ أساس للفضاء الشعاعي $P_2(x)$. أوجد قاعدة عامة لكتابة أي عنصر من عناصر $P_2(x)$ كتركيب خطي لعناصر S ، ثم اكتب الشعاع $p(x)=2+3x-x^2$ كتركيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

2021-1-25

مكتبة A to Z

السؤال الأول [30]

1

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2^2 & \cdots & 2^2 & 2^2 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ x & x & x & \cdots & x & x+2^n \end{vmatrix}$$

بطرح خطوط العمود 1 من باقي الأعمدة

10

5

5

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2^2 & \cdots & 2^2 & 2^2 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2^2 & \cdots & 2^2 & 2^2 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^n \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^n = 2^{1+2+3+\cdots+n}$$

5

15

تلاحظ على

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

5

(P) 2

$$B \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -7 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

5

$$3B - 4I = 3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 3 \\ -6 & -7 & 0 \\ 9 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

5

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3l_1 + l_3]{2l_1 + l_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

(5)

(5)

$$r(B) = 3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مكتبة A to Z

السؤال الثاني:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad (4)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad (4) \quad \boxed{1} \quad (20)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -14 \quad (4)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 21 \quad (4)$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = +2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{21}{-7} = -3 \quad (4)$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) + 12 \quad \boxed{2} \quad (10)$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 + 12$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 14$$

$$P(A) = 0 \Rightarrow A^2 - 3A + 14 I_2 = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow A - 3I_2 + 14A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{14}(A - 3I_2)$$

$$= -\frac{1}{14}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{4}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & +2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2) \quad \boxed{3}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 2$$

من أجل $\lambda = 1$

$$(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + 4)$$

مكتبة A to Z

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & +2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1+L_3]{-L_1+L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & +2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x_1 \quad & +2x_3 = 0 \\ x_2 & -3x_3 = 0 \end{aligned}$$

نفرض $x_3 = \alpha \Leftarrow x_2 = 3\alpha \Leftarrow x_1 = 2\alpha$

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

E_2 أساس لـ $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

مكتبة A to Z

السؤال الثالث [20]

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(-2,0,2) + \alpha_3(3,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 \quad + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \\ -2L_1+L_2 \\ -L_1+L_3 \end{matrix} \quad \begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 4\alpha_2 - 5\alpha_3 &= 0 \\ 4\alpha_2 - 4\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{-L_2+L_3} \begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 4\alpha_2 - 5\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

وبالتالي S مستقلة خطياً

وبما أن عدد عناصر S يساوي 3 وهي تعد الأبعاد

وبالتالي S أساس لـ $\mathbb{R}^3$

$P(x) = a + bx + cx^2 = \alpha(2x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x^2)$ (2)

$= \beta + 2\alpha x + (\beta + \gamma)x^2$ (1)

$\Rightarrow a = \beta$
$b = 2\alpha$
$c = \beta + \gamma$

$\rightarrow \alpha = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow \gamma = c - \beta = c - a$

ز/

$\rightarrow P(x) = \frac{b}{2}(2x) + a(1+x^2) + (c-a)x^2$

$P(x) = 2 + 3x - x^2 = \frac{3}{2}(2x) + 2(1+x^2) + (-1-2)x^2$

ج/ $= \frac{3}{2}(2x) + 2(1+x^2) - 3(x^2)$

A to Z مكتبة

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- فيزياء | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب:

السؤال الأول: (35 درجة) لتكن لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 5 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

1- احسب $B.A$, $B^T+\frac{1}{2}A$.

2- إذا كان $f(x)=x^2-x+2$. احسب $f(C)$.

3- أوجد مقلوب المصفوفة C .

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned}-x_1-x_2+3x_3&=6\\ 2x_1+4x_2+6x_3&=28\\ 3x_1+2x_2+x_3&=10\end{aligned}$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوص.

2- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}$ ، ثم إذا علمت أن $\lambda=1$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي الموافق لها.

السؤال الثالث: (25 درجة) 1- برهن أن تقاطع فضائين شعاعيين جزئيين W_1 , W_2 من فضاء شعاعي V فوق حقل K هوفضاء شعاعي جزئي منه .

