كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الشروط اللازمة لوجود القيم القصوى الموضعية لتابع:

مبرهنة ٤

إذا كانت x_0 نقطة قيمة قصوى موضعية (محلية) للتابع $f(x)$ فإن مشتقها عند هذه النقطة معدوم أو غير موجود.

(إذا كان التابع قيمة قصوى موضعية عند x_0 فإن $f'(x_0)$ معدوم أو غير موجود)

التفسير الهندسي:

يكون المماس للمنحني البياني للتابع $f(x)$ عند نقاط القيم القصوى الموضعية لها موازياً لمحور الفواصل إذا كان $f'(x_0)=0$

ويكون موازياً لمحور التراتيب إذا كان المشتق $f'(x_0)$ غير محدود، ويوجد ما يمان من اليمين واليسار غير طويلين عند هذه النقاط إذا كان

$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$$

* نسمي النقاط التي يكون عندها المشتق معدوماً أو غير موجود ولكن متمركزها نقاطاً حرجة لهذا التابع.
* ونسمي النقاط التي ينعدم عندها المشتق $f'(x)$ نقاط استقرار التابع.
* نسمي النقطة الحرجة التي يكون عندها $f'_-(x_0)+f'_+(x_0)$ نقطة رأس.
* " " " " " $f'_-(x_0)$ و $f'_+(x_0)$ غير محدودين نقطة تراجع.

ملاحظة:

ليست كل نقطة حرجة للتابع $f(x)=x^3$ لأن $f'(x)=3x^2$ ، $f'(0)=0$

ولكن هذه النقطة ليست قيمة قصوى موضعية.

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

الشروط الكافية لوجود قيمة قصوى موضعية:

مبرهنة:

إذا كان f قابل للاشتقاق في جوار x_0.

* إذا غير المشتق $f'(x)$ في جوار النقطة x_0 إشارته من موجب إلى سالب فإن التابع قيمة عظمى موضعية في تلك النقطة (قيمة موضعية عظمى)
* إذا غير المشتق $f'(x)$ في جوار النقطة x_0 إشارته من سالب إلى موجب فإن للتابع قيمة موضعية صغرى في تلك النقطة
* إذا لم يغير المشتق $f'(x)$ إشارته في جوار x_0 فليس للتابع قيمة قصوى موضعية

مثال:

أوجد القيم القصوى الموضعية للتابع $f'(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$ مبيناً نوعها.

الحل:

لإيجاد القيم القصوى نتبع الخطوات الآتية:

1- نوجد المشتق f'

2- نوجد نقاط انعدام المشتق $(f'(x)=0)$

3- لتحديد نوع القيمة الموضعية القصوى ندرس إشارة f' من اليمين واليسار عند النقاط التي تعدم f'

4- نحسب قيمة التابع عند كل نقطة يبلغ فيها التابع قيمة قصوى

$f'(x)=x^2-x$

نحل المعادلة $f'(x)=0$

$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$

إما $x=0$ أو $x=1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(0)=0$, $f(1)=-\frac{1}{6}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	

$\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{6}$ قيمة صغرى موضعياً

$f(0)=0$ قيمة عظمى موضعياً

مبرهنة 2

إذا كان التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق من المرتبة الثانية على جوار النقطة x_0 وتحقق

1- $f'(x_0)=0$

2- f'' مستمر وغير معدوم عند x_0

عندئذ:

* إذا كان $f''(x_0)<0 \Rightarrow$ للتابع قيمة عظمى في هذه النقطة.
* إذا كان $f''(x_0)>0 \Rightarrow$ " " صغرى في هذه النقطة.

مثال: ابحث عن وجود قيم موضعية قصوى للتابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$

أولاً: نوجد $f'(x)$ ونحدد حلول المعادلة $f'(x)=0$

ثانياً:

نوجد $f''(x)$ وندرس إشارة $f''(x)$ عند النقاط التي تعدم $f'(x)$

ثم نحدد نوع القيمة القصوى.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نشتق $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x$

نحل المعادلة

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x(x-2)(x+1) = 0$

إما $x = 0$ أو $x = 2$ أو $x = -1$

نشتق التابع مرة ثانية

$f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$

ندرس إشارة f'' عند كل جذر للمشتق الأول

$f(0) = 0$ قيمة عظمى موضعية $\Leftarrow$ $f''(0) = -2 < 0$

$f(-1) = \frac{-5}{12}$ " صغرى موضعية $\Leftarrow$ $f''(-1) = 3 > 0$

$f(2) = \frac{-8}{3}$ " " " $\Leftarrow$ $f''(2) = 6 > 0$

مبرهنة 3

إذا كان التابع f قابل للاشتقاق ضمن المرتبة n وجميع المشتقات متمرة عند النقطة x_0 ولتكن

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ و $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

عندئذ:

* إذا كانت مرتبة الاشتقاق n عدداً زوجياً

(1) إذا كان $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\Leftarrow$ للتابع قيمة عظمى

(2) " " $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\Leftarrow$ للتابع قيمة صغرى

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* إذا كانت مرتبة الاشتقاق n عدد فردياً $\Rightarrow$ ليس للتابع قيمة قصوى

مثال: أوجد نقاط القيم القصوى المرضية للتابع

$f(x) = x^4 - 4x^3$

مبدأ تعريف

$f(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0$

$\Rightarrow 4x^2(x-3) = 0$

نوجد $f''(x)$ ثم نعوض f' عندكل جذر f'' عندكل جذر

$f''(x) = 12x^2 - 24x$

$f''(0) = 0$, $f''(3) = 36 > 0 \Rightarrow$ للتابع قيمة صغرى

عند $x=3$ وهي $f(3) = -27$

ليكن يبقى $x=0$ نوجد المشتق الثالث

$f'''(x) = 24x - 24$

$f'''(0) = -24 \neq 0$

وبما أن مرتبة المشتق عدد فردي $n=3 \Rightarrow$ ليس للتابع قيمة قصوى عند $x=0$

مثال: ادرس وجود قيم مرضية قصوى للتابع $f(x) = x^4 e^{-x^2}$

التابع معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ نوجد f'

$f'(x) = 4x^3 e^{-x^2} - 2x^5 e^{-x^2} = 2x^3 e^{-x}(2 - x^2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \,,\, x_2 = \sqrt{2} \,,\, x_3 = -\sqrt{2}$

نوجد المشتق الثاني ونبدأ دراسة عند النقاط التي تعدم المشتق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f''(x) = 12x^2e^{-x^2} - 8x^4e^{-x^2} - 10x^4e^{-x^2} + 4x^6e^{-x^2}$$

$$= 2x^2e^{-x^2}(6 - 9x^2 + 2x^4)$$

$f''(0) = 0$ ، $f''(-\sqrt{2}) < 0$ ، $f''(\sqrt{2}) < 0$

⇓ ⇓

للتابع قيمة عظمى عندها $x = \sqrt{2}$ تساوي $f(\sqrt{2}) = 4e^{-2}$

للتابع قيمة عظمى عند $x = -\sqrt{2}$ تساوي $f(-\sqrt{2}) = 4e^{-2}$

أما عند $x = 0$ نبحث إشارة المشتق الأول للتابع بجوار $x = 0$ حسب المبرهنة ①

x	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$
f'	0	$-$	0	$+$	0

أي المشتق يغير إشارته بجوار $x = 0$ من السالب إلى الموجب

⇐ للتابع قيمة صغرى موضعياً تساوي $f(0) = 0$

يمكن دراسة $x = 0$ حسب المبرهنة ③ بحيث يكون $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ ⇐ للتابع قيمة صغرى عند 0

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z