2- أثبت أن $S=\{v_1=(1,2,0)\,,\,v_2=(-2,0,1)\,,\,v_3=(3,1,-\frac{1}{4})\}$ أساس للفضاء الشعاعي R^3 ، ثم اكتب الشعاع $v=(2,0,1)$ كتركيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2020-9-6

د. علياء حكيم

تمرين 1 :

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ 1 1/2 5

$$B^T + \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ 5

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -1 & +1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 22 & 11 \\ 20 & 25 & 4 \\ 5 & 16 & 34 \end{bmatrix}$$ 1/2 3

$$f(C) = \begin{bmatrix} 16 & 22 & 11 \\ 20 & 25 & 4 \\ 5 & 16 & 34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ 1/2

$$= \begin{bmatrix} 17 & 20 & 8 \\ 20 & 26 & 0 \\ 0 & 10 & 41 \end{bmatrix}$$ 1/2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-5L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{4L_2 + L_3}$$ 1/2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-4L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 26 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3L_3 + L_1}$$

$$\xrightarrow{-2L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$ 1/2 3

$$A = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1$ 1

الحل الثاني

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2+2R_1 \\ 3R_1+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 12 & 40 \\ 0 & -1 & 10 & 28 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 12 & 40 \\ 0 & 0 & 16 & 48 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{x_3 = 3}, \quad 2x_2 = 40 - 36 = 4 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

$$-x_1 = 6 + 2 - 9 = -1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1+\lambda & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((4-\lambda)^2 - 9) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2(\lambda - 7) = 0$$

القيم الذاتية $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

حلول المعادلة المناظرة

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

نفرض $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ $\Leftarrow$ $x_1 = -\alpha - \beta$

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Sigma_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

السؤال الثالث:

1) واضح أن $W \subseteq V$ و $W \neq \emptyset$ لأن $0 \in W_1, 0 \in W_2$ و بالتالي $0 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$

$$\forall x, y \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow x, y \in W_1,\ x, y \in W_2$$
$$\Rightarrow x + y \in W_1 \text{ و } x + y \in W_2$$
$$\Rightarrow x + y \in W_1 \cap W_2$$

$$\forall x \in W_1 \cap W_2,\ \forall \alpha \in K \Rightarrow x \in W_1 \text{ و } x \in W_2$$
$$\Rightarrow \alpha x \in W_1,\ \alpha x \in W_2$$
$$\Rightarrow \alpha x \in W_1 \cap W_2$$

من (1) و (2) و (3) نجد أن $W_1 \cap W_2$ فضاء جزئي من V

2)
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(-2,0,1) + \alpha_3\left(3, -\frac{1}{4}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} -2\ell_1 + \ell_2 \\ \longrightarrow \end{array} \right.$$
$$2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{4}\ell_2 + \ell_3 \\ \longrightarrow \end{array} \right. \qquad \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$+4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \qquad 4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \qquad \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2$$
$$2\alpha_1 \quad + \alpha_3 = 0 \quad \Big| \; -2\ell_1 + \ell_2$$
$$\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 1$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2$$
$$11\alpha_2 - 5\alpha_3 = -4$$
$$\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 1$$

$\frac{1}{4}\ell_2 + \ell_3$ →

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2$$
$$11\alpha_2 - 5\alpha_3 = -4$$
$$\alpha_3 = 2$$

$\Rightarrow \alpha_3 = 2 \; ; \alpha_2 = \frac{3}{2}$

$$\alpha_1 = 2 + 3 - 6 = -1$$

$$(2, 0, 1) = -1 \cdot v_1 + \frac{3}{2} v_2 + 2 v_3$$

ية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي
لطلاب السنة الأولى- فيزياء
الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (35 درجة) **1-** أوجد قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$

2- لتكن لدينا المصفوفتان الآتيتان $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد ناتج ما يلي : AB ، BA^T ، $-2B+3I$

3- أوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1-** أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

2- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة كرامر .

السؤال الثالث: (25 درجة) **1-** أثبت أن $S = \{v_1 = (1,2), v_2 = (-4,3)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر R^2 وفق الأساس S .

2- ليكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً وفق القاعدة $f(x,y,z) = (x+y+z, x-z)$. عين $Ker f$ وأوجد أساساً لها، ثم وسع هذا الأساس إلى أساس لـ R^3 .

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2020-2-16

د. علياء حكيم

(15)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2I_1 + I_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4I_1 + I_3 & & & \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{I_2 + I_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-I_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{I_3 + 2I_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2I_3 + I_1 & & & \end{bmatrix} \xrightarrow{-I_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

[35] ... A^{-1} ...

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(1-\lambda)(2-\lambda)+2] + 1(-2(2-\lambda)-2) + (-4+2(1-\lambda))$$

(15)

(a) ... $\prod_{k>\ell} (a_k - a_\ell)$ ...

$$\Delta = (2-1)(5-1)(5-2)(3-2)(3-5)(4-5) = 1 \times 4 \times 1 \times 3 \times 1 \times (-2) = -48$$

(b)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 3 \\ 32 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

(15)

(c) $3B + 2A^T$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 7 & 13 \\ 1 & 0 & -10 \\ 11 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

(d) AB^T

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 3 \\ 21 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

(e) $-2B + 3I$

$$= -2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -10 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda(2 - 3\lambda + \lambda^2 + 2) - 4 + 2\lambda - 2 + 4$$

$$= -2\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda + 4\lambda - 4$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

$$\Rightarrow q(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) =$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = 2$$

$\lambda_1 = -1$ حالة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2l_1 + l_2 \\ \longrightarrow \\ 2l_1 + l_3 \end{matrix} \right.$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_3 = 0$$

ب/

نفرض $x_2 = \alpha \Leftarrow x_1 = \alpha$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

أساس لـ E_{λ_1}

عندما $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftarrow \begin{matrix} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} -2l_1 + l_2 \\ \Longrightarrow \end{matrix} \right.$$

$$-2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_2 + x_3 = 0$$

ب/

نجد لدينا ثلاثيان ومجهول هو . نفرض $x_2 = \alpha \Leftarrow$

$$x_2 = -\frac{\alpha}{3} \Rightarrow -2x_1 = x_2 + x_3 = -\frac{\alpha}{3} + \alpha = \frac{2\alpha}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{\alpha}{3}$$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(-1, 3, 1) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 5\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$\therefore$ المتجهات مستقلة خطياً

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = (a, b)$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = a \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = b \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_2 = a \\ 5\alpha_2 = -2a + b \end{array}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-2a+b}{11}$$

$$\Rightarrow x_1 = a + 4x_2 = a + 4\left(\frac{-2a+b}{11}\right)$$

$$= \frac{11a - 8a + b}{11} = \frac{3a+b}{11}$$ 5

$$\Rightarrow (a,b) = \frac{3a+b}{11} v_1 + \frac{-2a+b}{11} v_2$$

5

2

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; f(x,y,z) = (0,0)\}$$

$$= \{(x+y+z, x-z) = (0,0) \; ; \; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{-1+L_2} \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ -y-2z=0 \end{array}$$ 2

نعوض $z = \alpha$. z مجهول حر و x, y مجهولان أساسيان

$$x = -y - z = 2\alpha - \alpha = \alpha \Leftarrow y = -2\alpha$$

$$\ker f = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}\}$$ 3

$$\ker f \text{ basis } \{(1,-2,1)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \text{ basis } \{(1,-2,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$$

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي
لطلاب السنة الأولى- فيزياء
الدورة الفصلية الثالثة

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

2- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ وكان $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ، احسب $f(A)$.

3- أوجد مقلوب المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$.

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوص.

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- برهن أن تقاطع فضائيين شعاعيين جزئيين W_1 , W_2 من فضاء شعاعي V هوفضاء شعاعي جزئي منه .

2- أثبت أن $S = \{v_1 = 1 , v_2 = 1 + 2x^2 , v_3 = x^2\}$ أساس للفضاء الشعاعي $P_2(x)$ ، ثم اكتب $P(x) = 1 + x^2$ كتركيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2019-8-1

د. علياء حكيم

مكتبة A to Z

السؤال الأول: [30]

1) نضرب السطر الأول بـ (-1) ونضيفه إلى بقية الأسطر:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (a_2-1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (a_3-1) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & (a_n-1) \end{vmatrix} = (a_2-1)(a_3-1)\cdots(a_n-1)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = A^2 - 3A + 2I$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ l_1 - l_2 \\ 2l_1 - l_3 \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-l_2+l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{3l_3 - l_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{3l_2 - l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1$$

مكتبة A to Z

(٢)

السؤال الثاني : [30]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

(15)

$$\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 8 & -7 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_2+r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

2

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4$$
$$4x_2 - x_3 = 12$$
$$-5x_3 = -15 \Rightarrow x_3 = 3$$

$$x_2 = \frac{12 + x_3}{4} = \frac{12+3}{4} = \frac{15}{4}$$

7

$$x_1 = \frac{-4 + 3x_2 - 3x_3}{2} = \frac{1}{2}\left(-4 + \frac{45}{4} - 3\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-7 + \frac{45}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-28+45}{4}\right) = \frac{17}{8}$$

(15)

2

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)+1\right) + 1(1-\lambda+1) - 1(-1+3-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2+1) + 2 - \lambda - 2 - \lambda$$
$$= (1-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2) - (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$

5

مكتبة A to Z

$\lambda_1 = 1$ من أجل

$$\begin{cases} -y-\beta=0 \\ \alpha+2y+\beta=0 \\ -\alpha-y=0 \end{cases} \xrightarrow{i_2+i_3} \begin{cases} -y-\beta=0 \\ \alpha+2y+\beta=0 \\ y+\beta=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \alpha+2y+\beta=0 \\ y+\beta=0 \end{cases}$$

نعرف $\beta=\gamma \Leftarrow y=-\alpha \Leftarrow \alpha=-2y-\beta=2\alpha-\gamma=\gamma$

$$E_{\lambda_1}=\left\{\alpha\begin{bmatrix}\gamma\\-\gamma\\2\end{bmatrix};\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

هي أساس لـ E_{λ_1}

من أجل $\lambda_2=2$

$$\begin{cases} -\alpha-y-\beta=0 \\ \alpha+y+\beta=0 \\ -\alpha-y-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha+y+\beta=0$$

نعرف $y=\alpha,\ \beta=\beta \Leftarrow \alpha=-\alpha-\beta$

$$E_{\lambda_2}=\left\{\begin{bmatrix}-\alpha-\beta\\\alpha\\\beta\end{bmatrix};\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$ أساس لـ E_{λ_2}

السؤال الثالث: [30]

أ- واضح أن $W_1\cap W_2\subseteq V$

ب- $W_1\cap W_2\neq\emptyset$ لأن $0\in W_1$ و $0\in W_2$ ومنه $0\in W_1\cap W_2$

ج- $\forall x,y\in W_1\cap W_2$ و $\alpha,\beta\in K \Rightarrow x,y\in W_1$ و $x,y\in W_2$

$\Rightarrow \alpha x+\beta y\in W_1$ و $\alpha x+\beta y\in W_2$

$\Rightarrow \alpha x+\beta y\in W_1\cap W_2$

مكتبة A to Z

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 (1 + 2x^2) + \alpha_3 x^2 = 0$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 + 2\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^2 = 0$$

$$\alpha_2 + \alpha_1 x + (2\alpha_2 + \alpha_3) x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

ومنه المجموعة مستقلة خطياً.

$$P(x) = 1 + x^2 = \alpha 1 + \beta(1 + 2x^2) + \gamma x^2$$

$$= \alpha + \beta + 2\beta x^2 + \gamma x^2$$

$$= \alpha + \beta + (2\beta + \gamma) x^2$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

$$\beta = 0$$

$$2\beta + \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow$$

$$1 + x^2 = 1 v_1 + 0 v_2 + 1 v_3$$

د. خليل جبر

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- فيزياء | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة) لتكن لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 9\\ 8 & 0\\ -4 & 7\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\ 1 & 5 & -3\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 6\\ -3 & 0 & -10\end{bmatrix}$$

1- احسب $B.A$, $A.B$.

2- إذا كان $f(x)=x^2-2x+3$. احسب $f(C)$.

3- أوجد مقلوب المصفوفة C.

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2-3x_3&=1\\ 2x_1+\quad x_3&=0\\ 3x_1-4x_2+4x_3&=2 \end{aligned}$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة كرامر.

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

السؤال الثالث: (25 درجة) 1- بين فيما إذا كان $W=\{A \mid A=\begin{bmatrix}a & 2b\\ b & -a\end{bmatrix} \; ; a,b\in R\}$ فضاء شعاعي جزئي من فضاء المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية $M_2(R)$ فوق الحقل R.

2- أثبت أن $S=\{v_1=(1,-1,0)\,,\,v_2=(0,1,1)\,,\,v_3=(2,0,1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي R^3 ، ثم اكتب الشعاع $v=(7,-2,2)$ كتركيب خطي لعناصر الأساس S

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2019-1-20

مكتبة A to Z

سلم تصحيح هدى فضل / ... ثانوية نيزار
2019/11/25

السؤال الأول: [30]

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 21 & 45 & -19 \\ 48 & 0 & 32 \\ -17 & 35 & -37 \end{bmatrix}$$ -1 (8)

4

$$B.A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 82 \\ 54 & -12 \end{bmatrix}$$ 4

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 0 & -36 \\ -16 & 1 & -50 \\ 27 & 0 & 88 \end{bmatrix}$$ -2 3

$$f(C) = \begin{bmatrix} -11 & 0 & -36 \\ -16 & 1 & -50 \\ 27 & 0 & 88 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 0 & -44 \\ -18 & 2 & -62 \\ 33 & 0 & 111 \end{bmatrix}$$ 7

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ 3r_1+r_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ -3

$$\xrightarrow{\frac{r_3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-2r_3+r_2 \\ -4r_3+r_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$|A| = 2$

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مكتبة أتوز

السؤال الثاني: [35]

1. (15)

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad 3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8 \qquad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{5} \quad 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{10} = -1.5 \quad 4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -16 \Rightarrow x_3 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \quad 4$$

2. (20)

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

3

$$\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \ \& \ \lambda_2 = 4 \quad 5$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0$$

عندما $\lambda_1 = 1$ فإن

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6

وهذه المعادلة الواقعة لا هي تفه:

مكتبة أتو 7

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0\\ x_1+x_2+x_3&=0\\ x_1+x_2+x_3&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_1+x_2+x_3=0$$

لدينا مجهول رئيسي x_1 ومجهولان حران x_2, x_3

نعوض عن $x_2=\alpha$ ، $x_3=\beta$ فنجد $x_1=-\alpha-\beta$

عبارة الحل العام:

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha-\beta\\ \alpha\\ \beta \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي $\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$ شعاعان ذاتيان

الموافقان القيمة الذاتية $\lambda_1=1$

نأخذ $\lambda_2=4$ ونكون المصفوفة الموسعة

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2r_1+r_3]{-r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

والمعادلة الموافقة لها

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3&=0\\ -3x_2+3x_3&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1+x_2-2x_3&=0\\ x_2-x_3&=0 \end{aligned}$$

لدينا مجهولان رئيسيان x_1, x_2 ومجهول حر x_3

نعوض عن $x_3=\alpha$ فنجد $x_2=x_3=\alpha$

$$x_1=-x_2+2x_3=-\alpha+2\alpha=\alpha$$

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\\ \alpha\\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}$$

مكتبة A to Z

وبالتالي $\{v_1\}$ الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$

السؤال الثالث. [25] (10)

1- برهن أنه إذا كان $W \subseteq M_2(\mathbb{R})$ فإن $W \neq \phi$ و $W \subseteq \mathbb{R}$ ثم

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ +b_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & -2b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & 2\alpha b_1 \\ \alpha b_1 & -\alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_2 & +2\beta b_2 \\ \beta b_2 & -\beta a_2 \end{bmatrix} \quad 8$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & 2\alpha b_1 + 2\beta b_2 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 & -\alpha a_1 - \beta a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & 2(\alpha b_1 + \beta b_2) \\ \alpha b_1 + \beta b_2 & -(\alpha a_1 + \beta b_2) \end{bmatrix}$$

$\in W$

ومن P و ب نستنتج أن W فضاء جزئي من $M_2(\mathbb{R})$

2- $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$; $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ (15)

$$\Rightarrow \alpha_1(+1, -1, 0) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \alpha_3 = -\alpha_2 \end{matrix} \quad 8$$

$$\Rightarrow \alpha_2 - 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow -\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

وبالتالي v_1, v_2, v_3 مستقلة خطياً

وبما أن عدد عناصر β يساوي 3 وهو بعد الفضاء $P_2[x]$ فإن β أساس للفضاء $P_2[x]$

مكتبة A to Z

$$(7,-2,2) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$
$$= \alpha(1,-1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(2,0,1)$$
$$= (\alpha + 2\gamma, -\alpha + \beta, \beta + \gamma)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha + 2\gamma &= 7 \\ -\alpha + \beta &= -2 \\ \beta + \gamma &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 2 + \beta \\ \gamma &= 2 - \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 + \beta + 4 - 2\beta = 7$$

$$\Rightarrow -\beta = 7 - 6 = 1 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow \alpha = 1, \gamma = 3$$

$$(7,-2,2) = 1(1,-1,0) + (-1)(0,1,1) + 3(2,0,1)$$

مكتبة A to Z